自学考试指导教材

高等数学（二）
——线性代数与概率统计

（计算机信息管理专业本科段）

单位

大学计算机科学系

上海第一电子信息应用教育中心

华东师范大学理工学院

上海电子信息应用教育中心

复旦大学出版社

自学考试指导教材

高 等 数 学（二）

——线性代数与概率统计

（计算机信息管理专业本科段）

主 编 单 位

复 旦 大 学 计 算 机 科 学 系

上海第一电子信息应用教育中心

华 东 师 范 大 学 理 工 学 院

上 海 电 子 信 息 应 用 教 育 中 心

复 旦 大 学 出 版 社

内 容 提 要

《高等数学(二)——线性代数与概率统计》是全国高等教育自学考试管理工程类专业各门课程中难度较高的一门课程，它实际上是线性代数、概率论基础和数理统计初步的三合一课程. 本书的主要内容有：行列式与矩阵，线性方程组，特征值与二次型，概率与随机变量分布，参数估计与假设检验，回归分析和预测. 为了便于考生复习迎考，本书特别编写了《总复习》这一部分内容，对全书内容作前后呼应、融会贯通的综合介绍，使学生对全书内容有居高临下的全面了解. 在附录中用极少篇幅介绍了本课程中所需的微积分学内容. 本书可当作计算机信息管理专业的教材使用，也可作为其他有关专业的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)：线性代数与概率统计/徐诚浩编著. —上海：复旦大学出版社，2000.1
自学考试指导教材
ISBN 7-309-02406-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 徐… Ⅲ. ①线性代数-高等教育-自学考试-教材②数理统计-高等教育-自学考试-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 66371 号

出版发行　复旦大学出版社
上海市国权路 579 号　200433
86-21-65102941(发行部)　86-21-65642892(编辑部)
fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
经销　新华书店上海发行所
印刷　上海第二教育学院印刷厂
开本　787×1092　1/16
印张　21
字数　524 千
版次　2000 年 1 月第一版　2000 年 1 月第一次印刷
印数　1—5 000
定价　26.00 元

如有印装质量问题，请向复旦大学出版社发行部调换。

《自学考试指导教材》

编 委 会

本册编者 徐诚浩

前　言

全国高等教育自学考试课程《高等数学(二)》是管理工程类专业的自学考试诸课程中难度较高的一门课程，不少学生对此望而生畏，畏而却步，致使在历次考试中，这门课程的实考率和合格率都相对较低，教师教得吃力，学生学得艰难. 究其原因主要是教材量大、概念抽象、公式繁多，再加上指定教材中有一些错误和不当之处，均给这门课程的教学带来很大困难. 编者深感迫切需要尽早编写一本指导性教材，以减少教学困难，指导学生如何学好指定教材，使这门课程的内容为更多的学生所掌握.

本书是严格按照国家自学考试委员会颁布的《高等数学(二)自学考试大纲》的要求，经过编者多年讲授这门课程的教学实践，在多次修改讲稿的基础上编写而成的. 这不是一本题解集，而是从基本定义开始叙述的，自成完整系统的指导性教材. 其主要特点如下：

一、全书始终贯彻由浅入深，由易到难，从具体到抽象，从特殊到一般的编写原则，并及时用实例化解难点. 逻辑推理严密，计算方法简洁，概念叙述直观，尽量使读者感到入门并不难，因而增加他们学下去的信心. 只要循序渐进，坚持不懈，多做练习，及时消化，学好这门课程并非难事.

二、本书中的大量例题精选于历次考题和指定教材中的典型习题，并力求证明和计算简洁无误.

三、与指定教材相比，基本内容相同，但本教材的叙述篇幅大大减少. 为了便于教学，在某些内容的叙述上作了较大改动，使证明更

简单直观，易于接受.

四、针对指定教材内容广，结论多，公式繁等困难所在，我们特别列入《总复习》这一部分内容，把全书有关内容前后呼应，融会贯通，使学生对教材有一个全面系统的了解，并供学生在复习迎考时作贯串、综合和记忆之用. 根据教学实践，考生对此颇为欢迎.

