

拓扑学引论

江 泽 涵 著

上海科学技术出版社

拓 扑 学 引 论

江 泽 涵

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷六厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 10.125 字数 235,000

1973 年 1 月第 1 版 1973 年 1 月第 1 次印刷

统一书号: 13119·705 定价: 1.00 元

内 容 提 要

本书共分三编。

第一编独自成一完整体系,讲述第二、三编所需的点集拓扑学知识,以度量空间为起点,引进拓扑空间,着重说明这两种空间理论中各定理之间的关系与差别。

第二、三编分别阐述有限的多面体的同调群和同调论。定义都建立在单纯形概念的基础上;在证明拓扑不变性的同时,也着重于具体计算。为本书还未涉及的拓扑空间的同调论提供了具体背景。

本书可作为拓扑学基础课程的教本,也可供科学技术工作者参考。

序

拓扑学是继欧几里得几何、解析几何、微分几何、射影几何等之后的一种较新的几何学。作为几何学,它仍然是研究图形(或形状)的科学;它之所以较新,因为它研究的是图形在连续变形下的不变的整体性质。迟至本世纪的二十和三十年代,国外才分别出现点集拓扑和代数拓扑的第一个教本。现在,拓扑学已经形成了点集拓扑(或称一般拓扑)、代数拓扑、微分拓扑等分支,已经渗入到并沟通了数学的很多分支,并且通过图形的手段,在其他自然科学和工程技术中有了日益重要的应用。

北京大学数学力学系曾经开设拓扑专门化课程多年,本书就是作为这一课程的部分教本而编写的。1964年出版了第一分册,1965年出版了第二分册,紧接着写成了第三分册,但未付印。今年,在三个月的短促时间里,对原来的三个分册进行了一次修改,把它们合并成现在的这本书,把原来的三个分册改为本书的三编,并增加了一些内容,主要的是第二章的§9(原来的§9改为§10)、第四章的§7、附录B的§5和全书的索引。

作为基础课程的一个教本,内容应精简、直观易懂。在这方面,作者曾作了一些努力。例如在第一编中,从度量空间出发引进拓扑空间,把度量空间的定理全部安排在第一章中,尽可能说明一些定理能否推广成第二章拓扑空间的定理以及能否推广的理由;第二章中用§4、§5和§7三节讨论三种特殊的拓扑空间。又例如在第二、三编中始终只讲有限的多面体的同调群和同调论,着重在单纯形的基础上引进同调群、上同调环等概念和一些具体计算。总之,全书着重于度量空间和有限多面体这两种特殊的几何对象,

为更一般的几何对象提供背景.

作者感到本书有下述不足,有待于今后补充. 第一,仍不够直观;例如,闭曲面的拓扑分类未提,一维拓扑学(即图论)和三维流形的例子太少. 第二,同伦论内容太少;例如,基本群都未提及^①. 至于本书还不够现代化,一方面是因为篇幅所限,另一方面是因为未作足够的努力.

本书的出版只是抛砖引玉,衷心盼望国内将出版更多更好的、自编和翻译的这类教本,以发展我国的数学事业、适应科学技术现代化的需要.

本书的前身是作者在北京大学教课用的讲义. 根据岳景中、熊金城、姜伯驹、祝尔家、尤承业等同志在试用这讲义时发现的问题,曾经作了不少修改. 此次新版的第一章前三节的纲要和第二章末二节是由姜伯驹同志起草的,第四章末一节是由尤承业同志起草的,索引是丁正良同志编的. 历届听课的同学也帮同消灭了一些不妥的或费解的词句. 校内外多位同志曾热心地指出第一、二分册初版中的一些笔误和排印错误,使作者能在此新版中改正. 作者对他们致以衷心的感谢. 作者特别感谢很多位同志的热诚关心和大力支持,使此新版得以印行.

最后,说明本书中采用的记号. 记号“**■**”表示证明完毕,或证明显然,或此处不给出证明. “定理 1.10”表示同一章中的 1.10 定理,而“定理 III. 1.10”或“定理 B. 1.10”则分别表示第三章或附录 B 中的 1.10 定理.

