

物理学前沿丛书



杨-巴克斯特 方程

葛墨林 薛 康 著

上海科学技术出版社

物理学前沿丛书

杨-巴克斯特方程

葛墨林 薛 康 著

上海科学技术出版社

A FRONTIER SERIES IN PHYSICS

Yang-Baxter Equation

Ge Molin Xue Kang

SHANGHAI SCIENTIFIC & TECHNICAL PUBLISHERS

图书在版编目(CIP)数据

杨-巴克斯特方程/葛墨林, 薛康著. —上海: 上海科学技术出版社, 1999. 12

(物理学前沿丛书/3)

ISBN 7-5323-5312-5

I. 杨… II. ①葛… ②薛… III. 量子论-数学物理方程, 杨-巴克斯特方程 IV. 0413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999) 第 53946 号

责任编辑 戴雪文

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号 邮政编码 200020)

新华书店上海发行所经销

商务印书馆 上海印刷股份有限公司印刷

开本 850 × 1168 1/32 印张 17 字数: 409 000

1999 年 12 月第 1 版 1999 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—1 500

定价: 35.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向本社出版科联系调换

内 容 提 要

本书以作者长期在量子完全可积系统方面的研究工作为基础,其目的不在于罗列非线性完全可积模型已有的研究成果和数学的严密性,而在于尽量用物理上较容易理解的方式,阐明量子杨-巴克斯特方程(YBE)的物理含意及其在相关问题中的应用。

为此,本书的内容是以 YBE 为核心,结合作者在研究中所逐步形成的对 YBE 的物理理解,侧重于阐明 YBE 的物理背景,以及它在量子完全可积问题中的地位 and 近十几年来对该研究分支发展的影响。全书共八章,主要介绍经典非线性可积问题中的泊松括号和经典 YBE,非线性可积模型的量子化问题和量子 YBE,由 RTT 关系所确定的量子代数及 Yangian 和它们在物理中的基本实现,YBE 的有理解和三角解与相应的量子转移矩阵的代数性质和在物理模型上的实现。作者考虑到非从事该研究分支的读者的需要,力求用简单的物理描述阐明本书的内容,同时对基本运算和关键性的公式给出了较详细的推导和说明。作者采用了许多最简单的物理例子帮助读者更容易理解该研究分支的基本理论和基本思想。对于希望更深入地了解 YBE 及相关问题的读者,本书各章附有参考文献供选择查找原始的研究资料。

本书面向对该研究分支感兴趣,并希望对 YBE 及相关问题系统了解的读者。同时,希望对从事这方面研究的工作者也会有所帮助。

本书由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助出版

《物理学前沿丛书》编辑委员会

主 编 冯 端

常务编委 倪光炯

委 员 (以姓氏笔画为序)

王 迅 甘子钊 闵乃本

李家明 汪克林 张其瑞

周孝谦 段一士 高崇寿

陶瑞宝 顾世洵 顾秉林

侯伯宇 唐孝威 龚昌德

黄祖洽 葛墨林 蒲富恪

戴元本

A FRONTIER SERIES IN PHYSICS

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief Feng Duan

Executive Editor Ni Guangjiong

Members

Dai Yuanben

Duan Yishi

Gan Zizhao

Gao Chongshou

Ge Molin

Gong Changde

Gu Binglin

Gu Shiwei

Hou Boyn

Huang Zuqia

Li Jiaming

Min Naiben

Pu Fuke

Tang Xiaowei

Tao Ruibao

Wang Kelin

Wang Xun

Zhang Qirui

Zhou Xiaoqian

出版说明

我社在物理学界专家学者的热忱关怀下,历年来出了一些比较好的书,如《晶体生长的物理基础》(闵乃本著)、《原子物理学》(第一版杨福家著)、《原子核结构理论》(曾谨言、孙洪州编著)、《群表示论的新途径》(陈金全著)、《物理学中的群论》(陶瑞宝著)、《近代物理学》(倪光炯、李洪芳编著),等等。这些书受到国内外物理学界、出版界和读者的欢迎和好评。为进一步出好这方面的著作,我社拟出版《物理学前沿丛书》。其宗旨是:向国内外介绍我国第一流的物理研究成果,扩大我国物理研究成果在国内外的影响,促进学科的发展和交流。《物理学前沿丛书》包括的面:基础物理、应用物理和技术物理的前沿领域。

