近世代数基础

习题指导

北京师范大学数学系
代数教研室 编

北京师范大学出版社

近世代数基础

习题指导

北京师范大学数学系
代 数 教 研 室 编

北京师范大学出版社

1981年12月

近世代数基础习题指导

北京师范大学数学系代数教研室编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西 安 新 华 印 刷 厂 印 刷

*

开本：787×1092 1/32 17印张：2.75 字数：53.4千字

1981年11月第1版 1981年12月第1次印刷

印数：1—30,000

统一书号：13243·4 定价：0.28元

前　言

近年来，自学数学的人有所增多。因此，自张禾瑞著《近世代数基础》1978年修订本（以下简称“张著”）出版以来，我教研室接到很多来信，要求解答该书的某些习题。我们感到：不答复心里不安，答复又穷于应付；另一方面，“张著”对部分自学者说来，内容比较抽象，例题也较少。这部分自学者做该书的习题时可能出现两种情况：或者能够解答，但不能判断是否正确；或者感到根本无从下手。根据以上两种原因，我们编了这本习题指导（以下简称《指导》）。

《指导》的编写，利用了我教研室的习题卡片，由张禾瑞教授整理加工成文。针对不同情况，根据循序渐进的原则，《指导》对习题的解答做了不同的处理：有的相当详尽，有的省略了一些推理过程的依据，有的则完全从略。《指导》还提出了一些思考问题，列入了极少量的补充习题；并对准确、简练的文字表达给予了适当的注意。

鉴于要获得知识必须通过实践，我们向读者提出以下恳切的希望：对于习题要首先自己动手做，做出后再与《指导》核对比较；然后用自己的语言把解答写出，注意表达的层次；并把《指导》中省略了的地方补充完整；如果某一习题一时不知如何解答，要在经过苦思仍然无从下手的情况下才去查看《指导》，查后要分析一下，自己何以无法解答。读