江 泽 涵

1977 年 10 月 25 日

^① 关于这里提到的有待补充的几项,或可参看作者的译本《拓扑学》(高等教育出版社,1959)中的第六、第九章和即将出版的专著《不动点类理论》(科学出版社)中的附录 A.

目 录

第一编 点集拓扑学

第一章 度量空间	1
1. 度量空间·球形邻域	1
2. 四个基本概念: 开集、闭集、闭包、收敛序列	6
3. 连续映射·拓扑映射	11
4. 列紧性及其第一个特征(序列式列紧性)	16
5. 列紧性的第二个特征(紧致性)·列紧度量空间上的映射	21
第二章 拓扑空间	25
1. 拓扑空间·拓扑基	25
2. 拓扑空间的基本概念与性质	30
3. 可数性公理·分离性公理	34
4. 公理 A_1 与 T_1 的意义: 子集的聚点与收敛序列的极限点	38
5. 公理 A_2 与 T_1 的意义: 紧致性与三种列紧性	42
6. 正则空间·正规空间·度量化定理	48
7. 紧致 Hausdorff 空间	55
8. 连通性	58
9. 映射的扩张与收缩核概念	65
10. 映射的同伦·拓扑空间的伦型	71

第二编 多面体的同调群

第三章 单纯复合形及其同调群	79
1. 单纯复合形·多面体	79
2. 同调群	96
3. 复形的连通分支·零维同调群的结构	103

4. 几个简单的复形的同调群·假流形	106
5. 整同调群的结构·Euler-Poincaré 公式	116
6. 用关联矩阵计算整同调群·典型基	121
第四章 同调群的不变性·映射的同调性质	130
1. 引言·链映射与链同伦	130
2. 单纯映射	136
3. 重心重分	141
4. 同调群的重分不变性	150
5. 单纯逼近·同调群的拓扑不变性	155
6. 映射的同调性质·同调群的伦型不变性·Brouwer 不动点定理	163
7. Lefschetz 不动点定理	169

第三编 多面体的同调论

第五章 同调序列·流形的对偶定理	177
1. 同态群	177
2. 上同调群	183
3. 相对同调群·切除定理	198
4. 同调序列	205
5. 增广复形·切除定理与同调序列的应用	213
6. 块形剖分	220
7. 闭组合流形及其对偶定理	231
第六章 上同调环·流形的交环	239
1. 环	239
2. 上积·上同调环	241
3. 卡积	250
4. 闭组合流形的交环	254
附录 A 线性的欧几里得空间	264
1. 线性空间	264
2. 线性的欧几里得空间·超平面	266
3. 最广点组	270

附录 B 交换群	274
1. 一般概念	274
2. 直和·秩	280
3. 有限维的自由群	287
4. 有限生成的群	296
5. 自由群的自同态的迹数	299

第一章 度量空間

度量空間是 n 維歐几里得空間 E^n 的极为接近、极为自然的推广,而且从它又可以很自然地过渡到更广的、更抽象的、但有必要加以研究的拓扑空間. 另一方面,它的范围已够广泛,包括了在数学中遇到的一些函数空間、Hilbert 空間等;因而度量空間的理論已成为学习近代数学所不可缺少的知識.

本章将介紹度量空間的一些基本概念与性质,以及从度量空間到度量空間的連續映射的一些基本概念与性质. 理解它們的最好途徑,是用歐几里得空間 E^n 的相应概念与性质作为模型. 至于它們的安排与証明,則将受到下一章中拓扑空間的討論的影响.

1. 度量空間·球形邻域

至多三維的歐几里得空間 E^n , $n \leq 3$, 是我們从直观以及解析几何課程所知道的空間. 設 x 与 y 是它的两点, 分別以 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为坐标;这两点之間的距离是

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

当 $n > 3$ 时, 已經无直观的 E^n ; 但我們把 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 叫作点 x : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 而且把 $d(x, y)$ 作为点 x 与点 y 之間的距离, 于是得到 n 維的歐几里得空間 E^n , $n > 3$. 为簡便起見, 对于任意正整数 n , 我們都把点 x 与 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 看作是等同的.

用 R^n 表示 E^n 的点的集合. R^1 当然就是实数集合. 这里我

們严格地用集合这概念; 即 R^n 的元素或点完全确定了, 但点与点之間未确定任何关系, 特別未确定距离关系 d . 集合 R^n 加上距离关系 d 才是我們的 n 維欧几里得空間 E^n ; 在这意义下, 我們說 d 賦予集合 R^n 一个“空間結構”.

