

75
11
工科大学数学丛书

线 性 代 数

蔡高厅 丁学仁 编

天津大学出版社

1988年

内 容 提 要

本书是按照国家教委工科数学课程指导委员会1987年颁发的《数学课程教学基本要求》(线性代数部分)编写的教科书,可作为高等工业学校各专业《线性代数》课程教材。

全书包括行列式, 矩阵, 线性方程组, 矩阵的相似对角化, 线性空间与线性变换, 欧氏空间与二次型等六章。每章附有练习题, 书末附有习题的参考答案。

工科大学数学丛书

线性代数

蔡高厅 丁学仁 编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本: 850×1168 毫米 $1/32$ 印张: $9\frac{1}{8}$ 字数: 230千字

1988年9月第一版 1988年9月第一次印刷

印数: 1—11030

ISBN 7-5618-0066-5

0 · 5

定价: 1.50元

前 言

自1981年天津大学开始使用根据教育部颁发的《工程数学教学大纲(草案)》所编写的《线性代数》校用教材。经过五年的教学实践,现又按照国家教委“工科数学课程教学指导委员会”于1987年提出的《数学课程教学基本要求》中的线性代数部分,对上述教材进行了修订,现由天津大学出版社予以出版。全书所需教学时数为50学时,适用于高等工科院校各专业。

由于线性问题广泛存在于技术科学的各个领域,某些非线性问题在一定条件下又可以转化为线性问题处理。特别是电子计算机日益普及的今天,计算高阶行列式的值,解多个未知量的大型线性方程组,求矩阵的特征值和特征向量,把对称矩阵进行对角化等已经成为工程技术人员经常遇到的课题,因此本书的主要教学内容为行列式、线性方程组、矩阵的相似对角化等基本问题。

通过线性代数的教学,不仅要使学生获得线性代数的基本知识和掌握基本计算方法,而且应对线性代数的一些抽象概念和基础理论有一定的了解。这样才能融汇贯通地应用线性代数的工具解决理论上和实践上所遇到的各种问题。因此本书的后半部分介绍了线性空间,线性变换,欧氏空间等抽象概念和必要的基础理论,并且把二次型放在欧氏空间一章里讲授,以便利用欧氏空间的某些结论,使教学内容更为紧凑,事半功倍。书中带*号的内容供选择讲授。

本书承蒙天津师范大学数学系侯国荣教授审核,提出了许多有益的意见和建议,在此表示衷心的感谢。由于水平所限,书中的不当和失妥之处一定不少,恳请读者批评指正。

编 者

1987.10.

目 录

第一章 行列式	(1)
第一节 排列与逆序.....	(1)
第二节 n 阶行列式的定义	(3)
第三节 行列式的性质.....	(7)
第四节 行列式按一行(列)展开的性质.....	(15)
第五节 拉普拉斯定理.....	(25)
第六节 克莱姆法则.....	(29)
小 结.....	(34)
练习一.....	(38)
第二章 矩阵	(44)
第一节 矩阵的概念.....	(44)
第二节 矩阵的运算.....	(45)
第三节 分块矩阵.....	(59)
第四节 方阵的行列式、逆矩阵.....	(67)
第五节 初等变换与初等矩阵.....	(79)
第六节 矩阵的秩.....	(91)
小 结.....	(97)
练习二.....	(100)
第三章 线性方程组	(109)
第一节 n 维向量	(109)
第二节 线性方程组的解法	(127)
第三节 线性方程组解的结构	(133)
小 结	(141)
练习三	(144)

第四章 矩阵的相似对角形	(149)
第一节 相似矩阵	(149)
第二节 特征值和特征向量	(154)
第三节 矩阵的相似对角形	(159)
小 结	(173)
练习四	(174)
第五章 线性空间与线性变换	(178)
第一节 线性空间与子空间	(178)
第二节 维数、基与坐标	(186)
第三节 线性空间上的线性变换	(196)
第四节 线性变换的矩阵	(201)
小 结	(212)
练习五	(214)
第六章 欧氏空间与二次型	(210)
第一节 向量的内积	(213)
第二节 标准正交基	(227)
第三节 正交变换	(232)
第四节 实对称矩阵的相似对角化	(239)
第五节 二次型及其标准形	(247)
第六节 二次型的分类	(257)
小 结	(265)
练习六	(268)
练习答案	(272)

