偏微分方程的L^2理论

王耀东

偏微分方程的L^2理论

王 耀 东

北 京 大 学 出 版 社

偏微分方程的 L^2 理论

王耀东

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　8.875印张　200千字

1989年3月第一版　　1989年3月第一次印刷

印数：0001—5,000册

ISBN 7-301-0002-2/O·002

定价：1.85元

前　　言

1982年以来，作者在北京大学和中国科学技术大学研究生院多次讲授“偏微分方程的L^2理论”这一课程，本书系对历次讲稿加工整理而成。

我们系统介绍$L^2(\Omega)$上的Sobolev空间$H^s(\Omega)$，然后在$H^s(\Omega)$中分别讨论椭圆、抛物、双曲三种类型的方程，这就必须系统地援引Hilbert空间的理论。例如解的存在性本质上都是有界线性泛函的Riesz表示定理的推论；椭圆型方程解的正则性是$H^1(\Omega)$元素的差商的L^2有界性和L^2中单位球的弱紧性的直接结果；椭圆算子的特征函数理论是Riesz-Schauder关于紧自伴算子的一般理论的具体应用。利用半群方法、Fourier变换方法、Galerkin方法、特征函数展开方法，发展型方程解的正则性可归结为椭圆型方程的相应结果。因此阅读和使用本书可把重点放在Sobolev空间和椭圆型方程，而对发展型方程可选择使用书中介绍的一种或两种方法。做每章所附的习题对掌握本书内容是不可缺少的。

作　　者

1985年7月于北京大学

目　录

第一章 $H^s(\Omega)$ 空 间

§1 引进$H^1(\Omega)$ 的必要性

1.1 薄膜平衡问题

我们以考察薄膜平衡这一问题作为本章乃至全书的序幕。设一片薄膜起初盖住 x_1x_2 平面上的区域Ω，其边界固定在 Ω 的边界$\partial\Omega$上。在密度为 $f(x_1,x_2)$ 的外力作用下，薄膜上的点(x_1,x_2)在垂直于 x_1x_2 平面方向上的位移为 $u(x_1,x_2)$，求薄膜形变后的形状 $u=u(x_1,x_2)$ （图1）。

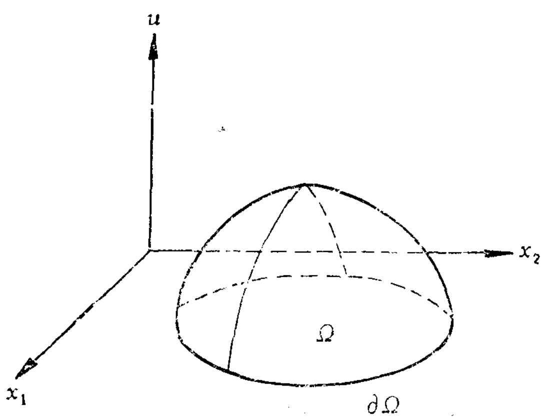

图 1

薄膜每点位移为 $v(x_1,x_2)$时，其形变能为

$$T\left(\int_\Omega\sqrt{1+\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2-|\Omega|\right)$$

$$\doteq \frac{T}{2}\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

其中T为比例系数，$|\Omega|$表示区域Ω的面积。外力做的功是$\int_{\Omega} fv\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$，薄膜的总能量为（以下令$T=1$）

$$E=E[v]=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)-fv\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{1.1}$$

由 Dirichlet 原理，实际的位移$u(x_1,x_2)$使总能量$E[v]$取最小值

$$\begin{aligned}E[u]&=\min_{v\in V}E[v]\\&=\min_{v\in V}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-fv\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中V为在$\partial\Omega$上取零值的Ω上定义的“所有”函数的集合。

我们来探讨u应当满足的方程。任意取定函数v，v在$\partial\Omega$上取零值，考虑数值函数

$$\begin{aligned}\varphi(t)=E[u+tv]&=\frac{1}{2}a(u)+\frac{1}{2}a(v)t^2\\&+a(u,v)t-(f,u)-(f,v)t,\end{aligned}$$

其中

$$a(u,v)=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$a(u)=a(u,u),\quad (f,v)=\int_{\Omega} fv\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

