

文登学校考研系列 数学指定用书



2001版

# 数学题型归纳与模拟试题集 经济类

主 编 陈文灯 黄先开



世界图书出版公司

文登学校考研系列  指定用书 4

(2001 版)

# 数学题型集粹与模拟试题集

(经济类)

主 编 陈文灯 黄先开

副主编 曹显兵 施明存

世界图书出版公司

北京 · 广州 · 上海 · 西安

## 图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与模拟试题集(经济类)/陈文灯等主编. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2000.3

[文登学校考研系列 数学指定用书 4(2001 版)]

ISBN 7-5062-3721-0

I. 数… II. ①陈… ②黄… III. 高等数学-研究生-入学考试-试题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 06638 号

**数学题型集粹与模拟试题集(经济类)**

(文登学校考研系列 数学指定用书 4)

---

**主 编:**陈文灯 黄先开

**副 主 编:**曹显兵 施明存

**责任编辑:**世 华

**装帧设计:**王元群

---

**出 版:**世界图书出版公司北京公司

**发 行:**世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 62512788 邮编 100010)

**销 售:**各地新华书店

**印 刷:**北京密云九阳印刷厂

---

**开 本:**787×1092 毫米 1/16

**印 张:**25.75

**字 数:**600 千字

**版 次:**2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷

**印 数:**0001—10000

---

ISBN 7-5062-3721-0/G·89

定价:32.00 元

---

## 前 言

本书是我和黄先开主编的《文登学校考研系列 数学复习指南(2001 版)》一书的续篇。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

本书有以下特点:

(1)重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强,覆盖面大。本书不是一般性的题解书,不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题集作者多年的教学心得,并经几个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以各知识点串在一起,而且可以拓展思路,遇到“从未见到”的题时,可以从容应对。

另外,本书还编写了全真模拟试题数学三(十套),数学四(十套)。这是演练题而不是考前的压题。读者复习完本书后,严格掌握在3小时内做完试卷,然后测算自己的得分,以此了解自己的水平。

书后附录还给出2000年和1999年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学三、数学四试题及参考答案。

成书仓促,定有不当及错误之处,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

陈文灯



2000.3

# 目 录

## 第一篇 微积分

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 第一章 函数·极限·连续····· | 1   |
| § 1 函数·····       | 1   |
| § 2 极限·····       | 6   |
| § 3 函数的连续性·····   | 20  |
| 第二章 导数与微分·····    | 25  |
| 第三章 不定积分·····     | 37  |
| 第四章 定积分·····      | 47  |
| 第五章 中值定理·····     | 68  |
| 第六章 一元微积分的应用····· | 75  |
| § 1 导数的应用·····    | 75  |
| § 2 定积分的应用·····   | 85  |
| 第七章 多元函数微分学·····  | 89  |
| 第八章 重积分·····      | 96  |
| 第九章* 无穷级数·····    | 105 |
| 第十章* 常微分方程·····   | 117 |

## 第二篇 线性代数

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 第一章 行列式·····      | 127 |
| 第二章 矩阵·····       | 137 |
| 第三章 向量·····       | 145 |
| 第四章 线性方程组·····    | 161 |
| 第五章 特征值与特征向量····· | 174 |
| 第六章* 二次型·····     | 190 |

## 第三篇 概率论与数理统计初步

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 第一章 事件的概率·····       | 195 |
| 第二章* 随机变量及其分布·····   | 202 |
| 第三章 随机变量的数字特征·····   | 213 |
| 第四章 大数定律和中心极限定理····· | 224 |

|      |                                                |     |
|------|------------------------------------------------|-----|
| 第五章* | 数理统计初步 .....                                   | 230 |
| 数学三  | 模拟试题(一) .....                                  | 246 |
| 数学三  | 模拟试题(二) .....                                  | 254 |
| 数学三  | 模拟试题(三) .....                                  | 260 |
| 数学三  | 模拟试题(四) .....                                  | 266 |
| 数学三  | 模拟试题(五) .....                                  | 274 |
| 数学三  | 模拟试题(六) .....                                  | 279 |
| 数学三  | 模拟试题(七) .....                                  | 286 |
| 数学三  | 模拟试题(八) .....                                  | 292 |
| 数学三  | 模拟试题(九) .....                                  | 299 |
| 数学三  | 模拟试题(十) .....                                  | 306 |
| 数学四  | 模拟试题(一) .....                                  | 312 |
| 数学四  | 模拟试题(二) .....                                  | 319 |
| 数学四  | 模拟试题(三) .....                                  | 326 |
| 数学四  | 模拟试题(四) .....                                  | 333 |
| 数学四  | 模拟试题(五) .....                                  | 339 |
| 数学四  | 模拟试题(六) .....                                  | 345 |
| 数学四  | 模拟试题(七) .....                                  | 350 |
| 数学四  | 模拟试题(八) .....                                  | 358 |
| 数学四  | 模拟试题(九) .....                                  | 366 |
| 数学四  | 模拟试题(十) .....                                  | 372 |
| 附录 1 | 2000 年全国攻读硕士学位研究生入学考试 数学试题(数学三、数学四)及参考答案 ..... | 378 |
| 附录 2 | 1999 年全国攻读硕士学位研究生入学考试 数学试题(数学三、数学四)及参考答案 ..... | 392 |

