面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等数学

下册

侯云畅 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学下册/侯云畅主编. －北京:高等教育出版社,
1999 (2000 重印)
面向 21 世纪课程教材
ISBN 7－04－007897－X

Ⅰ.高… Ⅱ.侯… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.
013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64364 号

高等数学(下册)
侯云畅 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010－64054588	**传　　真**	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京外文印刷厂		

开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2000 年 1 月第 1 版
印　　张	21.75	**印　　次**	2000 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	400 000	**定　　价**	18.50 元

面向21世纪课程教材

普通高等教育“九五”
国 家 级 重 点 教 材

目　　录

第六章　多元函数微分学及其应用

在实际问题中，经常需要研究多种事物与多种因素之间的联系，这就是多元函数的问题．二元和二元以上的函数统称为多元函数，多元函数又有数值函数和向量值函数之分．从本章开始，讨论多元函数的微积分学．

在学习多元函数时，既要注意多元函数与一元函数的不同点，又要注意与一元函数的相同点；多元函数微积分学中的许多概念和方法是一元函数中相应概念和方法的推广和发展．例如，令多元函数中的一个变量变化，将其余的变量视为不变，就成为一元函数，对这一函数便可用处理一元函数的方法去处理，这是研究多元函数一种常用的方法．

为了研究多元函数，我们先介绍有关 n 维欧氏空间的概念和矩阵的初步知识．

第一节　预 备 知 识

1-1　n 维欧氏空间

由 n 个有序的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 所组成的数组，称为 n 维向量．记为 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称为 n 维行向量；有时也记为 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，称为 n 维列向量．$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个分量．由全体 n 维向量组成的集合记为

$$\boldsymbol{R}^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\},$$

并且对它规定加法和数乘运算：

设向量 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{Y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$，则 $(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的和，记为 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$，即

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

设 k 为实常数,则$(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$称为数 k 与向量 $\boldsymbol{X}$ 的乘积,记为

$$k\boldsymbol{X}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n),$$

对 $\boldsymbol{R}^n$ 规定了这两种运算之后,便称 $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维向量空间,简称为 n 维空间.

向量$(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)$,称为 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的负向量,记为 $-\boldsymbol{X}$.

分量全为零的向量$(0,0,\cdots,0)$,称为零向量,记为 $\mathbf{0}$.

n 维空间的向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也称为 n 维空间中的一个点,记为 $\boldsymbol{P}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,或记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为点 P 的第 i 个坐标.显然,1 维、2 维、3 维空间分别是实数轴、平面、立体空间中的点的全体.

定义 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的内积,记为 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$ 或$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$,即

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

定义了内积的 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 称为 n 维欧几里得(Euclid)空间,简称欧氏空间,仍记为 $\boldsymbol{R}^n$(以下 $\boldsymbol{R}^n$ 均表示 n 维欧氏空间).$\sqrt{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})}$称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的长度或模,记为

$$\|\boldsymbol{X}\|=\sqrt{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})}=\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

模等于 1 的向量叫做单位向量.

$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 之间的距离,记为

$$\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\boldsymbol{R}^n$ 中两点间的距离具有下列性质:

(1) 非负定性: $\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\geqslant 0$, 且 $\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

(2) 对称性: $\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\rho(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$.

(3) 三角不等式: $\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y})$.

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{R}^n$.

由柯西不等式,有$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant\|\boldsymbol{X}\|\|\boldsymbol{Y}\|$,定义 $\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}{\|\boldsymbol{X}\|\|\boldsymbol{Y}\|}$,即 $\theta=\arccos\dfrac{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})}{\|\boldsymbol{X}\|\|\boldsymbol{Y}\|}$称为向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的夹角.

特别地,当$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=0$ 时,称向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 正交.

1-2 n 维欧氏空间中的点集

一、邻域

设 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in \boldsymbol{R}^n$ 为定点，$\delta>0$，点集

$$U_\delta(P_0)=\{P\in \boldsymbol{R}^n \mid \rho(P,P_0)<\delta\}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域，简称邻域.

在 $\boldsymbol{R}^3$ 中，$U_\delta(P_0)$为以 P_0 为中心，δ 为半径的球的内部点的集合. 类似地，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，称 $U_\delta(P_0)$为点 P_0 的球形邻域.

从 $U_\delta(P_0)$中去掉点 P_0，称为点 P_0 的去心邻域，记作

$$U_\delta^0(P_0)=U_\delta(P_0)\setminus\{P_0\}.$$

二、内点、边界点

设有点集 $E\subseteq \boldsymbol{R}^n$，点 $P\in E$，若 $\exists\,\delta>0$，使 $U_\delta(P)\subseteq E$，则称点 P 是点集 E 的内点. E 的内点的全体构成的集合称为 E 的内部. 例如，平面点集 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$的任一点都是 E 的内点. 而对于点集 $Q^2=\{(x,y)\mid x\in \mathbf{Q},y\in\mathbf{Q}\}$，其中 $\mathbf{Q}$ 是有理数集，由实数的性质可知，Q^2 中的每一点都不是它的内点.

