工程硕士 应用数学 系列教材

运筹学基础

应用数学

何坚勇 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

工程硕士应用数学系列教材

运筹学基础

何坚勇 编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

(京)新登字158号

内 容 简 介

本书是一本着重实际应用又兼顾理论要求的运筹学教材.主要内容包括线性规划、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划及决策分析.各章附有习题,书末有习题解答和提示.并介绍了专门用于求解数学规划的LINDO软件包.

本书起点低、跨度大;基本概念与基本理论阐述清晰透彻,密切联系实际,各种算法推导详细,配有丰富实用的例题.本书可作为工程硕士研究生以及经济管理等非数学专业大学生、研究生的教材,也可供科技人员和管理人员参考.

书　名:运筹学基础
作　者:何坚勇
出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京清华园胶印厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:787×960 1/16　印张:31　字数:652千字
版　次:2000年7月第1版　2000年7月第1次印刷
书　号:ISBN 7-302-03922-4/F·276
印　数:0001～5000
定　价:31.00元

编　委　会

主　编　蔡大用

编　委　(以姓氏笔划为序)：

邢文训　陆　璇　姜启源　康飞宇　潘真微

编 者 的 话

电子计算机已经成为工程技术界、管理科学领域须臾离不开的工具．因此，学习用计算机解决工作中的各种实际问题已经成为各行业知识更新的必要环节，更是工程硕士学位的必修课程．为了适应这种形势，在几年教学经验的基础上我们编撰了这套《工程硕士应用数学》系列教程．

全套书由三本组成：《科学和工程计算基础》，《应用概率统计》和《运筹学基础》．

编书的指导思想是：**低起点，大跨度**．前者是指避免某些抽象的数学推理和繁琐的公式演绎．为了顾及有些读者复习基础知识的需要，书中专门设置了有关微积分、线性代数的章节．大跨度是指力图覆盖各领域中常常涉及到的数学问题．当然，全面覆盖是不可能的，仅仅是尽我们所能而已．另一个指导思想是：**着重内容的实用性，兼顾理论体系**．对于知识更新和进修工程硕士的需要来说，学习内容的实用性显得更加重要．因此，在题材选择和叙述重点上我们都把实用性放在首位．

除了介绍算法和相关的理论之外，《科学和工程计算基础》及《应用概率统计》两本书还介绍了目前流行的两个数学软件——Matlab 和 SAS.《运筹学基础》介绍了 LINDO 软件包．学员利用这些工具可以很容易地实现各种算法，从而避免了枯燥的程序设计工作．

还要提到的是，这套丛书虽然是针对工程硕士课程撰写的，但对于一般理工科大学生和研究生，也是一本可以使用的教科书．

最后，我们对清华大学研究生院和清华大学出版社的领导表示衷心的感谢，没有他们的指导和帮助这套丛书是不可能成功的．

编 者

1999 年 5 月

前　　言

运筹学，即最优化理论，或在有的领域中称为管理科学. 它广泛应用于工业、农业、交通运输、商业、国防、建筑、通信、政府机关等各个部门、各个领域. 它主要解决最优生产计划、最优分配、最佳设计、最优决策、最佳管理等最优化问题. 掌握优化思想并善于对遇到的问题进行优化处理，是企业领导或各级各类管理人员必须具备的基本素质. 运筹学就是帮助读者学会如何根据实际问题的特点、抽象出不同类型的数学模型，然后选择不同的方法进行计算.

随着经济建设与科教事业的不断发展，近年来在学生队伍中出现了新的群体——工程硕士研究生. 这部分学员的特点是有丰富的实践经验、大多在各级领导岗位上或负责一定的技术业务工作，又受过良好的大学教育. 只是离开学校时间较长，多达十来年，少则三五年. 因此数学基础知识忘得较多、对理论推导有一定的惧怕心理. 但又有在理论上进行深造与提高的强烈愿望. 针对工程硕士研究生的上述特点，编写一本起点低、跨度大、着重实际应用又兼顾理论要求的运筹学教材，是作者这几年来的一个心愿.