五、鉴于自学考生的特殊性，有不少人对微积分内容，或者没有学过，或者虽曾学过但早已淡忘，这给学生学习本课程的部分内容带来无可奈何的困难. 若重修微积分学，既不可能，也无必要. 为此，我们在本书末加一简短附录，把本课程所需的有关微积分学内容，以极少的篇幅予以介绍. 这无疑有利于本课程的教学.

六、为了不增加不必要的篇幅，本教材中没有给出章末习题. 读者可用指定教材中的习题做些练习. 不过，一些重要习题已取作本书中的例题了.

本书在佘志海先生的全力支持和关心下才得以出版，了却编者多年来的一个心愿. 秦金妹为本书的出版付出了辛勤的劳动. 在此表示衷心感谢. 张林德、徐海敏参加了本书的部分编写工作，由编者执笔并作最后审定. 限于编者水平，难免有处理不当、甚至错误之处，恳请同行与读者批评指正.

徐诚浩

1999 年 7 月

目　录

第一部分　线性代数…………………………………………………… 1
第一章　行列式…………………………………………………… 1
§1　行列式的定义 …………………………………………… 1
§2　行列式的性质 …………………………………………… 5
§3　行列式计算 ……………………………………………… 9
§4　克莱姆(Cramer)法则 ………………………………… 14
第二章　矩阵 ……………………………………………………… 19
§1　各类矩阵的定义………………………………………… 19
§2　矩阵运算………………………………………………… 20
§3　方阵的逆阵……………………………………………… 31
§4　分块矩阵………………………………………………… 35
§5　初等变换与初等方阵…………………………………… 43
第三章　线性方程组 ……………………………………………… 51
§1　n 维向量空间 …………………………………………… 51
§2　线性相关与线性无关…………………………………… 51
§3　向量组的秩……………………………………………… 62
§4　矩阵的秩………………………………………………… 66
§5　线性方程组的解法和解的结构………………………… 74
第四章　标准正交基和正交阵 …………………………………… 86
§1　向量内积………………………………………………… 86
§2　向量空间的标准正交基………………………………… 88
§3　正交阵…………………………………………………… 92
第五章　特征值理论与二次型 …………………………………… 94
§1　特征值与特征向量……………………………………… 94
§2　对称阵 …………………………………………………… 104
§3　约当(Jordan)标准型 …………………………………… 108
§4　二次型 …………………………………………………… 109

第二部分　概率统计……………………………………………… 125
第六章　描述统计学……………………………………………… 125
§1　数据收集和分类 ………………………………………… 125
§2　数据分布及其表示 ……………………………………… 126
§3　位置特征数 ……………………………………………… 126

§4 变异特征数 …… 131
第七章 概率的基本概念…… 134
§1 事件及其运算 …… 134
§2 古典概型 …… 137
§3 概率的基本性质 …… 139
§4 条件概率 …… 141
第八章 随机变量与概率分布…… 153
§1 随机变量及其分布函数 …… 153
§2 离散型随机变量 …… 154
§3 连续型随机变量 …… 159
§4 随机变量的数字特征 …… 166
§5 二维随机向量 …… 178
第九章 随机抽样和抽样分布…… 190
§1 随机抽样 …… 190
§2 大数定律和中心极限定理 …… 191
§3 抽样分布 …… 196
第十章 参数估计…… 201
§1 参数的点估计 …… 203
§2 参数的区间估计 …… 216
第十一章 假设检验…… 230
§1 假设检验的问题和检验程序 …… 230
§2 单个正态总体的假设检验 …… 232
§3 两个独立正态总体的假设检验 …… 238
§4 概率的假设检验 …… 243
§5 假设检验的两类错误 …… 245
§6 分布函数的拟合度检验 …… 247
第十二章 工序质量控制和抽样检验…… 256
§1 工序质量控制 …… 256
§2 计数抽样检验 …… 259
第十三章 回归分析与相关分析…… 261
§1 一元线性回归 …… 261
§2 方差分析与相关分析 …… 272
§3 一元非线性回归分析 …… 275
第十四章 经济预测与决策…… 278
§1 时序预测 …… 278
§2 风险型决策 …… 283