者若能做到以上几点，才能从《指导》中得到益处，提高自己的解题能力。

北京师范大学数学系

代数教研室

一九八一年四月

目　　录

*)本章目录中缺第三节（§3），因《近世代数基础》中该节无习题。

第一章　基本概念

§1. 集　　合

1. $B\subset A$，但B不是A的真子集，这个情况什么时候才能出现？

解　由题设以及真子集的定义得，A的每一个元都属于B，因此$A\subset B$. 于是由

$$B\subset A \qquad A\subset B$$

得$A=B$. 所以上述情况在$A=B$时才能出现。

2. 假定$A\subset B$，$A\cap B=$？$A\cup B=$？

解　（i）　由于$A\subset B$，所以A的每一个元都属于B，即A的每一个元都是A和B的共同元，因而由交集的定义得

$$A\subset A\cap B$$

但显然有

$$A\cap B\subset A$$

所以

$$A\cap B=A$$

（ii）　由并集的定义，$A\cup B$的每一元素都属于A和B之一；但$A\subset B$，所以$A\cup B$的每一元素都属于B：

$$A\cup B\subset B$$

另一方面$B\subset A\cup B$，所以$A\cup B=B$。

§ 2. 映　射

1. $A=\{1, 2, \cdots, 100\}$. 找一个$A\times A$到A的映射。

解 用(a, b)表示$A\times A$的任意元素，这里a和b都属于A。按照定义做一个满足要求的映射即可，例如

Φ: $$(a, b)\longrightarrow a$$

就是这样的一个，因为Φ替$A\times A$的任何元素(a, b)规定了一个唯一的象a，而$a\in A$。

读者应该自己再找几个$A\times A$到A的映射。

2. 在你为习题1所找到的映射之下，是不是A的每一个元都是$A\times A$的一个元的象？

解 在上面给出的映射Φ之下，A的每一个元素都是$A\times A$的一个元的象，因为(a, b)中的a可以是A的任一元素。

你自己找到的映射的情况如何？有没有出现A的元素不都是象的情况？假如没有，找一个这样的映射。

§ 3. 代数运算

1. $A=\{$所有不等于零的偶数$\}$. 找一个集合D，使得普通除法是$A\times A$到D的代数运算。是不是找得到一个以上的这样的D？

解 一个不等于零的偶数除一个不等于零的偶数所得结果总是一个不等于零的有理数。

所以取

$$D=\{\text{所有不等于零的有理数}\}$$

普通除去就是一个 $A\times A$ 到D的代数运算。

可以找得到一个以上的满足要求的 D。读者可以自己找几个。

2． $A=\{a, b, c\}$。规定A的两个不同的代数运算。

解 （i）我们用运算表来给出 A的一个代数运算：$\circ$

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

按照这个表，通过$\circ$，对于A的任何两个元素都可以得出一个唯一确定的结果 a 来，而 a 仍属于A。所以$\circ$是A的一个代数运算。

这个代数运算也可以用以下方式来加以描述

$\circ$： $(x, y)\longrightarrow a=x\circ y$ 对一切 x，$y\in A$

（ii） 同理

$\circ$： $(x, y)\longrightarrow x=x\circ y$ 对一切 x，$y\in A$

也是A的一个代数运算。读者可用列表的方法来给出这个代数运算。

读者还应自己给出几个A的代数运算。

§4． 结合律

1． $A=\{\text{所有不等于零的实数}\}$。$\circ$是普通除法：

$$a \circ b = \frac{a}{b}$$

这个代数运算适合不适合结合律?

解 这个代数运算 $\circ$ 不适合结合律. 例如,

当

$$a = 4 \qquad b = c = 2$$

时

$$(a \circ b) \circ c = (4 \circ 2) \circ 2 = \frac{4}{2} \circ 2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$a \circ (b \circ c) = 4 \circ (2 \circ 2) = 4 \circ \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{4}{1} = 4$$

所以当 a, b 和 c 取上述值时

$$(a \circ b) \circ c \neq a \circ (b \circ c)$$

2. $A = \{$所有实数$\}$. 代数运算

$\circ$: $\quad (a, b) \longrightarrow a + 2b = a \circ b$

适合不适合结合律?

解 读者可以用解上一题的方法来证明, 所给代数运算不适合结合律.

3. $A = \{a, b, c\}$. 由表

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

给出的代数运算适合不适合结合律?

解 所给代数运算 $\circ$ 适合结合律。为了得出这个结论，需要对元素 a，b，c 的 27（$=3^3$）种排列（元素允许重复出现）加以验证。但是利用元素 a 的特性，可以把验证简化。仔细考察运算表，我们发现以下规律：对集合 A 的任意元素 x 来说，都有

$$a\circ x = x\circ a = x$$

由此得出，对于有 a 出现的排列，结合律都成立。这一点读者可以自己验证。还剩下 a 不出现的排列。这样的排列共有 8（$=2^3$）种。我们在这里验证 4 种，其余 4 种读者可以自己验证。

$$(b\circ b)\circ b = c\circ b = a$$
$$b\circ(b\circ b) = b\circ c = a$$

所以 $$(b\circ b)\circ b = b\circ(b\circ b)$$

$$(b\circ b)\circ c = c\circ c = b$$
$$b\circ(b\circ c) = b\circ a = b$$

所以 $$(b\circ b)\circ c = b\circ(b\circ c)$$

$$(b\circ c)\circ b = a\circ b = b$$
$$b\circ(c\circ b) = b\circ a = b$$

所以 $$(b\circ c)\circ b = b\circ(c\circ b)$$

$$(b\circ c)\circ c = a\circ c = c$$
$$b\circ(c\circ c) = b\circ b = c$$

所以 $$(b\circ c)\circ c = b\circ(c\circ c)$$

§5. 交换律

1. $A=\{$所有实数$\}$，$\circ$ 是普通减法：

$$a\circ b = a - b$$

这个代数运算适合不适合交换律？

解 容易验证，当 $a=1$，$b=2$ 时

$$a\circ b \neq b\circ a$$

所以这个代数运算不适合交换律。

2. $A=\{a, b, c, d\}$。由表

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	a	b

所给的代数运算适合不适合交换律？

解 要回答这个问题，只须考察一下运算表，看一看关于主对角线对称的位置上，有没有不相同的元素。

§ 6. 分配律

假定$\odot$，$\oplus$是A的两个代数运算，并且$\oplus$适合结合律，$\odot$，$\oplus$适合两个分配律。证明

$$(a_1\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_2)$$
$$=(a_1\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_2)$$