若 $\forall\, U_\delta(P)$既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 P 是 E 的边界点. E 的边界点的全体构成的集合称为 E 的边界，记为∂E. 例如，平面点集 $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 4\}$的边界为

$$\partial E=\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}.$$

三、开集、闭集

若点集 $E\subseteq \boldsymbol{R}^n$ 每一点都是E 的内点，则称 E 是开集. 例如，区间(a,b)，点集$\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<4\}$和$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i,a_i,b_i$ 为常数，$i=1,2,\cdots,n\}$分别是 $\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^n$ 上的开集.

若点集 $E\subseteq \boldsymbol{R}^n$ 包含它的全部内点和边界点，则称 E 为闭集. 例如，闭区间$[a,b]$，点集$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$和$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,a_i,b_i$ 为常数，$i=1,2,\cdots,n\}$分别是 $\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^n$ 上的闭集.

四、连通集、区域

点集$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i-x_i^0=l_it\,(i=1,2,\cdots,n),\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的直线段. 若干段衔接起来的直线段构成 $\boldsymbol{R}^n$ 中的折线.

设点集 $E\subseteq \boldsymbol{R}^n$，若 $\forall\, P,Q\in E$，总可用完全含在 E 内的折线连接起来，则称 E 是连通集，否则称 E 是非连通集.

连通的开集称为开区域或区域；开区域及它的边界构成的点集称为闭区

域. 例如，$\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的区域；$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的闭区域.

设点集 $E\subseteq\boldsymbol{R}^n$，若 $\exists M>0$，$\forall P\in E$ 都有 $\rho(P,0)\leqslant M$，则称 E 为有界集，否则称为无界集.

下面我们给出 $\boldsymbol{R}^2$ 和 $\boldsymbol{R}^3$ 中单连通域和多连通域的定义.

设区域 $E\subseteq\boldsymbol{R}^2$ 是连通域，若 E 中的任一条闭曲线 l 所围的点集完全包含于 E 中，则称 E 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中的单连通域，否则称为多连通域，例如，$\boldsymbol{R}^2$ 是单连通域，而 $\boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 是多连通域.

设区域 $E\subseteq\boldsymbol{R}^3$，若对 E 中任一条闭曲线 C，都存在一张以 C 为边界的曲面 S，使 S 完全包含于 E，则称 E 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的 1 维单连通域；若 E 为 1 维单连通域，且 E 内任一闭曲面所围成的区域均包含于 E，则称 E 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的 2 维单连通域，否则称多连通域. 例如，开球 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1\}$ 是一个 2 维单连通域，而 $\Omega\setminus\{(0,0,0)\}$ 则是 1 维单连通域，若在 Ω 中去掉 z 轴，即 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1, x\neq 0, y\neq 0\}$，则是多连通域.

五、聚点、孤立点

设点集 $E\subseteq\boldsymbol{R}^n$，点 $P_0\in\boldsymbol{R}^n$，若 $\forall\, U_\delta^0(P_0)$ 都含有 E 的无穷多个点，则称 P_0 是 E 的聚点. 若 $P_0\in E$，$\exists\, U_\delta^0(P_0)$，使 $U_\delta^0(P_0)\cap E=\varnothing$，则称点 P_0 是 E 的孤立点.

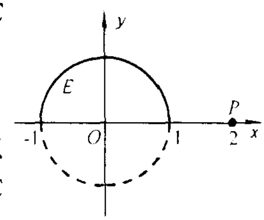

图 6-1

点集 E 的聚点可属于 E，也可不属于 E；E 的内点必是 E 的聚点；边界点可能是 E 的聚点，也可能是 E 的孤立点；只有无限点集才可能有聚点. 例如

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}\cup\{(2,0)\}\setminus\{(x,y)\mid x^2+y^2=1, y<0\}$$

所确定的点集，如图 6-1 所示，单位圆内及边界点都是 E 的聚点，而上半圆周（实线）上的点属于 E，下半圆周（虚线）上的点不属于 E，点 $P(2,0)$ 是 E 的孤立点.

1-3　矩阵初步

矩阵是一种重要的数学工具，借助矩阵可使许多复杂问题表达简洁，运算方便，且便于在计算机上实现. 这里只介绍与本教材有关的内容，也不加证明，有关理论将在“线性代数”课程中学习.