$\varphi(t)$在 $t=0$ 取最小值 $E[u]$。由 Fermat 引理,$\varphi'(0)$等于零,即

$$u\in V, a(u,v)=(f,v), \forall v\in V. \qquad (1.3)$$

这种形式的方程称为**变分方程**, v 称为**检验函数**。

若 u 和 f "光滑", 由 Green 公式可得

$$\int_\Omega(-\Delta u-f)v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=0, \quad \forall v, v|_{\partial\Omega}=0.$$

于是由 v 的任意性可知 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u-f=0, & \Omega\text{ 内}, \\ u=0, & \partial\Omega\text{ 上}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

此即 Poisson 方程的 Dirichlet 问题。

1.2 薄膜平衡问题的精确提法

在泛函 $E(v)$的极值问题(1.2)中, 我们有意回避了 v 的明确变化范围 V,只是笼统地说其中的函数在 $\partial\Omega$ 上取零值。在古典的数学物理方程中, 通常假定力密度函数光滑, 并要求解有连续二阶导数, 从而满足 Poisson 方程。但在实际问题中, f 不光滑的情形并非罕见, 例如我们设 f 是 Ω 上的 Lebesgue 意义下的平方可积函数, 这时位移 u 的光滑性很难保证。为使能量表达式(1.1)有意义, 我们自然应该假设

$$V\subset H^1(\Omega)=\left\{ v\in L^2(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\in L^2(\Omega) \right\}, \qquad (1.5)$$

其中的导数是在广义函数的意义下取的。V 中的函数在 $\partial\Omega$ 上取值为零, 故

$$V=\{v\in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega}=0\}=H_0^1(\Omega). \qquad (1.6)$$

于是变分问题(1.2)的精确提法是求函数 u，满足

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad E[u]=\min_{v\in H_0^1(\Omega)} E[v]. \tag{1.7}$$

我们所要研究的课题如下：

1）首先定义弱导数和强导数，并在此基础上定义空间 $H^1(\Omega)$ 及类似的正整数次空间 $H^m(\Omega)$，研究这种空间的性质，诸如完备性、可分性、用光滑函数的逼近、延拓性质、内插性质等。

2）在极值问题(1.7)中要求 $u|_{\partial\Omega}=0$，当 $u\in H^1(\Omega)$ 时，u 只是几乎处处定义的函数，u 在边界 $\partial\Omega$ 上的值是无法按通常方式逐点定义的，我们将以一个合理的方式定义迹 $u|_{\partial\Omega}$，并将发现，$u|_{\partial\Omega}$ 是 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 中的一个元素，自然必须预先定义分数次空间 $H^{1/2}(\partial\Omega)$，或一般的非整数次（通称分数次）空间 $H^s(\Omega)$ 和 $H^s(\partial\Omega)$，并研究这种空间类似 $H^m(\Omega)$ 的性质，尤其要刻画 $H^s(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹，迹的概念和性质对边值问题、初值问题和混合问题的研究至关重要。

3）研究偏微分方程解的存在性，方程通常写成形如(1.3)的变分形式，例如对方程(1.3)，只要 $f\in(H_0^1(\Omega))'=H^{-1}(\Omega)$，就存在唯一解 $u\in H_0^1(\Omega)$。对一般椭圆型方程，解的存在性往往由Riesz有界线性泛函的表示定理的推广（Lax-Milgram定理）得到，而对发展型方程可用 Lax-Milgram 定理的推广（Lions 定理）得到，或用半群理论得到。

4）在3)中已提到，在薄膜平衡问题中若 $f\in H^{-1}(\Omega)$，则有解 $u\in H^1(\Omega)$；若 $f\in H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$，则用差商方法可证 $u\in H^2(\Omega)$。一般地若 $f\in H^k(\Omega)$，则 $u\in H^{k+2}(\Omega)$，这就是所谓解的正则性问题。对一般的二阶椭圆型方程我们要证明同样的正则性结果。对于发展型方程主要由半群方法推导正

则性，并以椭圆型方程的正则性结果做基础。

5）当m充分大，$u\in H^m(\Omega)$，u就有适当阶数的连续导数，我们要建立这类嵌入性质，再结合4）中的解的$H^m(\Omega)$正则性，就可从变分方程的解得到偏微分方程的古典解。