考虑到物理科学的特点,在大体统一的规格要求下,我们将充分发挥作者的特长,努力使本丛书具有丰富多采的风格。例如:(1)作者可以对一个专门分支学科,按自己的观点作比较全面深入的阐述,其中一部分内容反映作者自己的创造性工作;(2)作者也可以为着重反映自己有特色的、比较成熟的系统性研究,就某一个重要的课题作详细的介绍,但应包括必要的预备知识和有关课题在国际上的发展动态;(3)在某一领域或新课题的研究发展特别迅速的情况下,我们也可把系列学术报告或专门性讲座汇编起来,经过适当加工,再加上一个比较详细的前言介绍,以便尽快出版;(4)在考虑书稿时应充分注意历年来“获奖”项目和国家基金会重点资助的项目。

我们希望,本丛书不仅可以作为高年级大学生和研究生的教

材,而且对广大的教师和科研工作者有益,经若干年有了适当的积累之后,能够在一定程度上显示出我国物理学界的风貌。

我们诚恳希望得到物理学界广大专家的大力支持和指导,使这套书的出版达到预期的目的。

上海科学技术出版社

1992年10月

序

本书主要从物理角度介绍杨-巴克斯特方程与量子群(包括 Yangian 与量子代数)的基本理论与应用。为了内容的完整性,本书也涉及到一些数学物理的研究结果。需要指出的是,从量子力学、多体问题、链模型等角度理解 Yangian 和量子代数的物理实质仍是发展中的研究课题,实际上,书中不少结果是专门为本书而做的研究。

书中将 RTT 关系作为最基本的关系,并由此生成出所有的代数结构和相应的物理系统。通过 XXX 链模型、Haldane-Shastry 模型、多体问题和量子力学中的一些特殊例子来理解量子群的物理实质。同时,从数学物理方面,通过直接求解杨-巴克斯特方程和建立杨-巴克斯特化方案,给出 R 矩阵的明显表示形式。

本书尽可能地侧重于杨-巴克斯特系统的物理应用,尽管这方面的研究仍处于研究阶段。我们尽可能收集并介绍杨-巴克斯特系统在自旋系统、凝聚态模型和高能物理等方面的应用,其中也包括南开大学研究组的研究成果。

尽管如此,本书也难以非常全面地描述杨-巴克斯特方程及相关课题这一正在发展的研究领域。因此,即使对其他领域的物理工作者,本书也只能看作是初步的介绍。

我们非常感谢郝柏林、蒲富恪、陈式刚、张礼、闫沐霖、赵保恒等教授的指导与帮助,感谢孙昌璞、刘旭峰、傅洪忱、王义文、陈光红、陈景灵、王宙斐等同志的长期合作与在本书写作过程中与作者所进行的有益讨论,实际上,本书也包含了他们的若干研究成果。

作者特别感谢杨振宁教授的指导和关心,是他引导作者进入这一研究领域,并不断提出新的研究课题。

葛墨林 薛 康

1999年2月

PREFACE

The basic theories and physical applications of Yang-Baxter equation (YBE) and Quantum Groups including Yangian and Quantum Algebras are introduced in this book. For the selfcontain we also touch some results concerning the mathematical physics. It is worthy noting that the understanding of physical meaning of Yangian and Quantum Algebras through Quantum Mechanics, many-body problems and chain-models is still a developing topic. Actually, some of sections of this book are the results of our research works especially for the book.

In this book we take RTT-relation as the mother relation to generate all the algebraic structures and establish the corresponding physical systems. The physical meaning of the consequences of Quantum Groups in Physics is explained through some particular examples in XXX-chain, Haldane-Shastry model, many-body problems and Quantum Mechanics. In connection with mathematical physics we give some explicit forms of R matrices by directly solving YBE including Yang-Baxterization.

Some applications in physics are emphasized, even they are still at the baby stage. We do our best to collect the possible applications of Yang-Baxter systems, including the research works of Nankai Group, in spin systems, condensed matter

models , and high energy physics.