本书首先设置了预备知识这一章，着重复习与本书有关的微积分和线性代数的基础知识. 如向量、矩阵、二次型的正定性；多元函数的梯度、极值、泰勒公式等. 也补充了一般大学课程中没有但本书需要用到的知识，如多元函数的黑塞矩阵概念.

本书的主体介绍了线性规划、运输问题、整数规划、目标规划、非线性规划、动态规划及决策分析. 这些都是运筹学中最基本且应用最广泛的内容，涵盖了运筹学中的大部分. 全部讲授约需 64 课时. 书中部分打 * 内容可选讲.

本书在阐述基本概念与基本理论时，力求清晰、透彻. 在适当的地方配置了一些思考题，以促使读者深入思考、加深对内容的理解. 对于基本的理论、主要的定理都给予了证明. 因此本书在理论上有一定的深度. 使读者不仅知其然，并且知其所以然，为其举一反三、扩大应用面打好基础. 在证明定理时，尽量考虑到学员的现有基础. 如在证明线性规划最优性准则定理（本书定理 3.1.1）时，若按通常证法，书写简单明了. 但几次教学实践结果，不少学员都感到有疑问. 分析原因，主要是对线性方程组有无穷多个解时的解集、当取不同的基础解系时，其解集是等同的这一点理解不深. 因此本书在证明该定理时，多费了一些笔墨，从线性方程组的解集角度入手，证明满足最优性准则的可行解必是全部可行解中的最优解. 实践效果较好. 本书对一些理论上过深或推导过于繁琐的内容，采取以讲清概念、用几何图形加以辅证的方法，避免过繁的推导或引入过多的数学概念（这些推导与概念对于数学专业也许是必须的）.

本书注重联系实际. 在介绍每一种规划模型前都以实际问题引入. 在讲清概念和理论

后，对各种算法都有详细的推导过程，且配有例题、参照例题的解法，学员可以比较容易理解算法的原理和掌握算法的基本步骤，并学会如何应用这些算法. 书中还配有几十个各行各业的应用实例，学员参照这些实例可以学习到如何根据实际问题建立相应数学模型的方法与技巧.

建立数学模型是为了解决实际问题，得到计算结果. 书末附录中介绍了在教育、科研与工业界得到广泛应用且专门用于求解数学规划的软件包——LINDO 软件包. 书中相应部分穿插了用该软件包求解各类规划的例题. 学员学习后可基本掌握如何使用 LINDO 软件包求解规划问题.

书中每章都配有习题，书末给出了答案.

作者相信广大学员学习本书后，能较快地掌握运筹学的基本知识，并应用到工作实际中去，定会对工作有所帮助. 也为进一步学习运筹学理论打下良好的基础.

本书主要对象是工程硕士研究生，同时也可作为经济管理等非数学专业的大学生、研究生的"运筹学"教材. 对科技工作者与管理人员也有一定的参考价值.

在编写本书过程中，得到清华大学研究生院与清华大学出版社的大力支持. 清华大学应用数学系的领导及运筹学教研组的同事也给予了充分的支持和合作. 附录中"LINDO 软件包介绍"是谢金星、姜启源老师的工作成果. 用 LINDO 软件计算的部分例题是由郑小峰同学完成的. 在多年的教学实践及编写本书过程中，作者从许多国内外专家、学者的著作中汲取了营养，获益匪浅，本书直接或间接地引用了他们的部分成果(见书末参考文献)，在此一并表示感谢与敬意.

由于成书时间仓促、作者水平有限，本书缺点甚至错误在所难免，敬请专家、学者及读者不吝指教.

