面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

大学数学

随机数学

萧树铁 主编

钱敏平 叶 俊 编著

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

大学数学

随机数学

萧树铁　主编

钱敏平　叶　俊　编著

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。书中尽量割舍概率与分布计算中的数学技巧性问题，集中讨论随机数学的核心问题，包括随机过程这一较深内容。同时直接从呼唤流、Brown运动等实例出发，导出泊松分布、正态分布等，使读者自然地将这些分布与随机过程联系起来。

本书可作为高等院校理工科非数学专业的教材，也可供有关人员及教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学．随机数学/萧树铁主编．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-008990-4

Ⅰ．大…　Ⅱ．萧…　Ⅲ．①高等数学②随机变量

Ⅳ．013 0211.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第62075号

随机数学

萧树铁　主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　本	787×960　1/16	版　次	2000年6月第1版
印　张	13.5	印　次	2000年6月第1次印刷
字　数	245 000	定　价	11.90元

序　言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的"高等数学". 面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要. 而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视. 这就需要一部与之相适应的教材.

这套"大学数学"教材是在前国家教委"面向21世纪教学内容和课程体系改革"研究课题的支持下完成的. 共有五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》. 我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础. 希望学生通过对它们的学习,能使他们在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础. 这种要求应该对任何专业都一样,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别.

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题. 19世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点. 诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神. 这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算. 在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维.

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程.

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射. 由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论;并且通过数值表示把两者结合起来.

至于几何,尽管它在古希腊及19世纪有其辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近50年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了“仿射及射影几何”及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把《随机数学》正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

在这套系列教材中《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自己动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程,这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为340左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段“评注”,主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.原因是这是一个尝试,对习惯讲授传统“高等数学”的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社1995年出版,萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试.目的在于根据“百家争鸣”的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999年6月

前　言

从20世纪80年代以来，随机性，特别是随机过程及其数学方法，已经广泛而迅速地渗入计算机科学，随之又成为生物、医学、工业工程、财贸金融，以及自然科学与高新技术各领域不可缺少的知识. 笔者在多年从事上述应用领域的研究中，深感更为广泛地将随机数学已有成果的精髓，传授给应用领域的学子，使之成为他们手中的有力武器，是多么必要. 但是，长期以来，在数学教学中，随机过程的知识，往往基于严格概率论所要求的较为艰深的数学语言. 这就使得在大学数学基础教育中，难于涵盖这些具有广泛应用潜力的内容. 迄今为止，尽管在大量应用领域的著作或教材中，将有关的随机数学知识，作为预备章节或附录列于书中，但是，就笔者所及的范围，还未见有适应上述要求，且系统完整，而深入浅出的随机数学的基础教材.

萧树铁先生及教育部"理科非数学类专业高等数学课程体系和内容改革"课题组提出数学教育的推陈出新，努力适应当代科学技术发展的想法，拟将随机数学，特别是随机过程，纳入非数学专业数学基础课教学. 这是一个十分正确的思想解放的想法. 笔者当然高举双手赞同. 笔者之一也欣然接受了萧树铁先生为此试拟一份教学大纲的任务. 于是，第二个问题又接踵而来：这个大纲能否实现？一个大纲提出种种教学要求是不难的，但是，这些要求能否在规定的学时内达到，的确值得怀疑. 这也往往是将科技新成果引入基础课教学的关键问题. 然而，编写一份这样的教材，却比草拟一份教学大纲，远为复杂而艰难. 特别是，国内外类似想法的教材，目前很少见. 因而，也就缺少借鉴与参考材料. 然而，发现"螃蟹般美食"的诱人动机，促进我们决定冒一次试食"蜘蛛"的风险.

本书中的主要尝试在于：尽量割舍概率与分布计算中的数数、积分等数学技巧性问题，集中讨论随机数学的核心问题，以涵盖随机过程这一较深的内容. 另一方面，我们直接从呼唤流、Brown运动等实例出发，导出Poisson分布、正态分布等不易从直观认识的分布. 这样不仅使我们能够使读者更好理解这些分布的来源及适用情况，而且能够自然而快速地和随机过程联系起来.

