应用数学丛书

随机过程理论与应用

熊大国 编著

国防工业出版社

应 用 数 学 丛 书

随机过程理论与应用

熊大国 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书介绍随机过程的基本理论及其应用。主要包括二阶矩过程和弱平稳过程，马尔科夫过程和鞅的一般理论，随机分析方法等内容。同时介绍这些过程的某些应用，特别是在控制论中的应用。后三章讨论马尔科夫链的轨道性质和Q过程的构造理论，最后一章是作者在这方面的研究成果。

读者对象为科技工作者，理工科院校教师、研究生和高年级学生。

应用数学丛书

随机过程理论与应用

熊大国　编著

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张18　474千字

1991年1月第一版　1991年1月第一次印刷　印数：0,001—2,370册

ISBN 7-118-00466-9/O·33　定价：14.60元

应用数学丛书目录

第 一 批

*1. Z变换与拉普拉斯变换　　关肇直、王恩平编著
*2. 常微分方程及其应用　　秦化淑、林正国编著
*3. 实变函数论基础　　胡钦训 编著
*4. 正交函数及其应用　　柳重堪 编著
*5. 沃尔什函数与沃尔什变换　　关肇直、陈文德编著
*6. 圆柱函数　　刘颖 编著

第 二 批

*7. 集合论　　程极泰 编著
*8. 图论　　王朝瑞 编著
*9. 概率论　　狄昂照 编著
*10. 矩阵理论　　王耕禄、史荣昌编著
*11. 复变函数论　　杨维奇 编著
*12. 逼近论　　徐利治、周蕴时、孙玉柏编著
*13. 矢量与张量分析　　冯潮清、赵愉深、何浩法编著
14. 模糊数学　　汪培庄、刘锡荟编著
15. 编码理论　　肖国镇 编著
*16. 应用泛函分析　　柳重堪 编著

第 三 批

17. 偏微分方程　　丁夏畦 编著
18. 球函数及其应用　　楼仁海 编著
*19. 椭圆函数及其应用　　高本庆 编著
*20. 应用离散数学　　陈文德 编著
*21. 拓扑理论及其应用　　王则柯、凌志英 编著
*22. 网络理论　　张正寅 编著

*23.	广义函数及其解析表示	李邦河、李雅卿编著
24.	群　论	刘木兰　编著
*25.	数理逻辑	沈百英　编著
*26.	线性系统与多变量控制	叶庆凯　编著
27.	最优化计算方法	马仲蕃、应玫茜、陈光亚编著
28.	实用数理统计	李国英、吴启光　编著
29.	多项式与多项式矩阵	王恩平、王朝珠编著
30.	索伯列夫空间	丁夏畦　编著
31.	旋转群与四元素方法	毕大川　编著
32.	信息论与最优编码	章照止　编著
33.	场的数学理论及物理应用	杜　珣　编著
34.	系统的动态辨识	张永光　编著
35.	非线性系统分析与应用	司徒荣　编著
36.	数学物理数值方法	应隆安、韩厚德、滕震环、黄禄平编著
*37.	误差理论与数据处理	贾沛璋　编著
38.	可计算性与计算复杂性	李　未　编著
*39.	随机过程理论与应用	熊大国　编著
40.	估计理论与随机控制	卢伯英　编著
41.	应用组合数学	刘振宏　编著
42.	渐进分析方法及应用	徐利治、陈文忠编著
43.	有限元方法	应隆安　编著
44.	经济数学	苑凤岐、林　寅编著
45.	预测的数学方法	张有为　编著
46.	粘性流体理论	吴望一、韩厚德编著
47.	塑性理论	黄筑平　编著
48.	变分法及其应用	叶庆凯、郑应平编著

*为已经出版或即将出版的书目。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序

本世纪30年代Колмогоров, А.Н.建立概率论公理体系，为随机过程提供了有效的研究工具。随后，随机过程进入蓬勃发展时期，并且在现代物理学、化学、电子通讯、自动控制，以至生物学、社会学和经济学等学科中获得广泛应用，成为一门内容非常丰富的学科。