# 第一篇 微积分

## 第一章 函数·极限·连续

### § 1 函 数

#### 一 有关函数概念的题型

##### 题型 I 判别函数的等价性

**【解题提示】** 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则为不同函数.

**【例 1.1】** 设  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在,且  $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , 则与  $f(x)$  等价的函数是( ).

(A)  $y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx$  (B)  $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt$

(C)  $y = \int f'(x) dx$  (D)  $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$

**【解】** 设  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$ , 则  $f(x) = x^2 + 2xl$

两边取  $x \rightarrow 1$  时的极限,得  $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$

(A)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$  与  $f(x)$  的对应关系不同.

(B)  $y = \int_0^1 (x^2 - 2x) dt = x^2 - 2x$

(C)  $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$  与  $f(x)$  对应关系不同.

(D)  $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$ , 定义域  $x < 0$  或  $x > 2$ , 与  $f(x)$  定义域不同,故(B)入选,实际做题时不必像以上那样处理,求出  $f(x)$  的表达式后一眼即可看出(B)入选.

##### 题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

**【解题提示】** 一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号  $f(\quad)$  内的中间变量的表达形式,然后用“无关特性”即可得出  $f(x)$  的表达式.另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”,然后通过联立方程得出  $f(x)$  的表达式.多元函数也可以用这两方法处理.

**【例 1.2】** 求解以下各小题中的  $f(x)$  表达式:

(1)  $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sin(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2, \quad |x| > 1$

(2)  $f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, \quad 0 < x < 1$

注:带 \* 章节,数四考生不必看.

**【解】** (1)  $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} + \sin[(x + \frac{1}{x})^2 - 2] + 2$

故  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2$

(2)  $f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = -2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x}$

故  $f(x) = -2x + \frac{1}{1 - x}, \quad 0 < x < 1$

**【例 1.3】** 设  $f(x)$  满足方程:  $af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x$ , 其中  $|a| \neq |b|$ , 求  $f(x)$ .

**【解】** 令  $t = -\frac{1}{x}$ , 则  $x = -\frac{1}{t}$ , 于是原方程变为  $bf(t) + af(-\frac{1}{t}) = -\sin \frac{1}{t}$

由“无关特性”得  $bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x}$

解联立方程组 
$$\begin{cases} af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x \\ bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases}$$

得  $f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2}(a \sin x + b \sin \frac{1}{x})$

**【例 1.4】** 设  $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$ , 求  $f(x, y)$ .

**【解】** 令  $u = x + y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$ , 则

$$f(u, v) = (\frac{u}{1+v})^2 - (\frac{uv}{1+v})^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2}$$

故  $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2}, \quad (y \neq -1)$

## 二 函数的性质

### 题型 III 函数奇偶性的判别

**【解题提示】** 判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶函数之积为偶函数; 偶数个奇函数之积为偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数).

(2)  $f(x) + f(-x) = 0$  是判别  $f(x)$  为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若函数的定义域关于原点不对称, 则函数就无奇偶性可言.

**【例 1.5】** 判别下列函数的奇偶性:

(1)  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 其中  $f(x)$  为连续的偶函数.

(2)  $F(x) = f(x) + \int_0^x [\int_0^u f(t)dt]du$ , 其中  $f(x)$  是连续函数.

(3)  $F(x) = \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}\right)f(x)$ , 其中  $a > 0, a \neq 1, f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 且对



任何  $x, y$  恒有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

$$\text{【解】} (1) F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u)(-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} - \int_0^x f(u) du$$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0$$

$\therefore F(x)$  为奇函数.