编　者

1999 年

目　　录

第3部分 整数规划

第4部分 目标规划

第5部分 非线性规划

第 6 部分 动 态 规 划

*第 7 部分 决 策 分 析

第1部分　预备知识

本部分主要是复习微积分与线性代数中的有关内容，包括向量与矩阵的基本概念与运算、二次型及其正定性，一元及多元函数的导数、极值与泰勒公式、黑塞矩阵等. 这些知识都是学习本书相关内容时要用到的数学工具. 由于篇幅有限，本书只能作一个简要的复习，不能作系统的讲述. 对有关定理也只给出内容或说明，不予证明. 如读者需要了解相关知识，可查阅有关书籍. 对于读者较熟悉的内容，如一元函数的导数运算、线性代数中行列式运算、解线性方程组运算等在本部分中也不再赘述.

为了帮助读者理解有关概念，文中配有部分例题及习题.

第1章　预备知识

1.1　向　　量

1.1.1　向量定义及线性运算

定义 1.1.1　n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 构成的一个有次序的数组称为一个 n 维向量. 记作向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为第 i 个分量. 如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3)$ 是一个二维向量. $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-4)$ 是一个三维向量，等等.

向量可记成行的形式，也可记成列的形式，分别称为行向量与列向量，如 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,4)$ 为行向量，而 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\0\\4\end{bmatrix}$ 则为三维列向量.

为了书写方便，列向量也可用行向量的转置形式来表示：$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$.

两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 相等当且仅当它们的对应分量相等. 即 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$.

定义 1.1.2　向量 $\boldsymbol{\gamma}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 之和. 记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

定义 1.1.3　向量 $k\cdot\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$ 称为数 k 乘向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量 $-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)=(-1)\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

因此向量的减法可化为加法：$\alpha-\beta=\alpha+(-1)\cdot\beta$.

例 1.1.1　$\boldsymbol{\alpha}=(3,0,-4)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,-1,6)$.

则　$2\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}=(6,0,-8)+\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-2\right)=\left(\frac{16}{3},\frac{1}{3},-10\right)$.

显然只有同维向量才能进行加减运算.

定义 1.1.4　有 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 s 个实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$. 称 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个线性组合. 又若 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$. 则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

例 1.1.2　$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-1)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,-4,-2)$，

则　$\boldsymbol{\beta}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

所以 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个线性组合，或说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

一个向量$\boldsymbol{\beta}$并非都可由某一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出. 若不存在一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$成立,称$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出.

例

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出. 不然若有$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$

则有

$$k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}.$$

即

$$\begin{cases}1\cdot k_1+0\cdot k_2+1\cdot k_3=2,\\0\cdot k_1+1\cdot k_2+1\cdot k_3=3,\\0\cdot k_1+0\cdot k_2+0\cdot k_3=4.\end{cases}$$

其第 3 个方程是一个矛盾方程,无解. 因此$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

1.1.2　向量的线性相关性

定义 1.1.5　若存在一组不全为零的数组$k_1,k_2,\cdots,k_s$使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$成立. 称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关. 否则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关. 也即只有当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时,才能使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$才成立. 或者说,只要$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为零,那么线性组合$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$必不为零,则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

例 1.1.3　已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,问向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$是线性相关还是线性无关,并证明你的结论.

证　考察: $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

上式可等价为

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 由定义 1.1.5 知,它们的系数必全为零,即

$$\begin{cases}k_1\qquad\quad+k_3=0,\\k_1+k_2\qquad\quad=0,\\\qquad\ \ k_2+k_3=0.\end{cases}$$

对于此线性齐次方程组,只有唯一解$k_1=k_2=k_3=0$,由定义 1.1.5 知$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

例 1.1.4　判断$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,4,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,-7),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,4)$的线性相关性.

解　考查是否有不全为零的数组k_1,k_2,k_3使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$成立,等价于讨论齐次方程组

$$\begin{cases}3k_1+2k_2+k_3=0,\\4k_1+k_2+2k_3=0,\\2k_1-7k_2+4k_3=0,\end{cases}$$