第三部分 总复习…… 289
I 行列式与矩阵…… 289

Ⅱ 线性方程组………………………………………………………………………… 293
Ⅲ 特征值理论与二次型………………………………………………………………… 297
Ⅳ 概率与随机变量分布………………………………………………………………… 301
Ⅴ 参数估计与假设检验………………………………………………………………… 309
Ⅵ 回归分析和预测……………………………………………………………………… 316
附录 微积分学简介……………………………………………………………………… 320
§1 函数与极限 ……………………………………………………………………… 320
§2 导数 ……………………………………………………………………………… 321
§3 积分 ……………………………………………………………………………… 323

第一部分 线 性 代 数

第一章 行 列 式

§1 行列式的定义

各阶行列式都是一个数,不过它有其独特的表示方法.

一阶行列式 $D_1 = |a| = a$

二阶行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1.1}$$

由这个定义可以看出:三阶行列式是 $3! = 6$ 项代数和,每一项都是 3 个数的乘积,它们取之于 D_3 中不同的行和不同的列. 反之,任意取之于 D_3 中不同的行和不同的列的三个数的乘积必为 D_3 的展开式(1.1)中的某一项. 每项前面的正负号的确定法则可以用图示法(见图 1.1)说明之:

项前取+号　　　　项前取一号

图 1.1

例 1

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5$$

或

$$D_3 = 2(-3)3 + 5(-5) - 6(-3) - 2(-5)2 = -5$$

例 2 $\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ * & b & 0 \\ * & * & c \end{vmatrix} = abc$

$$\begin{vmatrix} * & * & a \\ * & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & * \\ c & * & * \end{vmatrix} = -abc$$

以后我们总是用 * 表示可以任意取值的元素.

为了把三阶行列式的这个定义推广到 n 阶行列式，我们把(1.1)式改写成另一种形式.在 D_3 中记

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{i1} = (-1)^{i+1}M_{i1} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

则有

$$D_3 = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1} \tag{1.2}$$

现在很容易把(1.2)式推广成 n 阶行列式的递归定义：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} \tag{1.3}$$

其中

$$A_{i1} = (-1)^{i+1}M_{i1} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

M_{i1}是 D_n 中划去第 i 行和第 1 列元素后，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置所成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{i1}在 D_n 中的余子式. 称 A_{i1}为 a_{i1}在 D_n 中的代数余子式. 因此，一个 n 阶行列式计算归之于 n 个 $n-1$ 阶行列式计算.

通常把上述 n 阶行列式 D_n 简记为$|a_{ij}|_n$.

定理 1 n 阶行列式 D_n 是 $n!$ 项的代数和，每一项都是 n 个数的乘积，它们取之于 D_n 中不同的行和不同的列. 反之，任意取之于 D_n 中不同行和不同列的 n 个数的乘积都是 D_n 展开式(1.3)中的某一项.

证 对 2 阶行列式 D_2，结论显然成立. 设对 $n-1$ 阶行列式，结论成立，现考虑 n 阶行列式 D_n 的展开式(1.3). 根据归纳假设，每个 M_{i1}都是 $(n-1)!$ 项的代数和，每一项取之于 M_{i1} 中不同的行和不同的列，所以，D_n 是 $n(n-1)! = n!$ 项的代数和. 因为与 A_{i1}相乘的是 a_{i1}，它是 D_n 中第 i 行、第 1 列元素，所以，由 M_{i1}的定义知 D_n 展开式(1.3)中每一项都取之于 D_n 中不同的行与不同的列. 进一步，取之于 D_n中不同行和不同列的 n 个数之积的总个数恰为

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

所以结论对 n 阶行列式也成立. 证毕

剩下的问题是如何确定 D_n 的展开式(1.3)中每一项前面的正负号？为此，可借用 n 阶排列的奇偶性. n 阶排列的一般形式是

$$j_1 j_2 \cdots j_n$$

它是 n 个数 1，2，…，n 的任一不重复排列. n 阶排列的总个数为 $n!$. 如果 j_k 在 j_l 的前面而 $j_k > j_l$，则称 j_k 与 j_l 构成一个*逆序*. $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序总个数记为

$$\mathrm{N}(j_1j_2\cdots j_n)$$

n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是*偶排列*$\Leftrightarrow \mathrm{N}(j_1j_2\cdots j_n)$为偶数，$n$ 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 是*奇排列*$\Leftrightarrow \mathrm{N}(j_1j_2\cdots j_n)$为奇数.