从 R^n 到 R^1 的一个对应 $f: R^n \rightarrow R^1$ 就是 n 个实变数的一个实值函数 $f(x)$. (只限于单值对应与单值函数.) 但當我們說函数 $f(x)$ 連續时, 我們就用了距离 d 的概念; 所指的实际是对应 $f: E^n \rightarrow E^1$. 所以函数 $f(x)$ 的連續性所需要的, 不仅有集合概念, 还有空間結構的概念.

本节的目的是用 E^n 作背景来引进度量空間.

1.1 定义 設 S 是一个集合, 其元素叫作点, 記作 x, y, z 等, 而且 $\rho: S \times S \rightarrow R^1$ 是满足下列三条公理的一个非負实函数^{*)}:

$$1^\circ \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$2^\circ \quad \text{对称性: } \rho(y, x) = \rho(x, y);$$

$$3^\circ \quad \text{三角形不等式: } \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

点集 S 与函数 ρ 在一起, 叫作一个度量空間, 記作 (S, ρ) . S 的点或子集仍分別叫作 (S, ρ) 的点或子集, 函数 ρ 叫作 (S, ρ) 的距离函数或度量, $\rho(x, y)$ 叫作点 x 与 y 之間的距离.

例 1.1 n 維的欧几里得空間 $E^n = (R^n, d)$ 是一个度量空間. 距离函数 $d(x, y)$ 显然满足前两条度量公理. 它也滿足第三条公理: 对于任意正整数 n , $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; 証明见例 A2.2.

例 1.2 用例 1.1 中的 R^n 作为集合 S , 在 S 上定义非負实函数

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

或

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

^{*)} $S \times S$ 表示集合 $\{(x, y) | x, y \in S\}$.

可以验证 d_k 满足度量公理, 故 (R^n, d_k) 是度量空间, $k=1$ 或 2 . (复习题.)^{*}

建议读者对于 $n=2, 3$ 作出 $d_k(x, 0)=1$ 的图形, 并补出这里未给出的证明, 作为复习时的思考题.

例 1.3 Hilbert 空间 E^ω 从 n 维的欧几里得空间 E^n 中三角形不等式, 我们知道, 对于 E^n 的三个点 $(x_1, x_2, \dots, x_n), (0, 0, \dots, 0), (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 有

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

既然对于任意正整数 n 这不等式成立, 经过取极限 (当 n 无限增大), 有下列结论: 如果序列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 使级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ 收敛, 则序列 $\{x_n - y_n\}$ 也使级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2$ 收敛 (只限于无穷序列).

现在定义 Hilbert 空间 E^ω 如下. 它的点 x 是使得级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 收敛的实数序列 $x = \{x_n\}$. 它的两点 x 与 y 之间的距离是

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}};$$

它是一个确定的实数, 正是上文所说的. 距离函数 ρ 显然满足前两条度量公理. 因为

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

再经过取极限, 就证明了 ρ 也满足第三条度量公理.

空间 E^ω 的子集

$$\{x = \{x_n\} \mid 0 \leq x_n \leq 1/n\}$$

叫作 Hilbert 空间的基本方体.

例 1.4 一些函数空间. 在分析数学中时常遇到以某类函数为元素的集合 S ; 而为了便于处理所考虑的问题, 又必须在 S 中引进度量 ρ , 使 (S, ρ) 形成度量空间.

a. 在讨论函数的逼近或一致收敛时, 集合 S 的元素是闭区间 $a \leq t \leq b$ 上的连续函数. 两个元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 只当 $|x(t) - y(t)|$ 在整个区间上都很小, 才认为很邻近; 明确地说, 即引进的度量是

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

^{*} 此后, 一个命题之后出现“(复习题.)”时, 都是建议读者补出这命题的证明.

b. 在变分法与微分方程的稳定理论等中, 集合 S 的元素是闭区间 $a \leq t \leq b$ 上的可微 k 次的函数. 二元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的邻近, 不仅要求 $|x(t) - y(t)|$ 很小, 而且要求 $|x'(t) - y'(t)|$, $|x''(t) - y''(t)|$, $\dots$, $|x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|$ 都很小, 对于任意 t . 这时候引进的度量是

$$\rho(x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^k \max_{a \leq t \leq b} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|,$$

$$\text{或} \quad = \max_{a \leq t \leq b} \{|x(t) - y(t)|, |x'(t) - y'(t)|, \dots, |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|\},$$

参看例 1.2.

c. 在积分方程论中, 集合 S 同例 1.4a, 但引进的度量是

$$\rho(x(t), y(t)) = \left[\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

可以验证, 这些函数 ρ 都满足度量公理. (复习题.)

