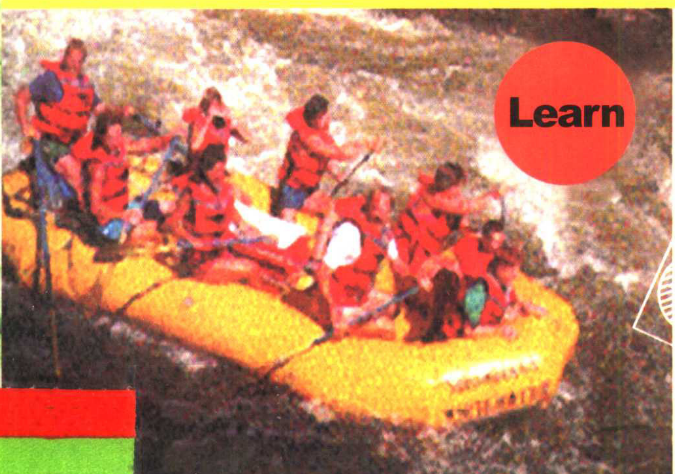
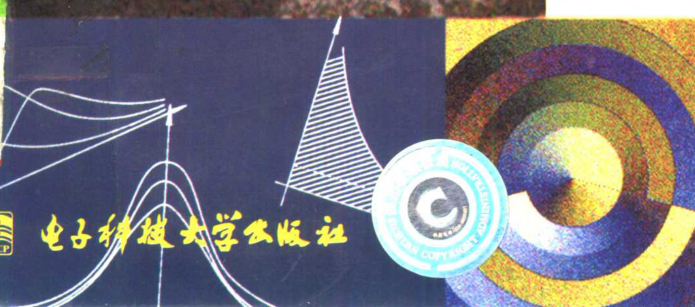
国家工科数学课程教学基地系列教材

概率论与数理统计

电子科技大学应用数学系 编





电子科技大学出版社

国家工科数学课程教学基地系列教材

概率论与数理统计

电子科技大学应用数学系编

电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是在我校多次使用的自编教材《概率论与数理统计》的基础上修改而成。在内容上较“高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求”有所加深和扩充，并广泛、密切地联系实际应用。

本书内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析。各章有习题，书末附有习题答案和有关图表。

本书可作为高等工科院校的教材，也可供工程技术人员和自学者参考。

声 明

概率论与数理统计

电子科技大学应用数学系编

出 版：电子科技大学出版社
(成都建设北路二段四号 邮编：610054)
责任编辑：张 俊
发 行：新华书店经销
印 刷：德阳新华印刷厂
开 本：850×1168 1/32 印张 12.75 字数 328 千字
版 次：1999 年 8 月第一版
印 次：1999 年 8 月第一次印刷
书 号：ISBN 7—81065—200—1/O・9
印 数：1—7500 册
定 价：16.00 元

前　言

本书是在1995年7月出版的我校自编教材《概率论与数理统计》的基础上修改而成的。可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、管理等各专业概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员和自学者参考。

本书内容包括概率论及数理统计两部分，力求做到两者并重和有机结合；在作为工科教材的条件下，尽量使概念准确、系统完整；重视基本理论与基本运算，着重对概率统计思想方法的阐释；强调概率统计方法的客观背景和实际应用（每章有一节专门讲应用和实例）；例题、习题与教材内容紧密配合；书后有习题答案和有关图表。

