公共课系列 2001年研究生入学考试应试指导丛书

4

2001

策划：北京大学研究生院

2001

Entrance Exams for MD

研究生入学考试
数学
模拟试卷
（工学类）

邵士敏 主编

北京大学出版社

2001年研究生入学考试应试指导丛书

2001年研究生入学考试

数学模拟试卷

(工学类)

主　编　邵士敏

撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽

　　　　周建莹　庄大蔚　张立昂

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2001年研究生入学考试数学模拟试卷.工学类/邵士敏主编.
- 北京:北京大学出版社, 2000.3
(2001年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7-301-04477-1

Ⅰ.2… Ⅱ.邵… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03848号

书　　名: **2001年研究生入学考试数学模拟试卷(工学类)**
著作责任者: 邵士敏
责 任 编 辑: 刘金海
标 准 书 号: ISBN 7-301-04477-1/G·561
出 版 者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话: 出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752027
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者: 北京飞达印刷厂印刷
发 行 者: 北京大学出版社
经 销 者: 新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　9.375印张　235千字
2000年4月第一版　2000年4月第一次印刷
定　　价: 13.00元

前　　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们按照教育部制定的全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求，编写了这本模拟试题．

本书对Ⅰ类、Ⅱ类(工学类)数学，每类选编了12套题，共提供了24套模拟试题及解答，每套题中各部分所占比例及题型结构均按大纲的要求编排，题目内容基本上覆盖了大纲的要求．

在编写过程中，我们研究了数学考试大纲中对各部分要求的深度，使选编的题尽量符合大纲要求的深度．为了使“模拟试题”更接近实战的需要，我们还参考了近几年的试题，并且在选题时，既注意选编一些基本题，也选一些较难的、综合性的、需要经过思考的题，以便提高考生的解题能力，使他们能较顺利地应考并进一步得到提高．本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中就不另作说明．

由于时间仓促，难免有疏误之处，诚望广大考生及众读者提供宝贵意见。

编　者

2000年2月于北京大学

目　　录

数学Ⅰ 模拟试题

数学Ⅰ按大纲要求,内容主要有:

1. 高等数学:函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数和空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程.

2. 线性代数:行列式,矩阵,向量,线性方程组,矩阵的特征值和特征向量,二次型.

3. 概率论与数理统计初步:随机事件和概率,随机变量及其概率分布,二维随机变量及其概率分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验.

试卷结构:

1. 内容比例:高等数学　约60%;线性代数　约20%;概率论与数理统计初步　约20%.

2. 题型比例:填空题与选择题　约30%;解答题(包括证明题)　约70%.

数学Ⅰ　第1套题

一　填空题(每小题3分,共15分)

(1) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \dfrac{e^n}{n!}$ = 0______.

(2) 设函数$f(x)$有连续的导函数,$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,且$F(0)=1, F(2)=F'(2)=3$. 则$\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=$ 4______.

(3) 微分方程$y'+y\tan x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$的通解是______.

(4) 已知3阶矩阵A的行列式为-1,且

$$A^*=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则$a=$ 4______.

(5) 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则当$a=$ $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$______时,$P(X \geqslant a)=0.5$.

二　选择题(每小题3分,共15分)

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在闭区间[0, 2]上的微分中值定理中的中间值 $C=($　　$)$.

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $-\sqrt{2}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$

(2) 设 $f(x, y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x, y)dy=($　　$)$.

(A) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x, y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x, y)dx$

(C) $\int_0^1 dy\int_1^y f(x, y)dx$　　(D) $\int_0^x dy\int_1^y f(x, y)dx$

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n^2}$ (a 为实数) (　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 a 有关

(4) 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则 A 的三个特征值是 (C).

(A) 0, 1, 2　　(B) $-1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$

(C) $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$　　(D) $1, -1, \sqrt{2}$

(5) 已知随机事件 A 和 B 发生的概率分别为 $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$，A 和 B 至少有一个发生的概率为 $\dfrac{3}{4}$，则 $P(A|B)=($　　$)$.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{5}{12}$

三 (本题满分 5 分) 设 $x_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$. 证明: 当 $0\leqslant q<1$ 时, 序列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限.

四 (本题满分 5 分) 在曲面 $z=x^2-y^2$ 上求一点, 使曲面在此点的法线垂直于平面 $2x+3y+z+1=0$, 并写出此法线方程.

五 (本题满分 6 分) 重量为 300 千克的摩托艇以 66 米/秒的初速度直线前进, 如果水的阻力与速度成正比, 且当速度为 1 米/秒时阻力为 10 千克. 问经过多少时间后, 艇的速度降到 8 米/秒?

六 (本题满分 6 分) 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, 等式

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

中的 $\theta(x)$ 满足

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2},$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

七 (本题满分 6 分) (1) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上可积. 证明:

$$\int_0^a\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}.$$ Yes,

代换 $(a-x=t)$

(2) 利用上述公式, 求下列定积分的值:

$$\int_0^2\frac{x^2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$$ ok = 2

八 (本题满分 7 分) 半径为 R 的球面 S 的球心在定球面 S_0: $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 上. 问 R 取何值时, S 在定球面 S_0 内的那部分面积最大.