§2　整数次空间$W^{m,p}(\Omega)$

我们先一般地讨论$L^p(\Omega)$上的整数次 Sobolev 空间，在讨论分数次空间和相应的迹的问题时，将只讨论$p=2$的情形。

2.1　弱导数和强导数

先引进若干通用的记号。

$\boldsymbol{R}^n$表示实n维 Euclid 空间；$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示$\boldsymbol{R}^n$中的点；$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$是非负整数，$\alpha$称为**整指标**，记

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n};$$

Ω是$\boldsymbol{R}^n$中的开集，定义

$$C^m(\Omega)=\{\varphi|\varphi\text{的直到}m\text{阶的偏导数在}\Omega\text{连续}\},$$

$$C^m(\bar{\Omega})=\{\varphi|\varphi\text{的直到}m\text{阶的偏导数在}\Omega\text{一致连续}\}.$$

以下我们以D_j记$\partial/\partial x_j$，

$$D=(D_1,D_2,\cdots,D_n),$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}.$$

易知若$\varphi\in C^m(\bar{\Omega})$，则对任意重指标$\alpha$，$|\alpha|\leqslant m$，$D^\alpha\varphi$可延拓为$\bar{\Omega}$上的一个连续函数，延拓后仍记为$D^\alpha\varphi$。我们定义无穷次可微函数空间

$$C^{\infty}(\Omega)=\bigcap_{m=1}^{\infty}C^{m}(\Omega),\qquad C^{\infty}(\bar{\Omega})=\bigcap_{m=1}^{\infty}C^{m}(\bar{\Omega}).$$

对连续函数 φ 定义其支集

$$\operatorname{supp}\varphi=\{x\in\Omega\mid\varphi(x)\neq 0\}^{-},$$

其中"－"表示在 $\boldsymbol{R}^{n}$ 中取闭包。进而定义

$$C_{0}^{m}(\Omega)=\{\varphi\in C^{m}(\Omega)\mid\operatorname{supp}\varphi\text{有界且}\subset\Omega\},$$

$$C_{0}^{\infty}(\Omega)=\bigcap_{m=1}^{\infty}C_{0}^{m}(\Omega).$$

若有界开集 Ω' 的闭包 $\bar{\Omega}'\subset\Omega$，则记 $\Omega'\subset\subset\Omega$。又定义 Ω 上的局部可积函数空间

$$L_{\mathrm{loc}}^{1}(\Omega)=\{u\mid u\text{在}\Omega\text{可测，且}\forall\,\Omega'\subset\subset\Omega,\ u\in L^{1}(\Omega')\}.$$

定义1.1 设 $u,v\in L_{\mathrm{loc}}^{1}(\Omega)$，$\alpha\in\boldsymbol{Z}_{+}^{n}$，$\boldsymbol{Z}_{+}$ 为非负整数集。若对任意 $\varphi\in C_{0}^{\infty}(\Omega)$，有等式

$$\int_{\Omega}uD^{\alpha}\varphi\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}v\varphi\,\mathrm{d}x,\tag{1.8}$$

则说 v 是 u 的 α 阶**弱导数**，记作 $v=D^{\alpha}u$。

显然，若 u 的弱导数 $D^{\alpha}u$ 存在必唯一。又若 $u\in C^{m}(\Omega)$，$|\alpha|\leqslant m$，由Green公式知对任意 $\varphi\in C_{0}^{\infty}(\Omega)$，

$$\int_{\Omega}uD^{\alpha}\varphi\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}(D^{\alpha}u)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

故通常的导数 $D^{\alpha}u$ 正是 u 的 α 阶弱导数。

在讨论 Sobolev 空间中的函数的某些性质时，往往先对光滑函数($C^{m}(\Omega)$函数甚至 $C^{\infty}(\Omega)$函数）证明该性质，然后过渡到极限，这就需要能用光滑函数在某种意义下逼近给定函数。为此引进光滑子 $\rho=\rho(x)$，满足

1) $\rho\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^{n})$，

2) $\operatorname{supp}\rho\subset\overline{B_1(0)}=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid |x|\leqslant 1\}$,

3) $\int_{\boldsymbol{R}^n}\rho(x)dx=1$。

这样的光滑子是存在的。例如

$$\rho(x)=\begin{cases} C\exp(|x|^2-1)^{-1}, & 若|x|<1;\\ 0, & 若|x|>1. \end{cases} \tag{1.9}$$