一、矩阵定义

定义 6.1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素,a_{ij} 称为第 i 行第 j 列元素.矩阵可简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\text{或}\boldsymbol{A}=(a_{ij}).$$

当 $m=n$ 时,$\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶方阵.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$$

称为行矩阵.

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

称为列矩阵.

可见行矩阵即行向量,列矩阵即列向量.

两个矩阵的行数和列数都相等时,称它们是同型矩阵.若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

元素都为零的矩阵称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$.不同型的零矩阵是不同的.

二、矩阵运算

定义 6.1.2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和(加法)

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\xlongequal{\text{def}}\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

矩阵的加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$,则 $-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,显然有

$$A + (-A) = O.$$

由此规定矩阵减法

$$A - B \xlongequal{\text{def}} A + (-B).$$

定义 6.1.3 数 λ 与矩阵 A 的乘积,称为矩阵的数乘,记为 λA 或 $A\lambda$,即

$$\lambda A = A\lambda \xlongequal{\text{def}} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的数乘满足下列运算规律(设 A,B 为同型矩阵,λ,μ 为常数):

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

(2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

(3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

定义 6.1.4 设矩阵 $A = (a_{ik})_{m\times s}$,$B = (b_{kj})_{s\times n}$,则 A 与 B 的乘积是矩阵 $C = (c_{ij})_{m\times n}$,其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n),$$

并记为

$$C = AB.$$

一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个一阶方阵,也就是一个数.

$$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}.$$

由此说明矩阵乘积 $AB = C$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 就是 A 的第 i 个行向量与 B 的第 j 个列向量的内积.

注意,只有当第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时,两个矩阵才能相乘.

矩阵乘法满足下列运算规律:

(1) $(AB)C = A(BC)$.

(2) $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$.

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,其中 λ 为数.

一般而言,矩阵乘法不满足交换律,即

$$AB \neq BA.$$

三、转置矩阵

定义 6.1.5　把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到一个新矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$. 例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

定义 6.1.6　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即 $a_{ij}=a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵.

定义 6.1.7　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 阶矩阵(即方阵),则 $\boldsymbol{A}$ 对应的行列式记为 $\det\boldsymbol{A}$.

四、矩阵的正定性

定义 6.1.8　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\ a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

称为二次型.

取 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,则二次型可写成 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$.

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},$$

则二次型又可记为 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

定义 6.1.9　设 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵,如果实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 对任何 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$. 都有 $f(\boldsymbol{X})>0$,则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为正定二次型,并称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,记为 $\boldsymbol{A}>0$;如果对任何 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,都有 $f(\boldsymbol{X})<0$,则称 $f(\boldsymbol{X})$ 为负定二次型,并称 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵,记为 $\boldsymbol{A}<0$.

定理 6.1.1　对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充要条件是:$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式为正,即

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0;$$

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定的充要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正.

例如，矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

因为
$$a_{11}=-5<0,$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=26>0,$$
$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-80<0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵.

习题 6-1

1. 设 $\boldsymbol{X}=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{Y}=(4,1,-1,1)\in\boldsymbol{R}^4$，求 $\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.

2. 设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{R}^n$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 的夹角，证明：

(1) $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|^2=\|\boldsymbol{X}\|^2+\|\boldsymbol{Y}\|^2-2\|\boldsymbol{X}\|\ \|\boldsymbol{Y}\|\cos\theta$；

(2) 如果 $\boldsymbol{Z}\in\boldsymbol{R}^n$，则 $\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\leqslant\rho(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})+\rho(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y})$；

(3) 如果 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 正交，则 $\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|^2=\|\boldsymbol{X}\|^2+\|\boldsymbol{Y}\|^2$；

(4) $\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|^2+\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|^2=2\|\boldsymbol{X}\|^2+2\|\boldsymbol{Y}\|^2$.

3. 设 $\Omega\subseteq\boldsymbol{R}^2$，画出下列 Ω 的图形，并指出是开区域还是闭区域，为什么？是有界区域还是无界区域？

(1) $\Omega=\{(x,y)\mid y>0,x>y,x<1\}$；

(2) $\Omega=\{(x,y)\mid \frac{1}{4}x^2-1\leqslant y\leqslant 2-x\}$；

(3) $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$；

(4) $\Omega=\{(x,y)\mid xy=1\}$；

(5) $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant y<2,\ 2y\leqslant x\leqslant 2y+2\}$；

(6) $\Omega=\{(x,y)\mid (x,y)\neq(0,0)\}$.

4. 下面两个点集 $D\subseteq\boldsymbol{R}^2$，$\Omega\subseteq\boldsymbol{R}^3$ 是单连通集还是多连通集.