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[ \int_0^u f(t) dt \right] du \quad \text{①}$$

$$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left[ \int_0^u f(t) dt \right] du \quad \text{②}$$

$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数} \quad \therefore f(x) + f(-x) = 0 \quad \text{③}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \therefore \int_0^{-x} \left[ \int_0^u f(t) dt \right] du &\xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x \left[ \int_0^{-v} f(t) dt \right] (-dv) \\ &= - \int_0^x \left[ \int_0^{-u} f(t) dt \right] du \quad \text{④} \end{aligned}$$

由 ①, ②, ③, ④ 得

$$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left[ \int_0^u f(t) dt - \int_0^{-u} f(t) dt \right] du = \int_0^x \left[ \int_{-u}^u f(t) dt \right] du = 0$$

故  $F(x)$  为奇函数.

$$(3) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0$$

$\therefore g(x)$  为奇函数.

$$\text{又} \quad \therefore f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{又} \quad \text{显然有 } 0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$$

$\therefore f(x)$  为奇函数.

故  $F(x) = g(x)f(x)$  为偶函数.

#### 题型 IV 求解给定函数的周期或周期性证明

**【解题提示】** 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明

**【例 1.6】** 设  $f(x)$  是以  $T > 0$  为周期的函数, 证明  $f(ax) (a > 0)$  是以  $\frac{T}{a}$  为周期的函数.

**【证】** 令  $F(x) = f(ax)$ , 由于

$$F(x + \frac{T}{a}) = f[a(x + \frac{T}{a})] = f(ax + T) \xrightarrow[\substack{\text{f(x) 的周期}}]{\because T \text{ 是}} f(ax) = F(x)$$

故  $\frac{T}{a}$  是  $f(ax)$  的周期.

**【例 1.7】** 设函数  $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$  的图形与  $x = a, x = b$  均对称 ( $a \neq b$ ), 求证:  $y = f(x)$  是周期函数, 并求其周期.

**【证】** 由题设有  $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$

$$\begin{aligned} \text{于是, } f(x) &= f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)] \\ &= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)] \end{aligned}$$

故  $f(x)$  是周期函数, 其周期  $T = 2(b-a)$ .

### 题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

**【解题提示】** 若没有言明函数  $f(x)$  可导, 则用单调性定义判别; 若言明函数  $f(x)$  可导, 则利用函数的一阶导数判别.

**【例 1.8】** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x)$  单调增加, 证明  $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$  在  $(a, b)$  内单调增加.

$$\begin{aligned} \text{【证】 } F'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt \\ &= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt \end{aligned}$$

$\because (x-a)^2 > 0$   $f(x)$  单调上升, 当  $x > t$  时,  $f(x) - f(t) \geq 0$

$\therefore F'(x) \geq 0$ , 故  $F(x)$  在  $(a, b)$  内单调增加.

### 题型 VI 函数有界性的判别

**【解题提示】** 证明或判别函数有界性的思路:

- (1) 利用有界性定义.
- (2) 闭区间上连续函数的有界性.
- (3) 有极限数列必有界.
- (4)  $x \rightarrow x_0$  时有极限的函数  $f(x)$  在  $x_0$  的邻域中必有界.

**【例 1.9】** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ( $l$  为有限数), 试证:  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

$$\text{【证】 } \because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \quad \therefore \text{对于取 } \varepsilon = \frac{|l|}{2}, \exists X > 0$$

当  $x > X$  时, 恒有  $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$

又  $|f(x) - l| > |f(x)| - |l|$  所以  $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}$

即  $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|$

$\because f(x)$  在  $[a, X]$  上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知  $\exists S$ , 使  $|f(x)| < S, x \in [a, X]$ .

取  $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\}$ , 则对  $\forall x \in [a, +\infty)$  恒有  $|f(x)| \leq M$

即函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

**【例 1.10】** 试证  $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x t e^{t^2} dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

$$\text{【证】 令 } g(x) = \int_0^x t e^{t^2} dt$$

$$\because g(-x) = \int_0^{-x} t e^{t^2} dt \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x -u e^{(-u)^2} (-du) = \int_0^x u e^{u^2} du$$

$\therefore g(x)$  为偶函数. 因此  $f(x) = e^{-x^2} g(x)$  也为偶函数, 所以只需证明  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界即可.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{x^2}}{2 x e^{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$  对于取  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists X > 0$ , 当  $x \in [X, +\infty)$  时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad 0 < f(x) < 1$$

又  $f(x)$  在  $[0, X]$  上连续, 于是,  $\exists l > 0$ , 使对  $\forall x \in [0, X]$ , 恒有  $0 \leq f(x) \leq l$ , 取  $M = \max\{1, l\}$ , 则  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 有  $0 \leq f(x) \leq M$ . 同理可证  $(-\infty, 0]$  的情形, 故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

### 三 复合函数

**【解题提示】** 将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法:

- (1) 代入法(适用于初等函数的复合);
- (2) 分析法(适用于初等函数与分段函数的复合, 或两分段函数的复合);
- (3) 图示法(适用于两分段函数的复合).