要在一本篇幅不大的书里，详细地介绍随机过程的基本内容，需要在内容选取和叙述方式上下功夫。本书作者熊大国同志作了一些新的尝试，作者把随机过程的微积分运算和轨道性质作为主要的讨论对象，通常的矩形式的或有穷维分布族形式的统计规律成为过程运算或轨道性质的统计表现。例如，在弱平稳过程中把反映弱平稳过程和正交增量过程之间联系的过程谱展式作为核心内容。这样，众所周知的相关函数的谱展式便成为这种联系的统计表现，进而方便地解决了求线性均方微分(或差分)方程的弱平稳解和遍历性的判定问题。又如，在马尔科夫过程中，突出了Itô随机微分方程和Колмогоров方程之间的联系，前者反映扩散过程和Wiener过程之间的联系，后者则是用转移概率密度在统计方面反映这一联系。这种处理方式，对于广大应用工作者是会受欢迎的，因为他们接触的真正对象是过程本身，对象之间的联系是过程运算，而统计规律不过是它们的外部反映。事实上，均方微分方程和Itô方程在应用中占有非常重要的地位，本书第四章和第八章介绍了它们在应用中的一个侧面。

在马尔科夫链(第三篇)中，本书把轨道的研究贯穿始终，关于转移概率的许多经典结论成为轨道性质的统计表现，为马尔科夫链提供了一幅清晰的图象。连续参数马尔科夫链中的一个基本问题是Q过程构造问题：给定满足稳定性条件的矩阵Q，构造具

有密度矩阵Q的全部马尔科夫链$P(t)$，称$P(t)$为Q过程。由于已经得到连续参数马尔科夫链的许多轨道性质，这个问题的研究获得了不少成果。1958年王梓坤教授构造出全部生灭过程，开创了国内对这个问题的研究。在王梓坤教授的指导下，本书作者研究了这个课题并取得了一系列成果，第十一章介绍了作者所得到的主要结果。它们是：1. 构造出全部右连续Q过程。2. 证明了任何保守Q过程是一列一阶瞬返Q过程的极限，得到确定保守Q过程的相容参数族，在极限意义下构造出全部保守Q过程。3. 当Q是有限流出边界时，在杨向群教授构造出全部Q过程后，作者给出这类Q过程的一个新表达式，此表达式不再需要简化假定，其中的参数有较明确的概率意义，当Q又是保守时，它成为Williams所构造的全部Q过程。这些结果是目前所能构造的最广泛Q过程类。

自然，要想从运算和轨道研究导出随机过程的其它结论，仍然存在着相当多的困难。另外，本书介绍极限理论的内容较少，也没有讨论独立增量过程和强平稳过程的理论，以及许多近代发展。可能作者想弥补这些不足，因此谈论了随机过程的研究任务，并围绕着这些研究任务展开基本理论和基本方法。我估计，读完本书后，对那些专题研究和具体问题应摆在本书的什么地方，以及如何对待它们，读者会找到答案的。

张志方

1986年5月于北京工业学院

前　　言

随机现象是自然界中的普遍现象，描述这类现象规律的工具是随机过程。即使是所谓的确定性现象，如果考虑偶然因素的影响，它们也是随机的，这时用函数不能确切地描述它们的规律。而许多随机现象，如布朗运动、排队现象、偶然干扰等，则难以用函数工具来描述。鉴于此，在科学和技术中愈来愈广泛地使用随机过程这一工具，科技工作者愈来愈需要这方面的理论和应用知识。

随机过程理论包含非常丰富的内容，初学者往往感到内容零乱，不易掌握它们之间的联系。因此，我们致力于理论的系统性，并把内容分成三个相对独立的模块，以便读者根据需要取舍内容。第一个模块由前四章组成，在假定过程存在二阶矩的条件下建立均方随机分析理论——带随机色彩的微积分学。第二个模块由一、五、六、二、七、八等章组成，主要内容是在过程具有马氏性的假定下建立转移分布函数的理论；在过程具有鞅特性的假定下获得序列的收敛性质和过程的整齐的轨道性质，然后把均方随机分析发展成伊藤随机分析。第三个模块由一、五、九、六、十、十一等章组成，第九至十一章介绍时齐马氏链的轨道性质，在此基础上讨论用密度矩阵Q构造转移矩阵$P(t)$的问题，§11.2～§11.5是作者的研究工作。

由于篇幅的限制，本书只是在维纳过程，而没有在鞅的基础上建立随机积分和随机微分方程；也没有在普阿松过程的基础上展开点过程理论。另外，第十一章只限于讨论作者在这方面的工作。

为保持理论的严谨性，本书在叙述时不回避使用测度论的概念和方法，并力图把这样的方法介绍给读者。但是，阅读本书并

不要求读者具备测度论的知识，因为概念的引入不是借自测度论，而是根据随机现象本身的需要，着重阐明概念的概率内容，并由此引出结论的证明。我们希望，没有接触过测度论的读者将感到这是学习新内容的自然方式；对了解测度论的读者来说，这些内容给出了抽象测度论的一类背景材料。