第一章 行列式

行列式是由解线性方程组而建立起来的一个重要的数学工具。本章从分析 2, 3 阶行列式的结构出发, 引进 n 阶行列式的定义, 介绍 n 阶行列式的性质和计算方法, 最后给出用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

第一节 排列与逆序

为了分析 2, 3 阶行列式的结构, 以便引入 n 阶行列式的定义, 本节首先介绍排列与逆序的概念。

定义1.1 由 n 个数码 1, 2, 3, ..., n 组成的一个有序数组称为这 n 个数的一个 n 阶全排列, 简称为 n 阶排列。

例如: 123, 321, 都是 3 阶排列。

1234, 2341, 都是 4 阶排列。

n 个数码构成的 n 阶排列总共有 $n!$ 个。这是由于, 第一位置的数字有 n 种可能取法, 第二位置的数字有 $n-1$ 种可能取法, 第一, 二两位置的数字就有 $n(n-1)$ 种可能的取法, 如此推下去可知 n 阶排列共有 $n!$ 个。

在 n 阶排列中只有 123... n 这个 n 阶排列是依数字由小到大的自然顺序排列的 (称为标准排列), 其它排列都破坏了这种自然顺序, 由于存在这种现象, 因而有下面的定义。

定义1.2 在一个 n 阶排列中, 若有某一较大数字 i 排在某一较小数字 j 的前面, 便称 i, j 这两个数字构成一个逆序, 排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$ 。

例如在 4 阶排列 2431 中, 排在 1 前面有三个数, 都与 1 构成逆序, 2 排在最前面, 与比它大的数都不构成逆序, 排在 3 前面的只有一个数 4 比它大, 构成一个逆序, 4 与它前面的任何数都不构成逆序, 所以

$$\tau(2431) = 3 + 0 + 1 + 0 = 4,$$

同样有 $\tau(2143) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2,$

$$\tau(25314) = 3 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5.$$

通常把逆序数是奇数的排列称为奇排列, 逆序数是偶数的排列称为偶排列。

关于 n 阶排列有如下性质:

性质 1 将一个排列中的任意两个数对换, 则排列改变奇偶性。

证明 分两种情形:

(1) 对换的两数相邻时, 设排列

$$\dots j k \dots$$

经 j 与 k 的对换变成

$$\dots k j \dots \quad (\dots \text{表示不动的数})$$

显然在对换前后的两个排列中, k , j 与 “...” 表示的各数所构成的逆序都相同, 而当 jk 变成 kj 时, 这两个数之间的逆序不是增加 1 ($j < k$ 时) 便是减少 1 ($j > k$ 时), 所以对换前后排列的奇偶性改变。

(2) 对换的两数间有 s 个数时, 设排列

$$\dots j i_1 i_2 \dots i_s k \dots$$

经 j , k 对换后变成

$$\dots k i_1 i_2 \dots i_s j \dots$$

后一排列可以看作前一排列经以下相邻对换得到。

将 j 与 i_1 对换后再与 i_2 对换, 这样依次对换下去直到与 i_s 对换后再与 k 对换 (共进行 $s + 1$ 次相邻两数的对换), 得到

$$\dots i_1 i_2 \dots i_s k j \dots$$

然后 k 与左面的数连续作 s 次相邻两数的对换就得到

$$\dots ki_1 i_2 \dots i_s j \dots$$

这样，后一排列可以看成前一排列经 $2s + 1$ 次相邻两数的对换得到，而每一次相邻两数的对换都改变排列的奇偶性，所以奇数次相邻两数的对换也改变排列的奇偶性。

性质 2 任一 n 阶排列与排列 $12 \dots n$ 可经一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。