**【例 1.11】** 设  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ , 求  $f[f(x)]$ ,  $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ .

$$\text{【解】} \quad f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}$$

**【例 1.12】** 设  $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n \text{ 次}}$ , 若  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$ .

$$\text{【解】} \quad f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} / \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

比较以上两式可知  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$  (由数学归纳法可证.)

$$\text{于是} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|}$$

**【例 1.13】** 设  $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$ ,  $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $f[\varphi(x)]$ .

**【解】** 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$$

(i) 当  $\varphi(x) < 1$  时

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$$

(ii) 当  $\varphi(x) \geq 1$  时

$$\text{或 } x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$\text{或 } x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2}$$

$$\text{综上所述, 有 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x+2 & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2} - 1 & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

**【例 1.14】** 设  $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ ,  $\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $f[\varphi(x)]$ .

**【解】** 图示法的解题程序:

(1) 画出中间变量  $u = \varphi(x)$  的图象;

(2) 将  $y = f(u)$  的分界点在  $xou$  坐标面上画出(这是若干条平行于  $x$  轴的直线);

(3) 写出  $u$  在不同区间上  $x$  所对应的变化区间;

(4) 将(3)所得结果代入  $y = f(u)$  中便得复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的表达式及相应  $x$  的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|] \quad (*)$$

作出  $u = \varphi(x)$  的图像, 图 1.1 所示, 以及  $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$  的分界点  $u = 0$  ( $x-u$  平面上的  $x$  轴)

当  $x < 0$  时  $u = x, (u < 0)$

当  $x \geq 0$  时  $u = x^2, (u \geq 0)$

将以上所得结果代入(\*)式, 得  $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

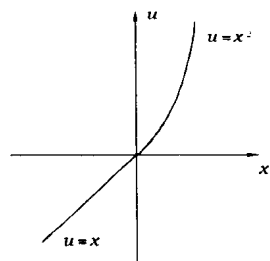


图 1.1

## § 2 极 限

### 一 数列的极限

#### 题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

**【解题提示】** 或者利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序: ① 判断极限的存在性

单调性, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法; ② 先令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 然后通过解关于  $l$  的方程, 求得  $l$  的值, 从而得极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ). 或者利用数列极限的定义求解(先令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 然后在通项的两边

取极限得出  $l$  的数值, 再证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的存在性. 此步通常是利用  $|x_n - l|$  的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

**【例 1.15】** 设  $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**【解】** 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 在  $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$  的两边取  $n \rightarrow \infty$  时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2}$$

$\therefore$  由题设可知  $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2 \therefore l = 1 + \sqrt{2}$

以下证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|x_{n-1} - l|}{lx_{n-1}} \quad (\because x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, \\ l = 2 + \frac{1}{l} > 2) &< \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4} / 4 = \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\ &= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1$

**【例 1.16】** 设  $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1 + x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**【解】** 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 在  $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$  的两边取  $n \rightarrow \infty$  时的极限,

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ 由题设可知 } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

以下证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在:

$$\begin{aligned} |x_n - l| &= \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1+l}\right) \right| \\ &= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1 + x_{n-1})(1 + l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1+l)} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} &= 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0 \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

**【另解】** 由题设可知  $x_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{x_1}{1 + x_1}\right) - 1 = \frac{x_1}{1 + x_1} > 0. \quad \text{于是, } x_2 > x_1$$

设  $x_n > x_{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{则 } x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{x_n}{x_n + 1}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) = \frac{x_n}{1 + x_n} - \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0 \end{aligned}$$

故  $\{x_n\}$  单调增加.

$\because x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} (\because x_{n-1} > 0) < 2 \therefore \{x_n\}$  有界.

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 设其为  $l$ , 于是

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})$ , 即  $l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 由题设可知  $l$  非负.