例如，3 阶偶排列为 123，231，312；

3 阶奇排列为 321，132，213.

当 $n \geqslant 2$ 时，n 阶奇排列和 n 阶偶排列个数各为$\frac{1}{2}n!$.

现在可以给出 n 阶行列式的如下等价定义：

$$D_n = |a_{ij}|_n = \sum_{n!}(-1)^{\mathrm{N}(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

这里，行标按自然顺序排列，而列标对应 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$. $\sum\limits_{n!}$ 表示对 $n!$ 个 n 阶排列求和，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$前面取＋号当且仅当 $\mathrm{N}(j_1j_2\cdots j_n)$为偶数.

例如，因为

$$\mathrm{N}(43521) = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$$

为偶数，所以在 5 阶行列式 D_5 中

$$a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51}$$

前面取＋号.

根据这个定义，我们立刻得到下述特殊行列式的求值公式.

例 3
$$\begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ & a_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ * & a_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \tag{1.5}$$

分别称为*上三角行列式*和*下三角行列式*. 这里，凡空白处都表示元素值为零，$*$ 表示可任意取值的元素. (1.5)式成立的根据是 $\mathrm{N}(12\cdots n) = 0$ 为偶数.

例 4
$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & * \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ a_{n-1} & & \cdots & * \\ a_n & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & * & \cdots & * & a_1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_2 & \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ * & a_{n-1} & & & \\ a_n & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i \tag{1.6}$$

(1.6)式成立的根据是

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

下表给出了(1.6)式乘积前正负号的一般规律.

n	2	3	4	5	6	7	…	$4m$	$4m+1$	$4m+2$	$4m+3$
$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$	-1	-1	1	1	-1	-1	…	1	1	-1	-1

n 阶行列式 D_n 的展开式(1.3)是把 D_n 按其第 1 列展开而成的.实际上,行列式可按其任一行或按其任一列展开求值.例如,不难由(1.1)式可直接验证对三阶行列式 D_3 有以下六个展开式:

$$\begin{aligned} D_3 &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (1 \leqslant i \leqslant 3) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (1 \leqslant j \leqslant 3) \end{aligned}$$

分别是按第 i 行和按第 j 列的展开式,其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (1 \leqslant i \leqslant 3,\ 1 \leqslant j \leqslant 3)$$

M_{ij}是在 D_3 中划去第 i 行和第 j 列元素后,剩下的 4 个元素按原来的相对位置所成的二阶行列式.

例 5 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 3 - 4 = -3$

它按第 1、2、3 列和按第 1、2、3 行的展开式依次为

$$D = (-4) - 3(-3) + 2(-4) = -3$$

$$D = -(-1)(-5) - (-2) = -3$$

$$D = 2(3) - 4(3) + 3 = -3$$

$$D = (-4) - (-1)(-5) + 2(3) = -3$$

$$D = -3(-3) - 4(3) = -3$$

$$D = 2(-4) - (-2) + 3 = -3$$

一般地有以下重要定理.

定理 2(行列式展开定理) 设 $D_n = |a_{ij}|_n$ 为 n 阶行列式,则可按其第 i 行展开得

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.7}$$

也可按其第 j 列展开得

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.8}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$$

为元素a_{ij}在D_n中的代数余子式，而M_{ij}为D_n中划去第i行和第j列元素后剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的相对位置所成的$n-1$阶行列式，称为a_{ij}在D_n中的余子式.

例 6 $$D_4=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

因为第 4 行中含 0 最多，所以宜按第 4 行展开得

$$D_4=(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 7\\ 1 & 0 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

$$=-(21-10+1-45)-2(-2-3-9)$$

$$=33+28=61$$

推论 含零行或含零列的行列式必为零.

例 7 $$\begin{vmatrix}0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & n-1\\ n & & & & & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n!$$

例 8 $$\begin{vmatrix}* & * & * & * & a\\ * & * & * & * & b\\ * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

这是由于按其末列展开后得到的是两个值为 0 的 4 阶行列式之和，故值为零.