其中选取常数

$$C=\left(\int_{B_1(0)}\exp(|x|^2-1)^{-1}\mathrm{d}x\right)^{-1}.$$

$\{\varepsilon^{-n}\rho(x\varepsilon^{-1})\mid\varepsilon>0\}$ 称为**光滑子族**。对 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ 作卷积

$$(J_\varepsilon u)(x)=\varepsilon^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y, \tag{1.10}$$

$J_\varepsilon u$ 称为 u 的**光滑化**。算子 J_ε 的作用是把函数"磨光"，其意义体现在下列定理中。

定理1.1 设函数u及其弱导数$D^\alpha u$属于 $L^p_{loc}(\Omega)(p\geqslant 1)$，则 $J_\varepsilon u\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，且对任意开集 $\Omega'\subset\subset\Omega$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega'}|J_\varepsilon u(x)-u(x)|^p\mathrm{d}x\to 0,\\ &\int_{\Omega'}|D^\alpha u_\varepsilon(x)-D^\alpha u(x)|^p\mathrm{d}x\to 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

证明 设 $\varepsilon<\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)=d>0$，$x\in\Omega'$，则

$$\begin{aligned} J_\varepsilon u(x)&=\varepsilon^{-n}\int_{|y-x|<\varepsilon}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y\\ &=\int_{|z|<1}\rho(z)u(x-\varepsilon z)\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

注意到$\int_{|z|<1}\rho(z)\mathrm{d}z=1$，我们有

$$J_\varepsilon u(x)-u(x)=\int_{|z|<1}\rho(z)(u(x-\varepsilon z)-u(x))\mathrm{d}z.$$

由 Minkowski 不等式，有

$$\|J_\varepsilon u-u\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)\|u(x-\varepsilon z)-u(x)\|_{L^p(\Omega')}\mathrm{d}z.$$

由$L^p(\Omega)$中平移的连续性，有

$\|u(x-\varepsilon z)-u(x)\|_{L^p(\Omega')}\to 0$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，关于 $z\in B_1(0)$ 一致。故有

$$\|J_\varepsilon u-u\|_{L^p(\Omega')}\to 0(\varepsilon\to 0).$$

对于$x\in\Omega'\subset\subset\Omega$，当$\varepsilon<d=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ 时，$\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$ 作为 y 的函数属于 $C_0^\infty(\Omega)$，在积分号下关于 x 求导数得

$$D^\alpha(J_\varepsilon u)(x)=\varepsilon^{-n}\int_\Omega D_x^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y,$$

$$J_\varepsilon u\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

由复合函数微商法则，注意到 $D_{x_j}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)=-D_{y_j}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$，易知

$$\int_\Omega D_x^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D_y^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y.$$

再由弱导数定义得

$$D^\alpha(J_\varepsilon u)(x)=\varepsilon^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D^\alpha u(y)\mathrm{d}y=J_\varepsilon(D^\alpha u)(x).$$

对 $D^\alpha u$ 利用对 u 已得的结果即得

$$\|D^\alpha J_\varepsilon u - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega')} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \quad \blacksquare$$

定义1.2 设 $u, v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$，$\alpha \in \boldsymbol{Z}^n_+$ 给定，若对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$，存在函数序列 $u_m \in C^\infty(\Omega')$ 使

$$\|u_m - u\|_{L^p(\Omega')} \to 0, \quad \|D^\alpha u_m - v\|_{L^p(\Omega')} \to 0 \quad (m \to \infty), \tag{1.12}$$

则称 v 是 u 在 L^p 中的 α 阶**强导数**，并记作 $D^\alpha u$。

显然 u 的 L^p 中的 α 阶强导数必为同阶弱导数；定理1.1则说明，若 u 及其弱导数 $D^\alpha u$ 均在 $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ 中，$D^\alpha u$ 必为 u 的 L^p 中的强导数。

2.2 整数次Sobolev空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的定义及其简单性质

定义1.3 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，记

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid \quad D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \boldsymbol{Z}^n_+, |\alpha| \leqslant m\}, \tag{1.13}$$