全书讲授约需68学时，根据不同学时和不同层次的要求，讲授内容便于取舍。

本书由朱济生主编并负责统稿。编者有徐全智（第一至五章）、朱宏（第六至十章）。

本书编写过程中得到我校国家工科数学课程教学基地和有关老师的大力支持和帮助，我们表示衷心感谢。由于编者水平有限，缺点和不当之处在所难免，请同行专家和读者批评指正。

编　者

1999年6月

目　录

第一章　概率论的基本概念

§1.1　随机事件与随机变量

一、随机现象及其统计规律

在自然科学和社会科学的研究中，随着人们认识的不断发展，发现客观现象大体可分为两大类：确定性现象和非确定性现象．

确定性现象的共同特点是在准确重复某些条件时，它的结果总是确定的；或者根据它过去的状态，在一定条件下完全可以预言将来的发展情况．例如，同性电荷必然相互排斥；在标准大气压下纯水在100℃时必沸腾，在0℃时必结冰；在恒力作用下的质点作等加速运动等等．研究确定性现象的规律性，可借助于诸如数学分析，几何、代数、微分方程等我们熟悉的数学工具．

非确定性现象具有事前不可预言性，即在相同条件下对其做重复试验，每次结果未必相同，或者知道它过去的状态，事前却不能预知未来的情况，譬如：

1．抛一枚均匀硬币若干次，每次抛之前都不知是否会出现正面（国徽面）．

2．仪器上某种型号的电子元件使用时间已达300小时，该元件还能使用多少小时？

3．一名炮手，使用同一门炮，按同样射击条件（初始速度 v_0，发射角 θ 与弹道系数 c）进行射击，但射击前无法预测每次弹着点的确切位置．

像上面各例所涉及的非确定现象普遍存在，我们称这种不确

定现象为**随机现象**.

为什么在随机现象中,在相同的基本条件下,试验或观测结果会不完全一样呢?这是因为除了基本条件之外,客观上还存在许多变化着的偶然因素,它们中每一个对试验或观测的结果影响均很小,但它们的综合影响就会使得试验或观测结果产生差异. 譬如,在大炮射击时,炮弹的飞行条件(风力、气压、温度、湿度等),弹药的成分以及射手的发射状态都不可能完全一致,诸多因素的影响,造成弹着点的偶然性偏差.

对于随机现象,虽然人们事先无法预料个别试验的确切结果,但人们经过长期实践和深入研究后发现,在大量重复试验和观察下,随机现象的结果会呈现出某种规律性,历史上不少的科学实践验证了这种规律性十分明显和稳定. 例如,抛一枚均匀硬币,无法肯定一次抛掷会出现正面,但多次重复抛同一枚硬币,就会发现明显的规律性,即出现正面的次数约占抛掷总数的一半. 表 1.1.1 是历史上几位著名学者的实验记录.

表 1.1.1

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数	$\frac{m}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.5181
德·摩根	2048	1048	0.5117
德·摩根	2048	1017	0.4966
德·摩根	2048	1039	0.5073
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

由上述试验记录可以看出，随着抛掷次数的增多，比值$\frac{m}{n}$在0.5附近摆动．

随机现象在个别试验中其结果呈现不确定性，在大量重复试验中其结果又具有规律性，我们称大量同类随机现象所呈现的固有规律为随机现象的统计规律性．

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科.

二、随机试验与随机事件

我们将对社会现象和自然现象进行观察和各种科学实验统称为试验．

具有以下特征的试验称之为**随机试验**：

1. 它可在相同条件下重复进行；
2. 试验的全部可能结果(不止一个)，是在试验前就明确的；
3. 一次试验结束之前，不能准确预知哪一个结果会出现．

例 1.1.1 抛一枚硬币一次，观察出现正反面情况，这是随机试验，记为E_1.

试验E_1的可能结果有两个：正面向上和正面向下，试验前不知会出现正面向上还是正面向下，并且重复抛掷同一枚硬币，使E_1可以在相同条件下重复进行．

例 1.1.2 任意抽取100只同一型号的晶体管，记录其中的不合格品个数．这也是随机试验，记为E_2.

在100只晶体管中的不合格品个数可能是0，或1，或2，……或100，但完成测试前，不能肯定究竟有多少个不合格品，而且试验E_2也可在相同条件下重复进行．

类似地，以下各试验均为随机试验：

E_3：检查一条生产线在24小时期间生产出的次品个数．

E_4：在一批晶体管中任取一只，测试它的电流放大系数．

E_5:观察一枚新发射的导弹,记录这枚导弹在时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 距地面的高度.