经过一年多的努力，终于完成了本书的初稿. 在清华大学数学科学学院的大力支持下，此初稿经过在清华大学工程力学、机械、化工、热能、汽车等多个工科系的试用，感觉到我们提出的大纲和教材，还是基本可行与可用的. 当然，

第一次吃螃蟹，自然比不得如今宴席上螃蟹的美味，葱、姜、酒、醋，诸般佐料还顾不得调配；现在我们这一教材，好比白水煮蟹，能勉强进食而已．我们期望它的出版，能够给广大有关师生，提供一个将随机过程引入数学基础教育的前景．当然，笔者也将继续努力，改进完善本书，使之逐步成为一本合用的教材．我们深信，这一过程除去笔者自身的努力外，还必须得到广大有关师生的支持，特别是提出批评与建议，才能完成．在此，我们对这些批评与建议表示衷心的期待和欢迎．

我们还要在此特别感谢萧树铁先生．没有他最初的设想、建议、安排和不断的鼓励与帮助，本书的写作和出版都是未曾想象过的事，更谈不上实现．我们还要感谢萧先生和教育部“理科非数学类专业高等数学课程体系和内容改革”课题组，他们为我国未来的数学教育的深谋远虑，精心策划，付出了辛勤和劳苦，作出了卓有成效的贡献．正是他们和广大数学教师的辛勤劳动，使我国的数学教育水平位于世界前列．

编者

2000 年 5 月

大学数学　萧树铁　主编

《一元微积分》	朱学贤　郑建华　编著
《多元微积分及其应用》	章纪民　萧树铁　编著
《代数与几何》	居余马　李海中　编著
《随机数学》	钱敏平　叶　俊　编著
《数学实验》	姜启源　何　青　高　立　编著

目　　录

第 1 章　概率与概率空间

1.1 引言

1.1.1 随机现象与随机数学

什么是**随机数学**?顾名思义,它就是研究与表达随机现象及其规律性的一个数学分支.所谓**随机现象**,就是一种不确定的现象,这种现象其实我们每天都会碰到许多.如在雨季外出时,你肯定会想:要不要带伞?这种考虑的背后,就是认为你不能确定"今天是否下雨",进而,会考虑有多大的可能下雨,来决定自己是否带伞.但是即使是气象台,也不能神机妙算到一点不错.因为在雨季"今天是否下雨"是不可能事先完全确定的,它是一个随机现象.又如在冬日大雪之后,地上部分积雪融化成冰,骑自行车的人们多多少少会下车推行,其实这里也表现了人们对于"骑车通过结冰的地面是否会滑倒"这一随机现象发生的可能性的估计.冰结得很硬,表面光滑的路段,滑倒的可能性大,权衡滑倒的损害,多数老年人会选择下车推行;在雪薄而松的路面上,多数人估计滑倒可能性不大,进而继续骑车通过.然而,骑车通过冰结得硬而滑的路面,并不一定会滑倒,只是滑倒的可能性大些;骑车通过雪薄而松的路面,也并不一定不滑倒,只是滑倒的可能性小些而已.二者都是随机的,也即它们既可能发生,又可能不发生.

这类**在一组固定的条件下,既可能发生,又可能不发生的现象,就称为随机现象**.**"概率"就是描述随机现象发生的可能性大小的数学术语**.随机现象的规律性和以往我们在其他数学学科中处理的确定性的规律有所不同.对于确定性的规律来说,有了关于系统当前状态的足够信息,就能使人们对系统在未来时刻的状态作出正确和确切的预测.例如,一初速为零的物体从某一高度做自由落体,则该物体在时间 t 内下落的距离为 $s=\frac{1}{2}gt^2$(其中,g 为重力加速度),这一点不待你做完这个试验(即下落 t 时刻后)就能预知.