其中 $D^\alpha u$ 表示 u 的 α 阶弱（或强）导数，对于 $v \in W^{m,p}(\Omega)$ 定义范数

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|v\|_{m,p,\Omega} = \|v\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|^p_{0,p}\right)^{1/p},$$

$$\|u\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty; \tag{1.14}$$

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ 赋以范数(1.14)称为($L^p(\Omega)$上的 m 阶) Sobolev **空间**。

现在来讨论 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一些简单性质。

定理1.2 $W^{m,p}(\Omega)$按通常方式定义加法和数乘运算，构成 Banach 空间。

证明 只需证明$W^{m,p}(\Omega)$的完备性。设u_k是$W^{m,p}(\Omega)$中的一个 Cauchy 序列，即

$$\|u_k-u_l\|_{m,p,\Omega}\to 0\quad(k,l\to\infty).$$

由范数$\|u\|_{m,p,\Omega}$的定义知，对任意$\alpha\in Z_+^n$，$|\alpha|\leqslant m$，

$$\|D^\alpha u_k-D^\alpha u_l\|_{0,p,\Omega}\to 0\quad(k,l\to\infty),$$

即$D^\alpha u_k$是$L^p(\Omega)$中的 Cauchy 序列。由$L^p(\Omega)$的完备性，存在$u_\alpha\in L^p(\Omega)$满足

$$\|D^\alpha u_k-u_\alpha\|_{0,p,\Omega}\to 0\quad(k\to\infty).$$

记$u_{(0,0,\cdots,0)}=u$，易见u_α正是u的α阶弱导数。事实上，由弱导数$D^\alpha u_k$的定义(1.8)，对任意$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\int_\Omega u_k D^\alpha\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega(D^\alpha u_k)\varphi\mathrm{d}x,\quad |\alpha|\leqslant m.$$

令$k\to\infty$，注意到L^p中的强收敛蕴涵弱收敛，我们得

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha\varphi\mathrm{d}x.$$

再由$D^\alpha u$的定义即知$u_\alpha=D^\alpha u\in L^p(\Omega)$，$|\alpha|\leqslant m$。故$u\in W^{m,p}(\Omega)$且

$$\|u_k-u\|_{m,p,\Omega}^p=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u_k-D^\alpha u|^p\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega|D^\alpha u_k-u_\alpha|^p\mathrm{d}x\to 0\quad(k\to\infty).\ \blacksquare$$

定理1.3 当$1\leqslant p<\infty$时，$W^{m,p}(\Omega)$是可分的。

证明 对任一函数$u\in W^{m,p}(\Omega)$，令$Pu=\{D^\alpha u\,|\,|\alpha|\leqslant$

$m\} \in \prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$与之对应。由定理1.2的证明可知$PW^{m,p}(\Omega)$是$\prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$的闭子空间，且$W^{m,p}(\Omega)$与$PW^{m,p}(\Omega)$同构。已知当$1 \leqslant p < \infty$时，$L^p(\Omega)$可分，从而乘积空间$\prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$可分，其闭子空间$PW^{m,p}(\Omega)$可分，与$PW^{m,p}(\Omega)$同构的$W^{m,p}(\Omega)$也可分。▎

定理1.4 当$1 < p < \infty$时，$W^{m,p}(\Omega)$是自反的。

证明 由定理1.2的证明知$W^{m,p}(\Omega)$与$\prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$的闭子空间$PW^{m,p}(\Omega)$同构。当$1 < p < \infty$时，$L^p(\Omega)$自反，其乘积空间$\prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$自反；$\prod_{|\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$的闭子空间$PW^{m,p}(\Omega)$自反，与它同构的$W^{m,p}(\Omega)$也自反。▎

2.3 单位分解

在转向$W^{m,p}(\Omega)$的逼近定理之前，先来建立单位分解定理。后面将多次用到它，其基本作用是局部化，即把整体性质归结为局部性质，可以形象地称为“**区域的分片**”。

引理1.1 设$\Omega' \subset\subset \Omega$，则存在函数$\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$，满足

$$\begin{cases} 0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1, & x \in \Omega; \\ \zeta(x) = 1, & x \in \Omega'; \\ |D^\alpha \zeta| \leqslant C/(\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega))^{|\alpha|}, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

证明 记$d = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$，定义开集

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, \Omega') < \frac{d}{3} \right\},$$