E_6:测量某团体人员的身高。

我们通过研究随机试验来研究随机现象,本书中所讨论的试验都是指随机试验.进行一次试验,有这样或那样的事情发生,它们各有不同的特性,彼此之间又有一定的联系,称随机试验中可能发生也可能不发生的事情为**随机事件**,简称**事件**,通常用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

例 1.1.3 在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选取一个,可有十种不同的结果:

$$A_i = \{\text{取得的数是 } i\}, \quad i = 0,1,2,\cdots,9$$

还有其他的可能结果,例如

$B=\{$取得的数是奇数$\}$,

$C=\{$取得的数大于 5$\}$,

$D=\{$取得的数是 3 的倍数$\}$.

$B, C, D, A_i, i=0,1,2,\cdots,9$ 都是随机事件.

例 1.1.4 测试电视显像管的使用寿命,用 X 表示其寿命(单位:小时),对任意实数 $x>0$, $A=\{X=x\}$ 表示随机事件"显像管的寿命为 x",另外

$$B = \{X < 6000\}, \quad C = \{X > 5500\}$$

分别表示"显像管寿命不到 6000 小时"和"显像管寿命超过 5500 小时",B 和 C 也是随机事件.

在随机试验中必然发生的事件称为**必然事件**,用符号 Ω 表示.在随机试验中必然不发生的事件称为**不可能事件**,用符号 ϕ 表示.譬如,例 1.1.4 中若 $x\leqslant 0$,则$\{X=x\}$是不可能事件,而$\{X\geqslant 0\}$是必然事件,把必然事件和不可能事件看作随机事件,对我们研究问题是有益的.

三、样本空间与随机变量

让我们分析例 1.1.3 中的诸事件，事件 B 可看成由事件 A_1，A_3，A_5，A_7，A_9 组合而成，C 和 D 也是由部分 A_i 组成，而 A_i，$i=0$，$1,2,\cdots,9$ 这十个事件具有“最简单”的“不可分”形式．另外，每做一次例 1.1.3 中的试验，十个事件 A_i，$i=0,1,\cdots,9$ 中必有一个发生，且不可能有两个同时发生．类似地，例 1.1.4 中的事件$\{X=x\}$也是形式最简单的事件，并且每测试一只显像管，它的实际使用寿命只能取一个确定实数．

称在随机试验 E 中必发生一个且仅发生一个的最简单事件为试验 E 的**基本事件**，由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**．

例 1.1.3 中的 A_i，$i=0,1,2,\cdots,9$ 和例 1.1.4 中的$\{X=x\}$，$x>0$ 都是基本事件，其他事件则是复合事件．

一个事件是否为基本事件是相对于试验目的而言的．如试验 E_6，若试验的目的仅是测量人的身高，对任意实数 $x>0$，事件“测得人的身高是 x”都是基本事件，这时试验 E_6 有无穷多个基本事件．若测量人的身高是为了判断乘车是否需要购全票、购半票或免票，这时仅有三个基本事件．

我们用集合表示事件，对于随机试验 E 的每一基本事件，用一个只包含一个元素 ω 的单元素集$\{\omega\}$表示；由若干基本事件组成的复合事件，则用对应的若干个元素所组成的集合表示；由全体基本事件所对应的全部元素组成的集合，称为随机试验 E 的**样本空间**，称样本空间的每一个元素 ω 为**样本点**．若 $\omega\in A$，表示事件 A 发生．

样本空间看作事件是必然事件，样本空间仍用 Ω 表示．试验 E 的任一事件都是样本空间的子集，记为 $A\subset\Omega$.

试验 E_1 有两个基本事件

$$\{\omega_1\}=\{正面\},\quad \{\omega_2\}=\{反面\}$$

则 E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}=\{$正面,反面$\}$.