其实,在日常生活中,许多系统中都或多或少地蕴含着随机的成分.德国著名科学家 Heisenberg(测不准原理的提出者)在 20 世纪初就发现:即使是研究物理过程,纯粹确定性模型也是不够的,他证明了,即使在理论上,要知道物理系统的确切状态,也是不可能的,因为我们从模型中得到的只是一群原子的

平均状态,而并不能肯定地断言单个原子在未来的任何行为,这一结论从根本上影响了物理学的发展,并导致了其中随机模型的引入.从绝对的意义讲,许多通常视为确定性模型的系统,本质上都有随机性,只是在有些问题中由于随机性干扰不大,以至在所需要的精度内,就把它作为确定性的模型来处理.

基于对随机现象与可能性的认识来作出决策,正是人类智能的表现.明智的人们并不是简单地由某个事情会发生,就作决策;而是根据事情发生的可能性的大小,权衡利弊再来作决策的.例如,在交通繁忙的现代都市,我们上街去,就有发生车祸的可能,但是我们并不因此而停止上街,而是想出种种方法,定出种种规则,来使车祸发生的可能性减小到一定程度,"万一"事故发生,也只好"认倒霉"了.

其实,这里蕴含了一种不同于读者在以往研究确定性数学中经常运用的思想方法和世界观.在随机现象的研究中,我们不是期望能将复杂的随机现象简单化为确定性的,而是承认在所研究的系统中确有一些我们不能掌握或根本不知道的因素,系统中会有随机现象发生.面对这样的现实,从随机数学的观点出发,我们的态度是:既不无视随机性的存在,简单地就已经掌握的片面情况,乱作决定;也不盲目地惧怕不确定性,而踌躇不前,甚至认为无法定出什么好决策;而是找出实际情况中随机现象的规律,并基于对它们的认识,作出尽可能好的决策.然而,面对互相矛盾的各种可能结果,根本不存在一个万全的决策,这时我们往往只能给出这样的决策:以可以忍受的小概率失败的风险来换取能以大概率得到成功的效果.

概率论是随机数学的基础,它的任务是给出随机现象的数学模型,并用数学语言来描述它们,进而研究其基本规律,以便帮助人们透过表面的偶然性,找出其内在规律,并以数学的形式来描述这些规律,建立起随机现象与数学其他分支的桥梁,使得我们可以使用许多已经成熟的数学方法来研究随机现象.事实上,随着概率论的发展,它又对其他数学分支提出了许多新问题,并为它们提供了解决问题的新思路与直观的启迪.

随机数学的另一个重要分支是数理统计,它侧重从观测数据出发来研究随机现象,因而,数理统计也是以概率论为基础的,在实际应用中,数理统计是处理随机现象的最重要的工具.但是,由于篇幅所限,本书只将其作为概率论的应用实例来处理.

1.1.2 概率论的发展简史

由于在赌博与靠运气取胜的机会游戏中,最典型地体现了随机性及其规律,因此,早期的概率研究多集中于赌博问题.大约在17世纪,欧洲的数学家们就开始探索用等可能性分析(古典概型)来解决赌博中提出的一些问题.到了18、19世纪,随着当时科学的发展,人们注意到在许多科学问题和社会问题