例 1.5 设 S 是任一集合, 其元素记作 x, y 等, 定义 $\rho(x, x) = 0$, 而 $\rho(x, y) = 1$ 当 $x \neq y$. 这里的 (S, ρ) 是一个度量空间, 叫作离散的度量空间.

例 1.6 设 (S, ρ) 是任意的一个度量空间. 定义

$$\rho_1(x, y) = \rho(x, y) / \{1 + \rho(x, y)\},$$

或

$$\rho_2(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{当 } \rho(x, y) \leq 1, \\ 1, & \text{当 } \rho(x, y) > 1. \end{cases}$$

这里的 ρ_1 与 ρ_2 都满足度量公理. (复习题.)

设 (S, ρ) 是一个度量空间, 而且 A 是 S 的一个子集. 用记号 $\rho|A \times A: A \times A \rightarrow R^1$ 表示 ρ 限制在 $A \times A$ 上; 它显然满足三条度量公理, 所以 $(A, \rho|A \times A)$ 还是一个度量空间, 叫作 (S, ρ) 的一个子空间, 简记为 (A, ρ) , 或甚至于记为 A . 凡遇到 $A \subset S$, 而说 A 是 (S, ρ) 的子空间时, 所指的就是 $(A, \rho|A \times A)$.

度量空间的子空间还是度量空间. 欧几里得空间的子空间是度量空间, 但不一定是欧几里得空间.

要想从已知的度量空间作出新度量空间, 除去作子空间外, 还可作积空间. 设 (S_1, ρ_1) 与 (S_2, ρ_2) 是两个度量空间. 命

$$S = S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\},$$

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

容易验证 (S, ρ) 是一个度量空间; 叫作 (S_1, ρ_1) 与 (S_2, ρ_2) 的积空间, 记作 $(S_1, \rho_1) \times (S_2, \rho_2)$. 例如 $E^n = E^1 \times E^{n-1} = (E^1)^n$, $n > 1$.

积空间 $(S, \rho)^n$ 中的函数可以看作是 n 元函数.

欧几里得空间的点是用实数来作坐标的. 实数虽然不能用来刻划一般的度量空间的点, 但能用来刻划度量空间的两点的远近.

1.2 定义 设 a 是度量空间 $X = (S, \rho)$ 的任一点, ε 是任一正数. X 中的、满足不等式 $\rho(x, a) < \varepsilon$ 的点 x 的集合, 叫作点 a 的、在 X 中的一个球形邻域, 记作 $U(a, \varepsilon)$.

在不会引起混淆时, 只说 $U(a, \varepsilon)$ 是 a 的一个球形邻域, 而省略不提“在 (S, ρ) 中的”.

建议读者在平面与空间 (即 $n=2, 3$) 的直角坐标系中, 作出例 1.2 的单位球形邻域的图.

1.3 定理 度量空间 $X = (S, \rho)$ 的点与它们的球形邻域具有下列二性质:

- 1° 每一点 x 都有球形邻域, 点 x 的每一球形邻域都包含 x ;
- 2° 如果点 x 属于两个球形邻域 $U(x_i, \varepsilon_i)$ 的交集, $i=1, 2$, 则 x 有一球形邻域 $U(x, \varepsilon) \subset$ 这交集.