(1) $D=\boldsymbol{R}^2\setminus\{(x,y)\mid x=0,|y|\leqslant 1\}$；

(2) $\Omega=\boldsymbol{R}^3\setminus\{(x,y,z)\mid x=0,y=0,|z|\leqslant 1\}$.

第二节　多元函数的基本概念

2-1　多元函数的概念

客观事物往往是由多种因素确定的,诸如研究自然现象总离不开空间和时间,因此,一般物理量要依赖于空间变量 x,y,z 和时间变量 t,这种依赖于两个或更多个变量的函数,就是多元函数.

一、多元函数的定义

定义 6.2.1　设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^2$ 中的非空子集,映射 $f:\Omega\to R^1$ 或 $f:(x,y)\to z$,称为二元数值函数,简称二元函数.

$P(x,y)\in\Omega$ 称为自变量,$z\in\boldsymbol{R}^1$ 称为因变量,或称为 x,y 的二元函数,也记为 $z=f(P)=f(x,y)$,或简记为 f. $D_f=\Omega$ 称为函数的定义域,$R_f=\{z\mid(x,y)\in\Omega,\ z=f(x,y)\}\subseteq\boldsymbol{R}^1$,称为函数的值域.

类似地,设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的非空子集,则称映射

$$f:\Omega\to R^m\text{ 或 }f:P\to z,\ P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subseteq\boldsymbol{R}^n,(n\geqslant 1).$$

为 n 元函数,也记为 $z=f(P)$.

特别地,当 $m=1$ 时,有

$$z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subseteq\boldsymbol{R}^n,$$

称为 n 元数值函数,或 n 元函数.

当 $m=1,n=2$ 时,有

$$z=f(P)=f(x,y),\ P(x,y)\in\Omega\subseteq\boldsymbol{R}^2,$$

即为二元函数.

当 $m\geqslant 2$ 时,有

$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(P)=(f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P)),\ P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subseteq R^n$. 称为 n 元向量值函数,其中

$$f_1(P)=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(P)=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(P)=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

称为函数 $\boldsymbol{f}$ 的分量.

当 $m\geqslant 2,n=1$ 时,则有 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_m(t)),t\in\Omega\subseteq R^1$. 称为一元向量值函数.

例 1　函数

$$z = f(x,y) = \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

是定义在 $\Omega = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y > x, x^2+y^2<1\} \subseteq R^2$ 上的二元函数，D_f 如图 6－2 所示．加黑点的线段和曲线表示不含在域内．

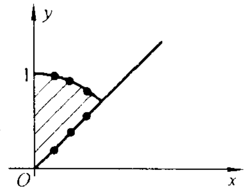

图 6－2

例 2 设圆柱体的底面半径为 R，高为 H，则体积为

$$V = \pi R^2 H.$$

V 是定义在 $\Omega = \{(R,H) \mid R>0, H>0\} \subseteq R^2$ 上的二元函数，定义域由实际意义确定．

例 3 试求将 xOy 平面上由曲线 $x^2=2y, x^2=4y, y^2=x, y^2=4x$ 所围的闭区域 D 变换为 uOv 平面上的矩形区域 $B=\{(u,v) \mid 1 \leqslant u \leqslant 4, 2 \leqslant v \leqslant 4\}$ 的函数(图 6－3)．

解 由题意，令 $u=\frac{y^2}{x}, v=\frac{x^2}{y}$，则

$$f(P) = (u,v) = \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right), \quad (x,y) \in D.$$

即为所求的向量值函数 $f: D \to B$.

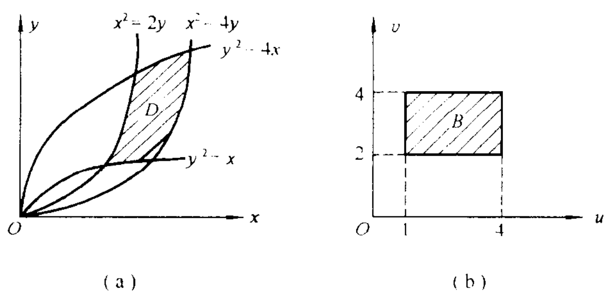

图 6－3

二、多元函数的几何意义

由空间解析几何的知识我们知道，如果 $f(x,y)$ 是定义在 $\Omega \subseteq R^2$ 上的函数，那么，对于每一点 $P(x,y) \in \Omega$，就对应一个函数值 $z=f(x,y)$，于是就确定了一点 $M(x,y,z) \in R^3$．当 $P(x,y)$ 在 Ω 内变化时，得到 $\boldsymbol{R}^3$ 空间中的一个点集

$$\mathrm{Gr}f = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in \Omega\} \subseteq \boldsymbol{R}^3$$

称为函数 $f(x,y)$ 的图形(或图象)．一般来说，它是 R^3 中的一张曲面．如图 6－4(a)所示．