高等师范专科学校通用教材

概率统计简明教程

中南五省(区)师专《概率统计简明教程》
教材编写组

河南大学出版社

概率统计简明教程

赵希元 主编

河南大学出版社

概率统计简明教程
主　编　赵希元
责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
郑州测绘学院印刷厂印刷

开本：787 ×1092毫米1/32　印张：9　字数：195 千字
1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
印数1—11 000　定价：1.80元

ISBN7—81018—249—8 O·14

前　言

教材建设是学校三大基本建设之一。长期以来，高等师范专科教育没有一套具有自己特点、较为系统的教材，影响了教育质量的提高。为了深化高等师范专科教育的改革，为普及九年制义务教育培养更多的合格教师，中南五省（区）教委（高教局）高教（教学）处，共同组织五省（区）师专及部分有关高校的教师，协作编写了师专12个专业85门主干课程的通用教材。

编写这套教材的指导思想是，从高等师范专科教育人才培养的目标出发，根据国家教委新制定的二年制师专教学计划、教学大纲的要求，兼顾三年制和双科制专业的需要，力求突出实用性、科学性及高等师范专科教育特点。因此，这套教材，不仅适用于普通高等师范专科教育，而且也适用于教育学院以及电大普通师范教育相关专业的教学，同时，还可作在职初中教师的培训和自修教材。

在编写《概率统计简明教程》这本书时，参考了复旦大学编《概率论》、华东师大编《概率论与数理统计》以及各省自编师专用概率统计教材等。考虑到统计的应用越来越广，本教程适当加强了统计部分。但作为师范专科学校的教材，还不应当把统计放到主导地位。教学时数的分配，教师可以在概率论部分占36学时、统计部分占24学时这一原则下按照实际情况灵活安排。

由于本书是简明教程，因此并不吝惜文字叙述，例题也较多。教师若能巧妙处理教材，留一部分例题或内容让学生阅读，不仅能保证在60学时内完成教学任务，还有助

于提高教学质量。

本书主编单位为安阳师专。参加编写的人员以及分工为：河南安阳师专副教授赵希元（第一、二章和全书统稿）、湖北咸宁师专副教授何家忠（第三章）、湖南常德师专副教授谭祖林（第四、五章）、广西玉林师专副教授晏蔚钊（第七、八、九章）、广东肇庆师专讲师罗贯中（第六章）。本书稿几经全体编写人讨论、修改，是编写组的集体成果。

北京师大刘秀芳副教授对本书全稿进行了详细审阅，提供了非常宝贵的修改意见。我们在此表示衷心感谢。

这套教材是按主编负责、分工编写的原则成书的。由于这样大规模有组织地进行教材编写在我们还是第一次，因而错误缺点在所难免，恳请读者批评教正。

中南五省（区）师专协作教材编委会

一九八八年三月

目　　录

第一章　随机事件概率的概念

概率论与数理统计是在人类认识随机现象(偶然现象)统计规律性的过程中产生并发展起来的一门理论系统和科学方法．而概率则是该系统中最重要的基本概念，因为概率论与数理统计的内容、方法和意义都能在概率本身的意义之中得到反映．因此正确理解概率这一概念是认识整个这门科学的基础．为此，本教程将首先从阐述概率的概念开始．

§1.1　概率概念的直观描述

一、概率概念的现实背景

当观察自然现象、社会经济现象以及技术过程时，人们发现有一类相当广泛存在的问题，虽然在其本质属性中也表现有“量”的一面，然而这类问题的数量方面却不能用已有的数学模型去描述．

例如，一个孕妇，事先不能预言她将孕育的婴儿是男性还是女性，生育的结果是男、是女都纯属偶然，具有不确定性，象这样的现象我们称之为随机现象．其中“是男孩”、“是女孩”这些有特定含义的现象，在作一次观察时它可能发生也可能不发生，呈现出偶然性，我们称它们为随机事件（偶然事件）．

现在的问题是，能否建立一个相应的数学模型去描述

象"是男孩"（或者"是女孩"）这样的随机事件的发生规律？

对于随机现象来说，核心的问题是某事件会以多大的可能性发生。如在上例中，人们关心的问题通常是，孕妇会以多大的可能性生男孩（或女孩）。用可能性大小描述客观对象的数量特征是一种新的数学模式，这种模式就是从此类问题中萌发出来的。这种用可能性大小描述问题的观念就正是本教程将要定义的最基本概念——概率。因此改用刚刚引入的新术语来说，问题即为孕妇会以多大概率生男孩（或者女孩）。