证明 用数学归纳法证之。

结论对 2 阶排列显然成立。

假设结论对 $n - 1$ 阶排列成立，现证明对 n 阶排列也成立。

设 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是一个 n 阶排列，首先作 i_n 与 n 的对换（若 $i_n = n$ 此步可略去），则排列变成

$$i'_1 i'_2 \dots i'_{n-1} n.$$

由归纳假设， $n - 1$ 阶排列 $i'_1 i'_2 \dots i'_{n-1}$ 可经一系列对换变成 $12 \dots (n - 1)$ ，从而把 $i_1 i_2 \dots i_n$ 变成排列 $12 \dots n$ ，反之按相反顺序施行上述对换就可将排列 $12 \dots n$ 变成排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 。

又因 $12 \dots n$ 是偶排列，所以由性质 1，当 $i_1 i_2 \dots i_n$ 是奇（偶）排列时，必须经奇（偶）数次对换方能变成偶排列，因而所作对换个数与排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 有相同的奇偶性。

第二节 n 阶行列式的定义

有了排列与逆序等概念，就可以分析 2，3 阶行列式的结构规律，并利用这些规律定义 n 阶行式式。

由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

以 3 阶行列式为例可以看出如下规律:

(1) 3 阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积。

(2) 当每项中各元素的行指标都取标准排列时, 其列指标都是 1, 2, 3 的一个排列, 且每一 3 阶排列都对应 3 阶行的一个项, 所以 3 阶行列式共有 3! 项。

(3) 对于形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的项, 其正负符号与它的列指标所成的排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数间有以下关系: 当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为奇数时, 该项取负号; 当 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为偶数时, 该项取正号。

同样, 2 阶行列式也具有这些规律, 据此可得出 n 阶行列式如下定义。

定义 1.3 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式是一个数, 它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (j_1j_2\cdots j_n \text{ 为一 } n \text{ 阶排列})$$

的代数, 每一项 (即每个乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$) 的符号规定如下: 当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是偶数时, 该项取正号; 当 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是奇数时, 该项取负号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这里“ $\sum$ ”表示对一切 n 阶排列求和。

由定义可知, n 阶行列式由 $n!$ 项组成, 当 $n=2, 3$ 时, 就给出前面所说的 2, 3 阶行列式的定义, 所以 n 阶行列式是 2, 3 阶行列式的推广, 特别当 $n=1$ 时, 1 阶行列式 $|a|$ 就等于 a 。

例1 计算下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由 n 阶行列式定义可知, 为了计算 n 阶行列式 D , 首先需作出所有位于不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由于 D 中有许多元素是零, 所以只需求出上述一切项中不为零的项即可。

由于第一行中除去第一列元素 a_{11} 外都是零, 所以 D 中除去形如

$$a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1)$$

的项外, 其它项都是零。又由于第二行中除去 a_{21}, a_{22} 外其它元素都是零, 而在形如 (1) 的项中, 不能取 $j_2=1$, 这是由于 a_{11} 与 a_{21} 是同列元素所致, 所以 D 中不等于零的项只能是形如

$$a_{11} a_{22} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

的项, 如此继续下去, 可知 D 中不为零的项只可能是

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

而以项的列指标所成的排列为偶排列（逆序为零）故取正号，由定义有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积，特别是

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

同理可求得上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

以及行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1, n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2, n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1, 1} & a_{n-1, 2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n1}$$

在行列式的定义中, 为了讨论方便而把每一项的 n 个元素的行指标写成标准排列, 假设

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

是 n 阶行列式的任意一项, 则由乘法的可交换性, 可把该项的列指标所成的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 经一系列对换 (设为 t 次) 变成标准排列, 相应的行指标便经 t 次对换变成排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 即

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \cdots a_{i_n i_n}$$

由于 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 经 t 次对换变成标准排列 $12 \cdots n$, 根据排列的性质 2 可知, t 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 有相同的奇偶性, 与此同时, $12 \cdots n$ 经 t 次对换变成排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 同理 t 与 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 有相同的奇偶性, 即

$$\begin{aligned} & (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \cdots a_{i_n i_n} \end{aligned}$$