中国科学院系统科学研究所狄昂照同志审阅了全稿，提出许多宝贵意见；王梓坤教授和张志方教授自始至终地指导本书的写作；陈文君同志给了许多帮助。在此，谨致以衷心的感谢。

由于作者水平有限，虽尽力而为，错误和不妥之处在所难免，敬请随时指教，以便改正。

作 者

1985年10月

目　　录

第一篇　随机过程的二阶矩理论

第二篇　马尔科夫过程，鞅和随机微分方程

第三篇　马尔科夫链的理论

第一篇　随机过程的二阶矩理论

第一章　随机过程概论

§1.1　直观背景；定义

一、背景材料

在确定性现象中，人们用函数描述研究对象的变化规律。例如，用运动方程$s = x(t)$表示质点的运动规律；用$V = x(t)$表示电路中输出电压随时间的变化规律；用$x = x(t)$表示系统的某参数值的变化情况。但当我们深入地研究这些规律时，就会发现用函数来描述它们并不十分确切。由于受到种种偶然因素的影响（例如，运动中的随机力，电路和系统中的随机干扰），在时刻t，质点的位置、输出电压或系统的参数值$x(t)$不再是一个确定的量，而是随机变量$x(t,\omega)$。它们的变化规律也不再是函数$x(t)$，$t\geqslant 0$，而是$x(t,\omega)$，$t\geqslant 0$。随机过程就是无穷多个随机变量形成的族$\{x(t,\omega);\ t\geqslant 0\}$。下面用几个实例说明随机过程产生的背景。

例 1（布朗运动）　1827年英国植物学家布朗发现，水中的花粉不停地作不规则的运动。当初不能说明运动的原因，直到1877年德耳索（Delsaulx）才正确地把这种现象解释为花粉受到周围分子碰撞（随机力）的结果。

如果以$\boldsymbol{W}(t,\omega)=(x(t,\omega),y(t,\omega),z(t,\omega))$表示花粉微粒在时刻$t$的位置，那么$\boldsymbol{W}(t,\omega)$是随机矢量，微粒运动规律是随机矢量过程$\boldsymbol{W}(t,\omega)$，$t\geqslant 0$。

例 2（热噪声）　由于自由电子的随机运动，导致电阻两端

的电压V有随机的涨落，这种涨落电压称为热噪声。在通讯中，热噪声是远距离电讯传送中的一种障碍。

如果用$W(t, \omega)$表示t时的热噪声，那么它是随机过程$W(t,\omega)$，$t \geqslant 0$。电阻两端的电压是随机过程$V(t)+W(t,\omega)$，$t \geqslant 0$。

例 3（随机徘徊） 设质点M在非负整数集$\{0, 1, 2, \cdots\}$上按下述规则运动：如果它现在位于n（>0），下一步（即经过一个单位时间）以概率p（$0<p<1$）位于$n+1$，以概率$1-p$位于$n-1$；如果它现在位于0，则下一步以概率1位于1。

用$x(n, \omega)$表示第n步质点所在的位置，那么质点的运动规律是随机过程$x(n, \omega)$，$n \geqslant 0$。

例 4（群体的繁殖） 某种生物（如人口、细菌等）在时刻t的总数用$x(t, \omega)$表示，那么$x(t, \omega)$是随机变数（至少在将来时刻是如此）。因此，群体总数的变化情况要用随机过程$x(t, \omega)$，$t \geqslant 0$来描述。

例 5（排队模型） 某电话交换台的呼唤（每一呼唤代表一个要打电话的人）鱼贯而来，形成呼唤流。用$x(t, \omega)$表示$(0, t]$内总共出现的呼唤次数。在一些假定条件下，概率论中曾证明$x(t, \omega)$服从参数为λt的普阿松（Poisson）分布。因此，交换台接收到的呼唤次数是随机过程$x(t, \omega)$，$t \geqslant 0$。

例 6（水库模型） 考虑一个容量为无限的水库。假定在时间间隔$(n, n+1]$内进入的水量为$x(n, \omega)$，并设诸$x(n, \omega)$是只取整数值的随机变量。而泄放只在离散时刻$n=1, 2, \cdots$进行，只要水库不空，每次就放掉一个单位的水量。