再如，将一枚骰子任意抛掷一下，哪个点向上？问题也具有不确定性。因此掷骰子过程也是一个随机现象。同前例类似，这里也存在被人们关注的含有某种特定含义的现象。例如"掷出偶数点"，在将骰子抛掷一次时，它可能发生，也可能不发生，故"掷出偶数点"也是随机事件．而且和前面例子类似，在这里，问题仍然是：象"掷出偶数点"这样的随机事件究竟会以多大的可能性发生，或者说以多大的概率发生，这又是一个用可能性大小，即概率描述问题的例子。顺便提一下，关于可能性大小的观念，即概率这一重要概念正是萌发于掷骰子这个既简单而又典型的模型之下。

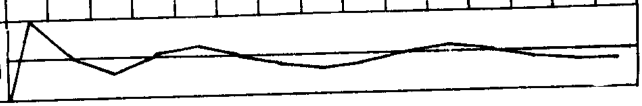
在现实实践活动中，人们处处都可以感触到用"可能性"大小描述的问题的存在。例如，买一件物品，人们会关心买到的是次品的可能性有多大；战士射击，他关心的是命中目标的可能性有多大；在各种电路中，人们会关心每个元件在一定时间内损坏的可能性有多大。诸如此类等等，统统都是概率问题。因此法国数学家拉普拉斯（Laplace）

曾说："生活中最重要的问题，其中占绝大多数实质上只是概率问题。"用可能性大小，即概率所描述的问题，在自然现象、社会经济现象、生产技术领域中到处存在。小至微观世界，如量子理论中；大至宏观世界，如天体运动的规律，无不用到概率理论来描述它们。因此概率这一概念有广阔的现实背景。这显示，它的生命基础，它的力量的源泉牢牢地扎根于人们的现实生活之中，正是如此，概率论与数理统计（以后简称概率统计）已成为人类认识自然、认识社会、对生产进行科学管理等不可缺少的有力工具。

二、随机现象的统计规律性

前面，我们直观地把用可能性大小描述客观对象数量特征的观念直接称为概率，目的是想强调一下概率的概念萌发于什么样的背景之下，并赋于它一个简单外壳。但是概率的本质是什么？即它究竟反映了什么？那里并没有揭示出来，现在就作进一步回答，仍然从已经引入的例子谈起。

在上述的第一个例子中，对新生儿的性别作一次观察（称为随机试验，简称为试验），那么"是男孩"（或者"是女孩"）这一随机事件可能发生，也可能不发生，本质上纯属偶然，无规律可循（这不能和现代科学已经揭示出生育奥秘混为一谈）。但若将试验反复进行下去，很快就会看到，在大量个别试验结果的总体中，存在着至关重要的潜在规律性，我们列表说明如下。下表是一个大居民区连续两千个新生婴儿性别调查统计表（前15例）。表中n表示登记序数，m表示试验中男孩累积数。自然m/n就表示试验过程中任一时刻男孩数和婴儿总数的比值。

序号n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
性别	男	女	女	男	男	女	女	女	男	男	男	女	女	女	女
m	1	1	1	2	3	3	3	3	4	5	6	6	6	6	6
m/n	1.00	.50	.33	.50	.60	.50	.43	.38	.44	.50	.55	.50	.46	.43	.40
m/n的动态折线图															

续表（100～2000）

序号n	100	200	300	400	500	600	700	1000	1500	2000
m	40	91	139	192	234	285	327	479	776	1039
m/n	0.40	0.45	0.46	0.48	0.47	0.48	0.47	0.48	0.517	0.519

表中m/n那一栏的数值变化以及m/n的动态折线图同时说明，在n不断增大的过程中，比值m/n有时增大，有时减小，表现出具有波动性。称m/n为“是男孩”这一随机事件（用A表示）的**频率**，用符号f_n（A）表示，即f_n（A）$=m/n$．相应地称m为该事件的**频数**．频率的波动性反映了现象具有偶然性．频率f_n（A）的表示式说明，频率依赖于试验次数n，是n的函数．