解 $(a_1\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_2)$

$$=a_1\odot(b_1\oplus b_2)+a_2\odot(b_1\oplus b_2)$$
$$=(a_1\oplus a_2)\odot(b_1\oplus b_2)$$
$$=(a_1\oplus a_2)\odot b_1\oplus(a_1\oplus a_2)\odot b_2$$
$$=(a_1\odot b_1)\oplus(a_2\odot b_1)\oplus(a_1\odot b_2)\oplus(a_2\odot b_2)$$

§ 7. 一一映射、变换

1. $A=\{$所有>0的实数$\}$. $\overline{A}=\{$所有实数$\}$. 找一个A与$\overline{A}$间的一一映射.

解 Φ: $\quad x\longrightarrow \lg x \quad$ 对一切$x\in A$

是一个A与$\overline{A}$间的一一映射.

首先，给了任一$x\in A$，即任一大于0的实数x，$\lg x$是一个实数，即$\lg x\in\overline{A}$，并且$\lg x$是唯一确定的，所以Φ是一个A到$\overline{A}$的映射.

其次，对于任一$y\in\overline{A}$，即任一实数y，$10^y=x$是一个大于0的实数，而在Φ之下，

$$x\longrightarrow \lg x=\lg 10^y=y$$

所以Φ是一个A到$\overline{A}$的满射.

最后，若是x_1，$x_2\in A$，并且$x_1\neq x_1$，那么$\lg x_1\neq\lg x_2$，所以Φ是一个A到$\overline{A}$的单射.

这样，Φ是一个A与$\overline{A}$间的一一映射.

2. $A=\{$所有≥ 0的实数$\}$

$\overline{A}=\{$所有实数$\overline{a}$，$0\leq\overline{a}\leq 1\}$

找一个A到$\overline{A}$的满射.

解 Φ: $\quad x\longrightarrow x \quad$ 若$0\leq x<1$

$$x\longrightarrow\frac{1}{x}\quad 若\ x\geq 1$$

是一个A到$\overline{A}$的满射.

首先，Φ替每一$x\in A$规定了一个唯一确定的象$\Phi(x)$，

而 $0 \leq \Phi(x) \leq 1$，所以Φ是一个A到$\overline{A}$的映射。其次，在Φ之下，$\overline{A}$的每一元$\overline{a}$都是A中一个元，即$\overline{a}$本身的象，所以Φ是一个A到$\overline{A}$的满射。