因此行列式可以等价地定义为:

$$D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \cdots a_{i_n i_n}$$

第三节 行列式的性质

由行列式的定义易知, 按定义计算 n 阶行列式共需计算 $n!$ 项, 每一项需作 $n-1$ 次乘法, 所以共需作 $(n-1) \cdot n!$ 次乘法, 当 n 相当大时, 这是一个很大的数字, 例如一个 20 阶行列式, 就需作

$$19 \times 20! = 4622513 \times 10^{13}$$

次乘法, 即使用一台每秒能作 1 亿次运算的电子计算机计算, 也至少需用 14700 年才能算出结果, 这样即便算出结果也没有什么意义。因此, 仅仅依靠定义计算行列式是不现实的。为此, 必须进一步研究行列式的性质, 以便利用它的性质将复杂的行列式转化为较简单的行列式 (例如上三角行列式) 来计算。

性质1 行列式的行变成同号数的列, 其值不变。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D'$$

并把 D' 称为 D 的转置行列式。

证明 设 D' 的 i 行 j 列元素为 b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 则

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

由行列式定义有

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_n} \\ &= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \cdots a_{i_n i_n} = D. \end{aligned}$$

性质1 说明, 行列式中行与列的地位是平等的, 凡是对于行成立的性质对于列也同样成立, 因此, 下面的性质只就行进行证明。

性质2 互换行列式的任意两行(列), 行列式改变符号。

证明 设把行列式 D 的 h 行与 k 行互换 ($k > h$), 并设互换后所得的行列式 B 的 i 行 j 列元素为 b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 则有

$$b_{hj} = a_{kj}$$

$$b_{kj} = a_{hj}$$

$$b_{ij} = a_{ij}$$

这里 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 但 $i \neq h, k$ 。由行列式定义

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} \cdots b_{hj_k} \cdots b_{kj_h} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_h \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{hj_k} \cdots a_{kj_h} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} - (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_k^{j_k} \cdots a_k^{j_k} \cdots a_{nj_n} \\
&= -D.
\end{aligned}$$

性质3 若行列式 D 中有两行 (列) 元素相同, 则行列式等于 0.

证明 把元素相同的两行互换则 D 不变, 但另一面, 由性质 2, 行列式的值要改变符号, 所以

$$D = -D$$

即

$$D = 0.$$

性质4 若行列式中某行 (列) 元素有公因数 k , 则 k 可以提到行列式外面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式定义

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
&= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

性质5 若行列式中有两行 (列) 的对应元素成比例, 则行列

式等于 0。

证明 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} (i \text{ 行}) \\ (j \text{ 行}) \end{matrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质6 若行列式的某一行 (例如第 i 行) 的元素可分解为两个元素的和, 即

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

则有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

证明 由定义有

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{i-1, j_{i-1}} (b_{ij_i} + c_{ij_i}) a_{i+1, j_{i+1}} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{i-1, j_{i-1}} b_{ij_i} a_{i+1, j_{i+1}} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{i-1, j_{i-1}} c_{ij_i} a_{i+1, j_{i+1}} \cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

性质7 把行列式的某行(列)加上另一行(列)的 k 倍,该行列式的值不变。

证明 假设把第 i 行加上 j 行的 k 倍, 则

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix} \cdot 1$$

上述各性质,除性质3、性质5外,都指明当行列式的行或列经过某种变形时,行列式的值有何变化.因此藉助这些性质可以把复杂的行列式转化为简单行列式进行计算,下面举例加以说明。

例1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix}
 1 & 1 & 5 & 2 \\
 2 & 3 & 11 & 5 \\
 2 & 1 & 3 & 2 \\
 1 & 1 & 3 & 4
 \end{vmatrix}$$

解 对于阶数确定的数字行列式，一般地是利用行列式的性质把它转化为上、下三角形行列式计算。为此，先把 D 的第一行元素分别乘以 -2 ， -2 ， -1 后顺次加到 2，3，4 行上去就得到

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 11 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

在变换后得到的行列式中，把第 2 行加到第 3 行后再把 3，4 两行互换得到

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

再把第 3 行乘以 -3 加到第 4 行，最后得到

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -14.$$

例2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}.$$

解1 注意 1、3 列及 2、4 列元素的特点，可把第 3 列加到第 1 列，第 4 列加到第 2 列，得到