例 1.1.3 中的试验 E 有十个基本事件:$A_i=\{\omega_i\},\omega_i=i,i=0,1,2,\cdots,9$,则 E 的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}$$

而且随机事件

$$B=\{1,3,5,7,9\}$$

$$C=\{6,7,8,9\}$$

$$D=\{3,6,9\}$$

都是样本空间 Ω 的子集.

其他试验 E_i 的样本空间 Ω_i 分别是

$\Omega_2=\{0,1,2,\cdots,100\}$

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,N\}$,其中$N$为24小时内所生产的产品总数

$\Omega_4=\{\mu;\mu>0\}$,μ 为电流放大系数

$\Omega_5=\{(h_1,h_2,\cdots,h_n):h_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\}$

$\Omega_6=\{x:x>0\}$

样本空间这个概念能使我们更好地把握随机现象的本质,使研究结果更具广泛性. 例如,仅包含两个样本点的样本空间能作为抛硬币出现正反面的模型,也可用来描述射击是否"中靶",产品检验出现"合格品"及"不合格品"等等类似问题,尽管问题的实际内容各色各异,但应用样本空间后却能归结为相同的概率模型.

例 1.1.3 和例 1.1.4 中随机试验的结果直接对应一个数值. 但有些随机试验的结果不一定是数值结果,如抛一枚均匀硬币的结果是"正面"和"反面". 为了深入研究随机现象,需要将随机试验的结果数量化,即用一个变量来描述试验结果,从而用量化分析方法来研究随机现象的统计规律.

例 1.1.5 将一枚均匀硬币连续抛两次,用 H、T 分别表示硬币的正、反面,其样本空间为

$$\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$$

可令 $X(TT)=0, X(HT)=X(TH)=1, X(HH)=2$

X 的实际意义是两次抛掷中正面 H 出现的次数，它是定义在样本空间 Ω 上的变量，称 X 是一个**随机变量**，X 完整地描述了该试验的全部结果．

例 1.1.6 某射手连续向一目标射击，直至命中为止，令

$\{\omega_i\}=\{$前 $i-1$ 次均未命中，第 i 次命中目标$\}$，$i=1,2,\cdots$

则试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$

射击次数 Y 为

$$Y=Y(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1\\ 2, & \omega=\omega_2\\ i, & \omega=\omega_i\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

它是样本点 ω 的函数，此函数的取值取决于试验的结果．Y 也是一个随机变量．

通常对随机变量 X，记

$$\{X\leqslant x\}=\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}$$
$$\{X=x\}=\{\omega: X(\omega)=x\}$$

它们都是随机事件．如例 1.1.5 中的随机变量 X 有

$$\{X=0\}=\{TT\},\quad \{X=2\}=\{HH\}$$

四、事件的关系与运算

事件是样本空间的子集，因而事件间的关系与运算可按照集合论中集合之间的关系和运算来处理．下面给出这些关系和运算在概率论中的提法和含义．

设试验 E 的样本空间为 Ω，而事件 $A, B, A_k, k=1,2,\cdots$ 是 Ω 的子集．

1. 包含关系：$A\subset B$，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**．

在试验 E_2 中，考虑事件

$A=\{100$ 只晶体管中恰有 3 只不合格$\}$

$B=\{100$ 只晶体管中不合格品数不超过 5 只$\}$

则有 $A\subset B$.

对例 1.1.4 中电子显像管的使用寿命 X，当实数 $x_1<x_2$，则 $\{X\leqslant x_1\}\subset\{X\leqslant x_2\}$.