读者可以证明：

Φ_1: $\qquad x \longrightarrow |\sin x| \qquad x \in A$

Φ_2: $\qquad x \longrightarrow 0 \qquad 0 \leq x < 1$

$$x \longrightarrow \frac{1}{x} \qquad x \geq 1$$

都是A到$\overline{A}$的满射。

3. 假定Φ是A与$\overline{A}$间的一个一一映射，a是A的一个元。

$$\Phi^{-1}[\Phi(a)] = ? \qquad \Phi[\Phi^{-1}(a)] = ?$$

若Φ是A的一个一一变换，这两个问题的回答又该是什么？

解 当Φ是A与$\overline{A}$间的一个一一映射时，

$\Phi^{-1}[\Phi(a)] = a \qquad \Phi[\Phi^{-1}(a)]$未必有意义。

若Φ是A的一个一一变换，那么

$$\Phi^{-1}[\Phi(a)] = a \qquad \Phi[\Phi^{-1}(a) = a$$

读者可以做一做以下补充习题。

(i) $\quad A = \{$ 所有≥ 0的整数 $\}$

$\qquad \overline{A} = \{$ 所有> 0的整数 $\}$

证明

Φ: $\qquad x \longrightarrow x + 1 \qquad$ 对一切 $x \in A$

是A与$\overline{A}$间的一个一一映射。

(ii) $\quad A = \{$ 所有≥ 0的实数 $\}$

$$\overline{A}=\{\text{所有}>0\text{的实数}\}$$

利用（i）题找一个A与$\overline{A}$间的一一映射。

§8. 同　　态

1. $A=\{\text{所有实数}\ x\}$。A的代数运算是普通乘法。以下映射是不是A到A的一个子集$\overline{A}$的同态满射？

a）$x\rightarrow|x|$　　b）$x\rightarrow 2x$　　c）$x\rightarrow x^2$

d）$x\rightarrow -x$

解　a）　取$\overline{A}=\{\text{所有}\geq 0\text{的实数}\}$，则$\overline{A}\subset A$，而

$$\Phi_1:\qquad x\rightarrow|x|=\Phi_1(x)\qquad x\in A$$

是A到$\overline{A}$的一个同态满射。因为：对任一实数x，$|x|$是一个唯一确定的≥ 0的实数，所以Φ_1是A到$\overline{A}$的一个映射；若是$\bar{x}\in\overline{A}$，那么$\bar{x}\in A$，而

$$\Phi_1(\bar{x})=|\bar{x}|=\bar{x}$$

所以Φ_1是A到$\overline{A}$的一个满射；对任意x，$y\in A$，

$$\Phi_1(xy)=|xy|=|x||y|=\Phi_1(x)\Phi_1(y)$$

所以Φ_1是A到$\overline{A}$的一个同态满射。

b）　当x取遍一切实数值时，$2x$也取遍一切实数值。读者容易证明

$$\Phi_2:\qquad x\rightarrow 2x=\Phi_2(x)$$

是A到A的一个满射，但Φ_2不是A到A的一个同态满射。因为：取A的数2和3，那么

$$\Phi_2(2)=4\qquad \Phi_2(3)=6$$

$$\Phi_2\ (2.3)=\Phi_2(6)=12\neq\Phi_2(2)\ \Phi_2(3)$$

c）取$\overline{A}=\{$所有≥ 0的实数$\}$，那么$\overline{A}\subset A$。读者可以自己证明

Φ_3: $\qquad x\to x^2=\Phi_3(x) \qquad x\in A$

是A到$\overline{A}$的一个同态满射。

d）当x取遍一切实数值时，$-x$也取遍一切实数值。容易证明

Φ_4: $\qquad x\to -x=\Phi_4(x) \qquad x\in A$

是A到A的一个满射，但不是一个同态满射。

2. 假定A和$\overline{A}$对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$来说同态，而$\overline{A}$和$\overline{\overline{A}}$对于代数运算$\bar{\circ}$和$\bar{\bar{\circ}}$来说同态。证明，A和$\overline{\overline{A}}$对于代数运算$\circ$和$\bar{\bar{\circ}}$说同态。

解 由题设存在A到$\overline{A}$的一个同态满射

Φ_1: $\qquad a\to\bar{a}=\Phi_1(a) \qquad a\in A,\ \bar{a}\in\overline{A}$

并且对于A的任意两个元素a和b来说

$$\Phi_1\ (a\circ b)=\bar{a}\ \bar{\circ}\ \bar{b}=\Phi_1(a)\ \bar{\circ}\ \Phi_1(b)$$

同样存在$\overline{A}$到$\overline{\overline{A}}$的一个同态满射

Φ_2: $\qquad \bar{a}\to\bar{\bar{a}}=\Phi_2\ (\bar{a}) \qquad \bar{a}\in\overline{A},\ \bar{\bar{a}}\in\overline{\overline{A}}$

并且对于$\overline{A}$的任意两个元素$\bar{a}$和$\bar{b}$来说

$$\Phi_2\ (\bar{a}\ \bar{\circ}\ \bar{b})\ =\bar{\bar{a}}\ \bar{\bar{\circ}}\ \bar{\bar{b}}=\Phi_2\ (\bar{a})\ \bar{\bar{\circ}}\ \Phi_2\ (\bar{b})$$

如下定义

Φ: $\qquad a\to\Phi_2[\Phi_1(a)] \qquad a\in A$

那么Φ是A到$\overline{\overline{A}}$的一个同态满射。因为：

（i）由于Φ_1和Φ_2是同态满射，所以对于任何$a\in A$，$\Phi_1(a)$是$\overline{A}$的一个唯一确定的元素，而$\Phi_2[\Phi_1(a)]$是$\overline{\overline{A}}$的一个唯一确定的元素，因而Φ是A到$\overline{\overline{A}}$的一个映射。