中(如天文观测、人口统计、航海通商、误差理论、产品检查与质量控制等)有许多现象与机会游戏之间十分相似,从而由机会游戏起源的概率论,被应用到这些领域中,同时也大大地推动了概率论本身的发展,使之成为数学的一个重要分支.一般认为概率论的奠基人是瑞士数学家 Bernoulli,他建立了概率论中第一个极限定理(即 Bernoulli 大数定律),阐明了事件发生的频率稳定于它的概率.这个定理将人们对于可能性的感性认识(频率)与等可能性分析的理论结果统一起来,形成了清晰的概率的概念.随后,De Moivre 和 Laplace 又导出了第二个基本的极限定理(即中心极限定理)的原始形式,将概率论推向一个新的发展阶段.在 19 世纪末,俄国数学家 Chebyshev,Markov,Liapunov 以及 20 世纪的 Lévy,Khinchine 等人,用分析的方法建立了大数定律及中心极限定理的一般形式,科学地解释了为何在实际中遇到的许多随机变量都近似服从正态分布.进入 20 世纪后,由于大量实际问题的需要,特别是受物理学的刺激,人们开始研究随机过程.Einstein,Wiener,Lévy 等人对生物学家 Brown 在显微镜下观测到的花粉微粒的"无规则"运动进行了开创性的理论分析,提出了 Brown 运动的模型,并进行了系统的研究.与之独立地,法国数学家 Bachelier 在他的论文《投机的理论》中首次提出了 Brown 运动,并以此作为证券价格涨落的数学模型.他是近代金融数学的先驱.而 Erlang 等人则在电话流中研究了 Poisson 过程,成为排队论开创者.Brown 运动与 Poisson 过程并称随机过程两大基石.Feller 等在生物群体生长模型中提出了生灭过程,Cramer,Wiener 和 Khinchine 等人系统研究了平稳过程,Kolmogorov,Feller 和 Doob 则开创了更一般的 Markov 过程和鞅论的系统研究.至今,随机过程已经发展成为一个应用十分广泛的最重要的概率论的分支.

在概率论发展史中,特别值得一提的是 Kolmogorov 在 1933 年创立的概率论的公理化体系,他用集合论与测度论的思想,归纳总结了事件及事件的概率的最基本的性质和关系,建立了概率的公理化体系,使早期概率研究中出现的含糊与暧昧之处得以澄清,并为近代概率论奠定了严密的理论基础,从而使得近代概率论,如随机过程等复杂问题的研究有了坚实的基础,得以健康地发展.

1.2 随机事件及其概率

在掷骰子、投硬币等简单的机会游戏中,随机性体现得最为典型和明确,所以在本节中,我们从掷骰子、投硬币等试验出发来说明在概率论中是如何描述我们所关心的问题的,以及怎样利用等可能性分析来求概率.

1.2.1　从掷骰子试验到事件的描述及简单等可能性分析

例 1.1　掷一颗各面均匀的骰子,它一共可以有6种不同结果:即分别掷到的点数是1,2,3,4,5与6.我们用相应的数字代表每一个结果,并将这6个结果组成的集合记为Ω,即

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

一般地,我们把试验的每一种可能的结果称为一个**基本事件**(或称**样本点**),称所有基本事件的全体为该试验的**样本空间**,记为Ω.换句话说,在此例中Ω中有6个样本点.而"掷到奇数点"就是掷到1,3,5点,我们可用Ω的子集合$\{1,3,5\}$来代表,记为"掷到奇数点" $= \{1,3,5\}$.类似地,"掷到素数点" $= \{2,3,5\}$.假如在掷骰子的游戏中,甲乙两人约定:掷到"1"点甲赢,而掷到"6"点乙赢,其余情况须重掷,则"甲赢" $= \{1\}$,"乙赢" $= \{6\}$,"须重掷" $= \{2,3,4,5\}$.所有这些都是掷一颗各面均匀的骰子这个随机试验出现的各种事情,我们称每一个这种事情为一个**随机事件**(或简称为**事件**).从而可见,对每一个随机事件,就对应一个Ω的子集合.如果试验掷到的结果是"5"点,则"掷到素数点"、"掷到奇数点"及"须重掷"三个随机事件都发生了,但是"甲赢"、"乙赢"都没有发生.从这里我们可以一般地有:在一次随机试验得到结果后,如果事件A(作为Ω的子集合)中包含这个结果,我们就称在这次随机试验中事件A发生了,否则事件A没有发生.请注意,这里一个随机事件用日常语言来描述时,可能有许多不同的方式,例如$\{1\}$既可说是"甲赢",也可说是"掷到1点","掷到最小的点数"等等,但是实质上,它们根本就是一回事.

从数学的角度看,与试验有关的每一件"事情"均可描述成样本空间Ω的一个子集,反之亦然.在一次试验中,倘若我们得到一个结果$\omega \in \Omega$,那么,如果$\omega \in A$,则我们就称事件A发生了;否则就说A没有发生.