证 明 性质 1° 是明显的. 要证性质 2°, 只要取 $\varepsilon \leq \varepsilon_i - \rho(x, x_i)$, $i=1, 2$. 事实上, 设 y 是 $U(x, \varepsilon)$ 的任一点. 然后

$$\rho(x, y) < \varepsilon \leq \varepsilon_i - \rho(x, x_i),$$

即有 $\rho(x_i, y) < \varepsilon_i$; 因而 $y \in U(x_i, \varepsilon_i)$. **】**

在性质 2° 的陈述与证明中, 并未排斥 $x_1 = x_2$, 或 $x_1 = x_2$ 而且 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

习 題

1. 試証: Hilbert 空間 E^ω 的任二点 x 与 y 有一“中点” z , 即点 z 使得

$$\rho(x, z) = \rho(y, z) = \frac{1}{2} \rho(x, y).$$

但度量空間不必有此性质; 試用欧几里得平面 E^2 的一个子空間为例說明.

2. 試証: 度量空間中任意一个三角形的两边的长度之差不大于第三边的长度.

3. 設 S 是一个集合, 而且 $\{A_\alpha\}$ 是 S 的一族子集, 这里的下标 α 所取的值的个数可以是有限或无穷. 試証 de Morgan 公式:

$$S - \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (S - A_{\alpha}),$$

$$S - \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S - A_{\alpha}).$$

4. 設 $f: S \rightarrow T$ 是从集合 S 到集合 T 的单值对应. 試証: 对于 T 的任一子集 B ,

$$ff^{-1}(B) \subset B,$$

$$f^{-1}(T - B) = S - f^{-1}(B).$$

2. 四个基本概念: 开集、閉集、閉包、收斂序列

本节从球形邻域出发, 介紹度量空間的一些重要的子集.

2.1 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集. 如果 A 的每一点都有一个球形邻域 $\subset A$, 則 A 叫作 X 的**开集**.

如果 A 的一点 a 有一个球形邻域 $\subset A$, 則点 a 叫作 A 的、在 X 中的一个**內点**. A 的、在 X 中的內点的全体, 叫作 A 的、在 X 中的**內部**, 記作 $\text{Int } A$.

在不会引起混淆时, 例如在 X 已經給定时, 我們也把 X 的开

集”, “在 X 中的一个内点”, “在 X 中的内部”等句子中的 “ X 的” 或 “在 X 中的” 省略不提.

从定义立刻知道

2.1.1 命题 A 是开集 $\Leftrightarrow A$ 是若干球形邻域的并集. (复习题.)

2.1.2 命题 $\text{Int } A$ 是开集.

定义 1.2 与 2.1 中的球形邻域都是指以正实数为半径的球形邻域. 如果只限于用以正有理数为半径的球形邻域, 则得到开集的一个新定义. 设 $A \subset X$. 容易验证:

2.1.3 命题 A 根据定义 2.1 是 X 的开集 $\Leftrightarrow A$ 根据新定义是 X 的开集. (复习题.)

2.2 定义 度量空间 X 的一个子集 A 叫作 X 的闭集, 如果 A 在 X 中的余集 $X - A$ 是 X 的开集.

例 2.1 如果把集合 $A = \{x | 0 < x < 1\}$ 看作是直线 E^1 的子集, 则 A 是 E^1 的开集. 如果把 A 看作是平面 E^2 的子集, 则 A 既不是 E^2 的开集, 又不是 E^2 的闭集.

2.3 定理 度量空间 X 的开集具有下列三性质:

- 1° X 与空集 $\emptyset$ 是开集;
- 2° 两个开集的交集是开集;
- 3° 任意多个开集的并集是开集.

证明 性质 1° 与 3° 是明显的. 现在证明性质 2°.

如果两个开集 A 与 B 的交集 $A \cap B$ 是空集, 则从性质 1°, 它是开集. 如果 $A \cap B$ 非空集, 设点 x 是它的任一点. 因为 A 与 B 都是开集, 点 x 是它们的内点; 从定义 2.1, x 有一邻域^{*)} $U(x, \varepsilon_1) \subset A$, 一邻域 $U(x, \varepsilon_2) \subset B$; 因而 $U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2) = A \cap B$. 从定理 1.3 中的 2°, x 有一邻域 $U(x, \varepsilon) \subset U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2)$

^{*)} 本章中出现的“邻域”都是球形邻域的简称.