用$z(n, \omega)$表示水库在时刻n的蓄水量。则水库蓄水量的变化规律是随机过程$z(n, \omega)$，$n=0, 1, 2, \cdots$。一个需要研究的问题是寻找随机变量

$$\sigma_k(\omega)=\inf\{n: n>0, z(n, \omega)=k\} \qquad (1.1.1)$$

的统计性质。特别，$\sigma_0(\omega)$是水库首次排空的时间。

例 7（落体运动） 设质量为m的物体自距地面高度为h

的A处自由落下。如图 1-1 建立坐标系，假定物体在时刻 t 的位

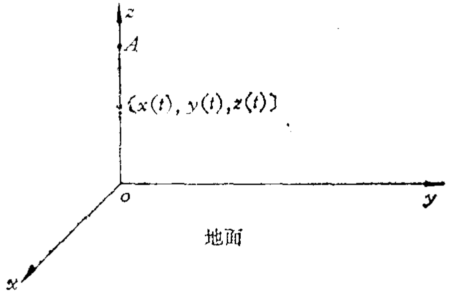

图 1-1

置是 $(x(t), y(t), z(t))$，那么物体的运动方程是

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{dx}{dt}+N_1(t, \omega) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{dy}{dt}+N_2(t, \omega) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg-k\frac{dz}{dt}+N_3(t, \omega) \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.2)$$

其中 g 是重力常数，k 是空气阻力系数，N_1，N_2，N_3 分别是物体在 x，y，z 方向受到的随机力。

当物体较重时随机力可以忽略。在初始条件 $x(0)=y(0)=0$，$z(0)=h$ 下方程 (1.1.2) 的解为

$$\begin{cases} x(t)=0 \\ y(t)=0 \\ z(t)=h-\dfrac{1}{\alpha^2}g\,(e^{-\alpha t}-1+\alpha t) \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

其中 $\alpha=k/m$。

当物体很轻而且体积很小时（例如灰尘或烟尘的自由下落），随机力 N_1，N_2，N_3 不能忽略，方程组 (1.1.2) 的解将是“随机矢量过程 $\boldsymbol{X}(t, \omega)=(x(t, \omega), y(t, \omega), z(t, \omega))$，$t\geqslant 0$。

例 8（随机振动） 坦克或汽车在地面行驶时，由于路面凹凸不平，使它们在垂直方向产生振动。此振动近似地满足微分

方程

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg-k\frac{dz}{dt}+N(t,\omega) \qquad (1.1.4)$$

其中m，g，k意义与上例相同，$N(t,\omega)$是随机力，它来源于路面对物体的反作用力。

由于随机力的存在，物体在垂直方向的振动规律是随机过程$z(t,\omega)$，$t\geqslant 0$。

例9（随机相位正弦信号） 雷达系统的发射信号往往是一段频率已知的正弦波。当信号被静止目标反射时，接收机收到的反射信号具有$A\sin(\lambda t+\theta)$的形式。信号的持续时间为间隔$(0,T)$。通常，信号周期$\frac{2\pi}{\lambda}$比T小得多，且λ只在一段很窄的频率范围内变化，因此可以把λ视为常数。但是，对相位θ的预测，即使对精度要求不高（如只要求精确到几度），也必须准确地知道雷达与目标之间的距离，这点很难做到。在这种情况下，不妨假定完全缺乏相位方面的信息，即假定θ是服从$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量。

这时，雷达接收机收到的反射信号是随机过程$x(t,\omega)=A\sin[\lambda t+\theta(\omega)]$，$t\in[0,T]$。

例10（随机频率正弦信号） 如果雷达的发射信号被运动目标反射，反射信号$A\sin(\lambda t+\theta)$的频率与入射频率相差一个叫都普勒（Doppler）频率的量。如果γ是入射频率，则都普勒频率$\lambda_d\approx\frac{2u\gamma}{c}$，其中$u$是反射面的径向速度，$c$是光速。如果反射面的径向速度未知，那么反射频率$\lambda$也是未知的。因此，假定$\lambda$也是随机变量。这时，雷达接收机接收到的信号是随机过程$x(t)=A\sin[\lambda(\omega)t+\theta(\omega)]$，$t\in[0,T]$。

例11（噪声） 一个系统受到大量偶然因素的影响，假定它们在时刻t对系统的总影响能用随机变量$N(t,\omega)$描述。人们把这种影响称为噪声。因此，噪声是随机过程$N(t,\omega)$，$t\geqslant 0$。