特别应该说明的是,Ω作为它自己的一个子集合也是一个特殊的事件,无论试验结果是什么,它总是一定会发生的,所以,我们称Ω为**必然事件**.而它的"反面"是空集$\varnothing$,称它为**不可能事件**,因为无论出现什么试验结果,它都不会在空集中,也即不可能事件一定不会发生.

现在我们来分析上述这个随机试验中各随机事件的概率,在这个试验中,6个基本事件是对称的,所以它们的概率应彼此相同,如果我们将一定发生的事件(即必然事件Ω)的概率定为1,则每一个基本事件的概率应为$\frac{1}{6}$,因为它是6个等概率的基本事件的总和(概率为1)中的1份.由此,类似地,"掷到素数点"的概率应该是$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$(6个基本事件中,3个之一发生了,它就发生),同样"掷到奇数点"的概率应为$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

将上面这些表述用数学符号来表达就变得简洁而准确：令 $A \subset \Omega$（即 A 是 Ω 的一个子集合，也就是一个事件），$P(A)$ 表示事件 A 的概率. 由于 Ω 中每个基本事件都有相同的概率 $\frac{1}{6}$，于是

$$P(\{2,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(\{1,2,3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

一般地，我们有：

$$P(A) = \frac{\# A}{6} \qquad (\text{其中}, \# A \text{ 表示集合 } A \text{ 中的样本点数})$$

下面我们再来看一个稍微复杂一点的例子.

例 1.2 同时掷两颗骰子，我们关心的是将会出现怎样的结果. 不妨假设一颗骰子是红色的，另一颗是白色的. 那么，试验每一可能出现的结果可以用一个有序对 (ω_R, ω_W) 来表示，其中 ω_R 为 1 至 6 之间的一个数，用它来表示红色骰子出现的点数；同样，ω_W 表示白色骰子出现的点数. 例如，(1,2) 表示红色骰子出现的点数为 1，而白色骰子出现的点数为 2 这一结果，容易看出，该试验共有 36 个可能的结果. 但一次试验中究竟会出现哪一个结果，在投掷前，我们是无法预知的，它是一个随机试验.

本试验的样本空间（即基本事件（或样本点）的全体 36 个结果的集合）Ω 为

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_R, \omega_W) : \omega_R, \omega_W = 1,2,3,4,5,6\} \\ &= \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,1),\cdots,(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

这里，上一个表达式是第二个具体表达式的一个比较抽象的严格表达方式. 对于元素很多的集合，这种表达方式可使问题表达得简洁而准确. 读者应学会这种表达方法，它将有助于对于复杂问题的分析与思考.

考虑事件 A："两颗骰子的点数相同"，此事件就由 6 个基本事件组成，它是样本空间 Ω 的一个子集：

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

如果，在一次试验中，我们掷到 (3,3)，我们就说 A 发生了. 如果我们掷到了 (3,5)，就说 A 没有发生.

再来考虑事件 B："两骰子出现的点数之和为 8"，则

$$B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

显然，"两骰子出现的点数之和不超过 12" $= \Omega$，它是必然事件. "两骰子出现的点数之和超过 12" $= \varnothing$，它是不可能事件.

现在，让我们来分析这个试验中各种事件的概率. 由于两个骰子完全相

同,各面也完全对称,所以任何两个结果(如(1,1)和(5,6))都是等概率的.从而,每一种结果发生的概率就都是$\frac{1}{36}$.进而,我们有

$$P(A)=\frac{\#A}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\qquad P(B)=\frac{\#B}{36}=\frac{5}{36}$$

上面两个例子中利用等可能性分析求得概率的方法,也称为**古典概型**(或**等可能概型**).我们归纳它的一般原则如下:**如果一个随机试验的全部结果(基本事件)一共只有有限个,设为 n 个,而且它们都具有相同的可能性,则称这个随机试验为古典概型,且其中的任意一个事件 A 的概率是**

$$P(A)=\frac{\#A}{n}\quad(\text{其中 }\#A\text{ 表示}A\text{ 中的基本事件(或样本点)个数})$$

1.2.2　事件的运算

既然事件是 Ω 的子集,因此我们可以用集合的运算与包含等关系来表达更复杂的事件及其关系.