It is difficult to cover all the faces of such a prospective field of YBE and related topics. For this reason this book can be regarded as an elementary introduction for physicists working in other fields.

We thank professors Hao B L , Pu F Q , Chen J G , Sun C P for enlightening discussions. A great thanks to Professor C N Yang for leading the authors to enter this field and the instructive guidance.

Ge Molin Xue Kang

Feb. 1999

目 录

第一章 经典杨-巴克斯特方程(YBE)简介	1
§ 1.1 Lax-pair	2
§ 1.2 基本泊松括号	6
§ 1.3 经典杨-巴克斯特方程(CYBE)	13
§ 1.4 转移矩阵 $T_L(\lambda)$ 满足的泊松括号	17
§ 1.5 基本泊松括号与 Riemann-Hilbert 变换	25
附录 1 证明(1.4.24)式与(1.4.27)式结合等价于 (1.1.2)式	31
参考文献	33
 第二章 非线性可积模型的量子化与 QYBE 的物理起源	35
§ 2.1 非线性可积模型的量子化理论	36
§ 2.2 QYBE 的起源(I)——量子多体问题	73
§ 2.3 QYBE 的起源(II)——统计物理中的二维精确 可解模型	96
附录 2A NSE 与含 δ 函数作用势的多体问题的关系	110
附录 2B 荷质量 Thirring 模型的 Bethe-Ansatz	115
参考文献	129
 第三章 量子杨-巴克斯特方程(QYBE)	131
§ 3.1 RTT 关系与 QYBE	131
§ 3.2 简单的例子	147

§ 3.3 R 矩阵与哈密顿量	154
§ 3.4 因式化 S 矩阵理论	162
§ 3.5 从 YBE 直接解出因式化 S 矩阵	173
§ 3.6 辫子群关系	178
参考文献	181
第四章 Yangian 对称性	183
§ 4.1 $GL(2)$ 的 RTT 关系与 $Y(SL(2))$	183
§ 4.2 RTT 的三维流形式	197
§ 4.3 自旋模型与 $Y(SL(2))$	201
§ 4.4 一维 Hubbard 模型与 $Y(SL(2))$ 对称性	216
§ 4.5 Yangian 的初等量子力学实现	220
(1) 由三维运动的 $E(3)$ 代数构造 Yangian	220
(2) $Y(SL(2))$ 的升降算符作用	226
(3) 三维谐振子情况	229
(4) 二维空间 anyon 系统	232
(5) 三体 anyon 的升降算符	238
(6) 简单的自旋和轨道耦合系统的升降算符	245
参考文献	249
第五章 转移矩阵的整体解	251
§ 5.1 卡洛杰惹-萨则兰德(Calogero-Sutherland)模型	252
§ 5.2 推广的 Polychronakos 解	260
§ 5.3 RTT 关系与长程模型	264
§ 5.4 推广的长程模型	271
§ 5.5 RTT 有限幂次解: Goryachev-Chaplygin 回转陀螺	275

§ 5.6 q 变形的 G-C 回转陀螺	282
参考文献	292
第六章 YBE 的三角解	294
§ 6.1 YBE 解的类型举例	294
§ 6.2 辫子群矩阵表示(BGR)的例子	298
§ 6.3 带颜色的解	318
§ 6.4 不同自旋空间的 BGR	323
§ 6.5 Z_N 对称解	327
§ 6.6 三角型 YB 化	330
§ 6.7 YB 化举例	347
§ 6.8 Weyl 群与万花筒散射	358
§ 6.9 反射方程、守恒量	364
参考文献	375
第七章 量子代数及玻色实现	380
§ 7.1 由 RTT 的渐近行为决定量子代数	381
§ 7.2 简单的量子代数	386
§ 7.3 L 算符的 YB 化, 量子代数	401
§ 7.4 $U_q(SL(2))$ 的玻色实现	418
§ 7.5 量子偶	435
参考文献	450
第八章 量子代数的物理应用	453
§ 8.1 相干态算符与量子代数	454
§ 8.2 相位量子化与量子代数的循环表示	461
§ 8.3 Hofstadter 模型与循环表示	470
§ 8.4 整数量子霍尔效应中任意弱(杂质)势问题	476