九 (本题满分 7 分) 求级数

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

的和函数及收敛域.并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{4^n}$ 之值.

十 (本题满分 8 分)设 α 是 n 维非零列向量,n 阶方阵

$A=I-5\alpha\alpha^T$, I 为 n 阶单位矩阵.

证明: (1) $A^2=A$ 的充分必要条件是 $\alpha^T\alpha=\frac{1}{5}$ Yes.

(2) 当 $\alpha^T\alpha=\frac{1}{5}$ 时,矩阵 A 不可逆.

十一 (本题满分 6 分) 已知 0 和 2 都是 3 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ b & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

的特征值. (1) 求 a 与 b. (2) 作可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

a=

b=2

十二 (本题满分 8 分) 游客乘电视塔内的电梯从底层到顶层观光,电梯于每个整点后的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行.一游客在早上八点以后的第 X 分钟到达底层候梯处,又 X 在 [0, 60] 上服从均匀分布.求该游客的等候时间的数学期望.

十三 (本题满分 6 分) 设(X, Y)的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} k\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\leqslant 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求: (1) 常数 k. $\frac{1}{\pi}$ (2) 边缘密度函数 $f_X(x)$. (3) EX, DX.

数学Ⅰ 第2套题

一 填空题(每小题 3 分,共 15 分)

(1) 设函数 $z=z(x, y)$ 满足方程

$$e^{z}=x+\sqrt{x^{2}+y^{2}}.$$

则 $\dfrac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y}=$______.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ 1/6.

(3) 当 A 在区间________内取值时,方程

$$3x^{4}-8x^{3}-6x^{2}+24x+A=0$$

有四个不相等的实根.

(4) 设 A 为 n 阶矩阵, $|A| \neq 0$, A^{*} 为 A 的伴随矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.若 A 有特征值 λ, 则 $(A^{*})^{2}+E$ 必有特征值____________.

(5) 某台机器生产了三批产品,产品数分别为 2500, 2000, 1500. 产品的合格率随批数下降. 第 k 批的合格率为 0.95^{k} $(k=1, 2, 3)$. 这三批产品的平均合格率为______.

二 选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x} t f(x^{2}-t^{2}) dt=$(B).

(A) $x f(x^{2})$ (B) $-x f(x^{2})$

(C) $2x f(x^{2})$ (D) $-2x f(x^{2})$

(2) 曲线积分

$$\oint_{C^+}\frac{x\mathrm{d}y-(y-1)\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}=(\quad)$$

其中闭曲线 C 所围的区域内包含点 $(0,1)$, C^+ 的正向规定为逆时针的方向.

(A) 0　　(B) 2π　　(C) 1　　(D) -2π

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当 $\Delta x\to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$, 则 $y(1)=(\quad)$.

(A) 2π　　(B) π　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设行列式

$$A=\begin{vmatrix}2&-3&1&5\\-1&5&7&-8\\2&2&2&2\\6&1&-5&3\end{vmatrix}$$

又设 A_{ij} 是 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i, j=1, \cdots, 4)$, 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=(\quad)$.

(A) 176　　(B) 0　　(C) -176　　(D) -2

(5) 向单位圆 $x^2+y^2<1$ 内随机地投下 3 点, 则这 3 点落在 3 个不同象限中的概率为(　　).

(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{3}{8}$　　(C) $\dfrac{3}{16}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

三　(本题满分5分)利用极坐标, 计算二重积分:

$$\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

四 （本题满分5分）

确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda i-x^2(x^4+y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

五 （本题满分6分）求微分方程

$$x-\frac{y}{y'}=\frac{2}{y}$$

的通积分.

六 （本题满分6分）

有一边长为 a 的正方形薄板，其上每一点的密度与该点到正方形的一个顶点的距离成正比，在正方形的中心处，密度为 ρ_0，求此薄板的质量.

七 （本题满分6分） (1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域，并求它的和函数.

(2) 求级数 $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 4^n}+\cdots$ 的和.

八 （本题满分7分） 将函数 $f(x)=\pi-x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上展开为余弦级数.

九 （本题满分7分） 曲面 $z=2-(x^2+y^2)$ 上哪一点处的切平面与平面 $2x+2y+z=-1$ 平行，并写出此切平面的方程.

十 （本题满分6分）求线性方程组

$$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$$

的全部解.

十一 (本题满分 8 分)求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

的全部特征值与特征向量.

十二 (本题满分8分)

已知随机变量(X, Y)服从二维正态分布，且X和Y分别服从正态分布$N(1, 3^2)$和$N(0, 4^2)$，X与Y的相关系数$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$. 设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，

(1) 求Z的数学期望EZ和方差DZ;

(2) 求X与Z的相关系数ρ_{XZ};

(3) 问X与Z是否相互独立？为什么？

十三 (本题满分 6分)

某保险公司的老年人寿保险有一万人参加，每人每年交 200 元. 若老人在该年内死亡，公司付给家属一万元. 设老年人死亡率为 0.017, 试求保险公司在一年的这项保险中亏本的概率.

附表　标准正态分布函数表

x	1.00	1.65	1.96	2.30	2.35
$\Phi(x)$	0.8413	0.9505	0.9750	0.9893	0.9906