假设 A,B 为试验的两个事件,作为 Ω 的子集,则 $A\cup B$(集合 A 与集合 B 的并)表示的事件是由那些 A 或 B 中的所有基本事件所组成的事件,称为事件 A 与 B 的**和事件**."在某次试验中事件 $A\cup B$ 发生",则这意味着在该次试验中,事件 A 与 B 至少有一个发生.

继续以掷两个骰子的试验为例,样本空间 Ω 和事件 A 和 B 如前所述,则有

$$\begin{aligned}A\cup B=\{&(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),\\&(6,6),(2,6),(3,5),(5,3),(6,2)\}\end{aligned}$$

同和事件类似,我们用 $A\cap B$ 表示既属于 A 又属于 B 的所有基本事件组成的事件,也称为事件 A 与 B 的**交事件**.在此例中,$A\cap B=\{(4,4)\}$.$A\cap B$ 常简记为 AB.

A^C(A 的余集合)表示 Ω 中那些不在 A 中的所有样本点的全体所组成的事件,也称为 A 的**对立事件**.A^C 发生,当且仅当 A 不发生.例如在上例中

$$\begin{aligned}A^C&=\{(\omega_R,\omega_W)\in\Omega:\omega_R\neq\omega_W\}=\{(\omega_R,\omega_W)\in\Omega:(\omega_R,\omega_W)\notin A\}\\&=\text{“两颗骰子的点数不相同”}\end{aligned}$$

最后,我们来看事件之间相互关系的一些概念,当 $A\cap B=\varnothing$,即事件 A 和 B 没有共同的基本事件,因而,在一次试验中 A 与 B 不可能都发生,所以我们称这时 A 与 B **互不相容**.当 $A\subset B$ 时,由于事件 A 中的基本事件都包含在 B 中,事件 A 发生必然蕴含着 B 的发生,所以称事件 A **包含于**事件 B.A 包含于 B 也可说成 B 包含了 A,如果 A 包含于 B,同时 B 包含于 A,那么 A 与 B 必定是同一个集合,所以 $A=B$.我们称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **互不相容,如果它们两两互不相容**.

事件的运算及关系就是集合的运算与关系，所以集合运算的全部规则对事件运算同样适用，最主要的有下列性质：

(1) 交换律： $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律： $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) 对偶律(或 De Morgan 律)：

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \qquad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

用集合的观点来观察处理事件，对我们理解事件间的关系是极为重要的，也是走向概率公理化定义的第一步.

1.2.3 加法公理

现在我们来考察事件和的概率与它们各自的概率的关系. 先来看古典概型，如果事件 A 与 B 互不相容，则它们的和中所含的基本事件数正是它们各自所含的基本事件数的和，从而它们各自的概率之和应该等于它们和的概率. 由归纳法，这个规则对多个事件也同样适用：**如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

我们称之为**加法公理**.

下面我们以抛硬币试验为例，来说明上述加法公理的实质和应用.

例 1.3 将一均匀硬币连续地抛掷 n 次，用 $\omega_i = 1,0$ 分别表示第 i 次抛掷硬币正面向上及反面向上. 于是此试验全部可能的结果是

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n); \omega_i = 1,0; i = 1,2,\cdots,n\} \\ &= \{(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),(1,1,\cdots,0),\cdots,(1,1,\cdots,1)\}\end{aligned}$$

显然，Ω 中一共有 2^n 个基本事件，它们具有相同的可能性. 从而古典概型仍然适用. 于是我们有

$$P(A) = \frac{\#A}{2^n} \quad (\text{其中 } \#A \text{ 表示} A \text{ 中的基本事件个数})$$

令

$$p_k = P(\text{“正面首次出现在第 } k \text{ 次抛掷”})$$

易见

$$p_n = P(\{(0,0,\cdots,0,1)\}) = 2^{-n}$$

$$p_{n-1} = P(\{(0,0,\cdots,0,1,0),(0,0,\cdots,0,1,1)\}) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$