对任一事件 A，都有 $\phi\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

2. 和事件：事件 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和，即当且仅当 A 和 B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

例 1.1.7 在试验 E_3 中，令

$A=\{$产品中有次品$\}$

$A_i=\{$产品中有 k 件次品$\}$，$k=1,2,\cdots,N$

则
$$A=\bigcup_{k=1}^{N}A_k$$

若将此试验改为在生产线上不限时地进行检查，直到检查出一件次品为止，若

$B=\{$检查出次品$\}$，

$B_k=\{$第 k 次检验查到次品$\}$

则显然有
$$B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$$

3. 积事件：事件 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积. 即当且仅当 A 和 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生，$A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1A_2\cdots A_n$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

在例 1.1.3 中

$$B \cap C = \{\text{取得的数是奇数}\} \cap \{\text{取得的数大于 5}\}$$
$$= \{\text{取得的数是 7 或 9}\}$$
$$B \cap D = \{\text{取得的数是奇数}\} \cap \{\text{取得 3 的倍数}\}$$
$$= \{\text{取得的数是 3 或 9}\}$$

例 1.1.4 中的电子显像管的使用寿命 X，有

$$\{X > 5500\} \cap \{X \leqslant 6000\} = \{5500 < X \leqslant 6000\}$$

4. 互不相容事件：若 $A \cap B = \phi$，称事件 A 与 B 互不相容（或称它们是互斥的）．即指事件 A 和事件 B 不能同时发生．

任意事件 A 和不可能事件 ϕ 互不相容．

例 1.1.4 中事件 $\{X=5500\}$ 与 $\{X=6000\}$ 是互不相容事件．而事件 $\{X>6000\}$ 和 $\{X<5500\}$ 也是互斥的．

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容（互斥），则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容（两两互斥）．

事件列 $A_k, k=1,2,\cdots$ 互不相容是指事件列的任意有限个事件互不相容．

例 1.1.3 中十个事件 $A_i = \{\text{抽得数“}i\text{”}\}$ 是互不相容的．

一般地，根据基本事件的定义可知，同一随机试验的基本事件都是互不相容的．

5. 对立事件：若 $A \cap B = \phi$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**（或称它们互为**逆事件**）．这是指对每次试验而言，事件 A 与 B 中必有一个发生，并且仅有一个发生．

事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，即做一次试验“A 不发生”这一事件．

在例 1.1.3 中，事件 $B = \{\text{取得奇数}\}$，其对立事件为 $\overline{B} = \{\text{取得偶数}\}$．

例 1.1.4 中，因为

$$\{X > 6000\} \cap \{X \leqslant 6000\} = \phi$$

且

$$\{X > 6000\} \cup \{X \leqslant 6000\} = \Omega$$

它们互为对立事件，即有

$$\overline{\{X > 6000\}} = \{X \leqslant 6000\}$$

和

$$\overline{\{X \leqslant 6000\}} = \{X > 6000\}$$

6. **差事件**：事件 $A-B=\{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的**差事件**．当且仅当 A 发生而 B 不发生时事件 $A-B$ 发生．

按照对立事件的概念，有

$$A - B = A\overline{B}, \quad \overline{A} = \Omega - A$$

在例 1.1.4 中，对实数 $x_1 < x_2$，有

$$\{X \leqslant x_2\} - \{X \leqslant x_1\} = \{X \leqslant x_2\} \cap \overline{\{X \leqslant x_1\}}$$

$$= \{x_1 < X \leqslant x_2\}$$

在上述概念中，我们将样本空间看成全集，事件的各种关系和运算对应样本空间子集间的相应关系和运算，故我们可以用集合论中**文氏图**(Venn 图)来表示事件的关系和运算，如图 1.1.1 所示．

在进行事件运算时，常用到下述运算规律：

1. 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$；
2. 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A(BC) = (AB)C$；
3. 分配律：$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$，

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

   $A(B-C) = (AB)-(AC)$；
4. 德·摩根(De Morgan)公式：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

其中第 3 条和第 4 条可以推广到有限个或可列无穷个事件的情形，如

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \quad \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k,$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k.$$

例 1.1.8 证明：$A-B=A-AB, (A \cup B)-B=A-B$.

证：$A-B = A\overline{B} = A(\Omega - B) = A\Omega - AB$