§ 2 行列式的性质

因为n阶行列式是$n!$项求和，而每一项都是n个数之积，所以当n稍大时，计算量就很大. 例如，$10!=3628800$. 利用行列式性质求值可以说是一条必经的有效途径！

性质 1 行列式经转置后其值不变.

证 对行列式的阶数n用归纳法. 对二阶行列式显然有

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

设任一 $n-1$ 阶行列式经转置后，其值不变. 现把 n 阶行列式 D_n 按其第 1 行展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

这里 $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}(j=1, 2, \cdots, n)$，$M_{1j}$是 a_{1j}在 D_n 中的余子式. 再把 D_n 的转置行列式 D'_n 按其第 1 列展开得

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A'_{11} + a_{12}A'_{12} + \cdots + a_{1n}A'_{1n}$$

这里 $A'_{1j} = (-1)^{j+1}M'_{1j}$，而

$$M'_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2,j-1} & \cdots & a_{n,j-1} \\ a_{2,j+1} & \cdots & a_{n,j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 D'_n 中划去第 j 行和第 1 列后得到的 $n-1$ 阶行列式. 据归纳假设，M'_{1j}与其转置行列式 M_{1j}相等，$i = 1, 2, \cdots, n$，所以 $D_n = D'_n$. 证毕

根据这个性质可知，在任一行列式中，行与列处于平等地位，凡对行成立的命题，对列必成立，反之亦然.

性质 2　用数 k 乘行列式 D 中某一行(列)中所有元素所得的行列式等于 kD. 也就是说，行列式可按行(列)提取公因数，即

$$\begin{array}{r} \\ (k)\leftarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

证　将左边行列式按第 i 行展开后再提出公因数 k 即可证得(1.9)式. 证毕

注意　必须要按行或按列逐次提取公因数.

例 9
$$\begin{array}{r} \\ (2)\leftarrow \\ (3)\leftarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{rrr} & & \downarrow \\ & & (5) \end{array} \end{array} = 2 \times 3 \times 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 30(-6) = -180$$

例 10
$$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

例 11 $D=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & -a & -b\\ a & 0 & -c\\ b & c & 0\end{vmatrix}=-D$

因为 D 为数，所以 $D=0$.

性质 3 互换行列式的某两行(列)，行列式改号，即

$$\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix} \tag{1.10}$$

因此，凡有相同两行(列)的行列式必为零. 凡有两行(列)成比例的行列式必为零.

证 对阶数 n 用归纳法证明. 对二阶行列式显然有

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc=-\begin{vmatrix}c & d\\ a & b\end{vmatrix}$$

设结论对 $n-1$ 阶行列式成立，$n\geqslant 3$. 在 n 阶行列式 D_n 中任意取定第 k 行，$k\neq i,\ j$，则按第 k 行展开有

$$D_n=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

$$\widetilde{D}_n=\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\widetilde{A}_{kj}$$

这里，A_{kj}是 a_{kj}在 D_n 中的代数余子式，$\widetilde{A}_{kj}$是 a_{kj}在$\widetilde{D}_n$ 中的代数余子式. 它们都是 $n-1$ 阶行列式，且在 A_{kj}中互换第 i 行与第 j 行即得$\widetilde{A}_{kj}$，由归纳假设知

$$\widetilde{A}_{kj}=-A_{kj}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

所以必有 $\widetilde{D}_n=-D_n$.

如果 n 阶行列式 D_n 中第 i 行与第 j 行中所对应的元素相同，则互换这两行得

$D_n = -D_n$，必有 $D_n = 0$.

最后易见

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ (k)\leftarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

证毕

例 12　x 的 4 次方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$$

的四个根为 $x = \pm 1$ 和 $x = \pm 2$.

性质 4　行列式可按行(列)拆开，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

证　把左边行列式按第 i 行展开即得右边两个行列式之和.　　证毕

注意　必须逐行或逐列拆开求行列式的值.

例 13　$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

性质 5　把行列式 D 的某一行(列)的所有元素都乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上所得的行列式仍为 D.

证　$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$