$\subset A \cap B$. [实际上, 如果取 $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, 則 $U(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon_1) \cap U(x, \varepsilon_2)$.] 再从定义 2.1, x 是 $A \cap B$ 的内点; 因为 x 是 $A \cap B$ 的任一点, 所以 $A \cap B$ 是开集. **】**

2.4 定理 度量空間 X 的閉集具有下列三性质:

- 1° X 与空集 $\emptyset$ 是閉集;
- 2° 两个閉集的并集是閉集;
- 3° 任意多个閉集的交集是閉集.

証 明 由于 de Morgan 公式 (§1 中习题 3), 本定理与定理 2.3 二者中之一是另一个的直接推論. **】**

例 2.2 有限子集是閉集; 特別地, 独点集(单独一点所成的集合)是閉集. 直綫 E^1 的开集 $A = \{x | 0 < x < 1\}$ 是无穷多个閉集的并集. 試举例說明: 无穷多个开集的交集不必是开集.

在数学分析中, 极限概念是連續性概念的基础. 現在要把它推广到度量空間.

2.5 定义 設 A 是度量空間 X 的一个子集, 而且点 $x \in X$. 如果 x 的、在 X 中的每一球形邻域都包含 $A - \{x\}$ 的一个点*), 則 x 叫作 A 的、在 X 中的一个**聚点**. A 与它的、在 X 中的全体聚点的并集, 叫作 A 的、在 X 中的**閉包**, 記作 $\bar{A}$. 如果 $\bar{A} = X$, 則把 A 叫作 X 的**稠密子集**.

例 2.3 設 $X = E^1$. 如果 $A = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, 則点 $x = \frac{1}{n} \in A$, 但非 A 的聚点, 点 $x = 0 \in A$ 而是 A 的聚点. 如果 $A = \{x | 0 \leq x < 1\}$, 点 $x = 0$ 与 $x = 1$ 都是 A 的聚点, 但前者 $\in A$, 后者 $\notin A$. 如果 A 是 E^1 的有理点的集合, 則 E^1 的每一点都是 A 的聚点, 而且 $\bar{A} = E^1$.

从定义 2.5 容易驗證:

2.5.1 命題 X 的有限子集无聚点;

*) 如果 $x \in A$, 則 $A - \{x\}$ 就是 A .

2.5.2 命题 如果 X 的无穷子集 A 的每二点的距离都大于一个固定的正数, 则 A 无聚点;

2.5.3 命题 对于任意 $A \subset X$, $\bar{A}$ 是闭集;

2.5.4 命题 A 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{A} = A$. (复习题.)

2.6 定理 度量空间的子集与它们的闭包具有下列四个性质:

1° $\bar{\emptyset} = \emptyset$;

2° $A \subset \bar{A}$;

3° $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$;

4° $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

证明 从定义 2.5 立刻有性质 1° 与 2°.

现在证明性质 3°: $\bar{A}$ 的任一点 x 必 $\in \bar{A}$. 从定义 2.5, $x \in \bar{A} \Rightarrow x$ 的每一邻域 $U(x)$ 包含 A 的一点 y ; $y \in \bar{A} \Rightarrow y$ 的每一邻域 $W(y)$ 包含 A 的一点. 从定理 1.3 中的性质 2°, 可取 $W(y) \subset U(x)$; 然后知 x 的每一邻域 $U(x)$ 包含 A 的一点. 再从定义 2.5, 这就 $\Rightarrow x \in \bar{A}$.

性质 4° 的一部分: $\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$, 是下面事实的明显推论: $A \cup B \supset A \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \bar{A}$. 所以剩下要证明的是性质 4° 的另一部分: $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$, 即 $\overline{A \cup B}$ 的任一点 x 如果 $\notin \bar{A}$, 则 $\in \bar{B}$.

我们用反证法来证明这一部分. 设在 $x \in \bar{A}$ 的情形下, 同时还有 $x \notin \bar{B}$. 从定义 2.5, x 有一邻域 $U(x)$ 不包含 B 的点, 与一邻域 $V(x)$ 不包含 B 的点; 从定理 1.3 中的性质 2°, x 有一邻域 $W(x) \subset U(x) \cap V(x)$, 因而不包含 $A \cup B$ 的点; 这与 $x \in \overline{A \cup B}$ 矛盾. **】**

注意, 性质 2° 与 3° $\Rightarrow \bar{A} = \bar{\bar{A}}$.