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【例 1.17】 设  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ , 其中  $a > 0, x_0 > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

【证】  $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \therefore \{x_n\}$  有界

又  $\because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_n^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}) = 1, \therefore \{x_n\}$  单减

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , 则由

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ , 可得  $l = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}) \Rightarrow l = \sqrt{a}$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$

注: 单调数列的极限既可用极限定义法, 又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

## 题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, $n$ 项和的极限

【解题提示】 方法有:

- (1) 特殊级数求和法.
- (2) 利用幂级数求和法.
- (3) 利用定积分定义求极限.
- (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子  $\frac{1}{n}$ , 剩余的可用一个通式表示, 则用定积分定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子  $\frac{1}{n}$ , 而剩余的不能用一个通式表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}} \right)$$

【解】 (1) 因为每一项中提出  $\frac{1}{n}$  后, 剩余各项不能用一个通项表示出来. 因此不能用定积分定义求解.

$$1 < \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \right) = 1$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \leq \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (2^{\frac{1}{n}})^i \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

【例 1.19】 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}}$

【解】  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2+1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$

$$\therefore \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2+1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{又} \therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故} \quad \text{原极限} = \frac{\pi}{4}$$

### 题型 III 求 $n \rightarrow \infty$ 时, $n$ 项乘积的极限

【解题提示】 解法有:

(1) 分子, 分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应;

(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式, 在整个相乘过程中项相消, 从而化简为易求极限形式;

(3) 利用夹逼定理;

(4) 利用对数恒等式化为  $n$  项和的形式.

【例 1.20】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

【解】 (1)  $\because \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{k - 1}{k + 1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$

又  $\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n(n+1)}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} = \frac{n^2+n+1}{3}$

$\therefore$  原极限  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2+n+1}{3} = \frac{2}{3}$

$$(2) \because \begin{cases} 1 \cdot 3 < 2^2 \\ 3 \cdot 5 < 4^2 \\ \dots\dots\dots \\ (2n-1)(2n+1) < (2n)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n)^2 < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ \dots\dots\dots \\ 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{cases}$$

又  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$

故 由夹逼定理, 原极限  $= 0$

(3) 取对数得  $\frac{1}{n} \left[ \ln\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right) \right] = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n}$

两边取  $n \rightarrow \infty$  时的极限, 得

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i^2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln 2 + \frac{\pi-4}{2} \end{aligned}$$

故原极限  $= e^{\ln 2 + (\pi-4)/2} = e^{\ln 2} \cdot e^{(\pi-4)/2} = 2e^{(\pi-4)/2}$

#### 题型 IV 通项为积分形式的数列的极限

【解题提示】 注意: 一般地  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$ , 求解  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$  的方法:

(1) 利用不等式放缩法对  $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$  进行估值, 再用夹逼定理求极限.

(2) 利用积分中值定理求极限.

【例 1.21】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt$$

【解】 (1)  $\because$  在  $[0, 1]$  上,  $x^n \geq 0$ , 且  $\frac{1}{1+x}$  连续

$$\therefore 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1}$$



其中  $0 \leq \xi \leq 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad \text{其中 } \epsilon > 0 \text{ 为任意正数}$$

$$\text{而 } 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx = \sin^n \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} dx = \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \sin^n \xi \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \xi$$

其中  $0 < \xi < \frac{\pi}{2} - \epsilon$ , 由于  $0 < \sin \xi < 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \xi = 0$

$$\text{又 } 0 < \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) = \epsilon, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

$$(3) \because \cos 2t = 1 - \frac{1}{2!}(2t)^2 + o(t^2), \therefore 1 - 2t^2 \leq \cos 2t \leq 1, \text{ 于是}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1-2t^2}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{4t^2} dt$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{2n} \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4} + \frac{n}{4}, \text{ 两边同乘以 } \frac{1}{n}, \text{ 得}$$

$$-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt \leq -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4n} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\cos 2t}{4t^2} dt = \frac{1}{4}$$

### 题型 V 利用子序列的极限与函数的极限等值定理, 求数列极限

**【解题提示】** 将序列中的自然数  $n$  换成连续变量  $x$ , 求出形式相同的函数的极限, 即得数列的极限.

**【例 1.22】** 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\text{【解】 } (1) \because \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{-\frac{1}{2}}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln x} - 1}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln x} (\ln x - 1)}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2} \ln x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^0 = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$$

$$(2) \because \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(x \sin \frac{1}{x} - 1\right)\right]^{x^2}$$