但是，这里的波动性明显地以一个未知常数为中心作摆动，这个常数被大量统计资料所确认的较好的近似值是

22/43≈0.512. 当试验次数n充分大时，频率的值逐渐向该常数靠拢，以该常数为中心作摆动的振幅一般说越来越小. 这一现象我们形象地称为频率的稳定性. 这种稳定性表示，在偶然性中存在着必然性. 类似的分析不难得到，当n充分大时，“是女孩”这一随机事件的频率将稳定在0.488附近. 显然，0.512和0.488实际上分别表示男婴和女婴在婴儿总数中所占的比重. 比重不同，发生的可能性大小就不同. 这是很显然的. 例如任掷一颗骰子，那么谁都会相信：“掷出偶数点”发生的可能性比“掷出5点”发生的可能性要大. 因为偶数点有2、4、6三个，所占比重比单点5所占比重大. 这说明不同随机事件发生的可能性大小是存在着差别的，而且这种差别是可以度量的. 如在上例中，比重值就是对发生可能性大小的度量值. 因此我们对新生婴儿性别作一次观察（即作一次随机试验），“是男孩”这一随机事件以近似0.512的可能性发生. 于是，那个客观存在的常数就是对“是男孩”这一随机事件发生的可能性大小的度量. 我们称它为“是男孩”这一随机事件的概率，若这一随机事件记作A，则其概率用符号$P(A)$表示.

由此可知，一般地说，概率这一概念所反映的是这样一种客观事实：在某随机现象中，可能存在两个或多个各有特定含义的方面，它们都具有不确定性，都是随机事件，各随机事件发生的可能性之间常常存在着量的差别，而且是可以度量的. 概率就是对各随机事件这种“量”的属性的一种度量. 这就是概率这一概念的本质. 如在上述例子中，生育过程是一随机现象，它由“男”和“女”两个方面构成. 这两个方面都具有不确定性，都是随机事件. 分

别以0.512和0.488为近似值的那两个常数既说明“男”和“女”这两个不确定的方面存在着量的差别，同时常数本身又是对这两个随机事件量的属性的度量值，并分别表示这两个随机事件发生的可能性大小. 因此，这两个客观存在着的常数（它不依赖于试验次数n，并且和主观意志无关）就分别是这两个随机事件的概率.

如上所述，我们看到，概率的概念是从频率具有稳定性抽象概括出来的. 而频率稳定性是在统计过程中呈现出来的，故称为统计规律性. 这种规律性揭示出：概率是客观存在的固定的常数. 它不随主观意志而改变，也不因试验次数n的大小而变化. 因此，概率这一概念反映和揭示了一个重大奥密：在表面看来完全是偶然性在起作用的地方，在其内部则潜藏着某种观客规律性，而且正是这种被表面现象掩盖着的规律性在现象过程中对局部的个别的现象起着支配和控制作用. 如在人类的生育现象中，每一个别孕妇的生育结果都在（近似）“男女各半”这一规律的支配和控制之下，以致构成和谐的人类社会. 概率统计揭示出了这一规律. 人们可以根据这一规律制定相应政策，以规范社会. 这一例子令人信服地说明，潜藏在随机现象中的规律性可能具有至关重要的意义. 概率论与数理统计的任务就在于揭示并研究潜藏在随机现象中的这种规律性（必然性）.

三、概率的统计定义

频率的稳定性揭示了概率的客观存在性，由此我们对概率给出如下描述性定义.

定义1.1 在相同条件下进行n次试验，设随机事件A发生了n_A次. 当试验次数n充分大时，事件A的频率

$f_n(A)=n_A/n$ 表现出持久的稳定性，我们称 A 是有概率的，其概率记为 $P(A)$. 而且当 n 充分大时，就取 n_A/n 为 $P(A)$ 的近似值，即

$$P(A)\approx\frac{n_A}{n} \tag{1.1}$$

（1.1）式所确定的概率称为**统计概率**.

这个定义实际上只是显示了概率存在的可能，并给出了近似估值方法，因此严格地说不能算是一个数学定义。然而，它的作用却是重大的。因为，一方面，这是求随机事件概率的一个实际方法，而且是一个有相当普遍意义的方法. 对于许多有概率意义的问题来说，找不到直接求概率的计算公式，其概率的求得只能靠统计给出. 例如，“生男孩”的概率近似等于0.512就是统计概率. 其它如发芽率、命中率、次品率等等都是统计概率. 另一方面，读者应当知道，数学之应用于实际，本质上都是近似的. 因此，统计概率并不因为它只是取得概率近似值而失去其应用价值. 何况在第六章的极限理论中，我们将证明频率近似于概率是能以很高的可靠性作保证的.

最后我们指出，统计概率的一个重要作用是可用它来判断统计过程本身的前提是否正确. 例如，如果某个地区男婴的频数过大地超过其概率，那么我们就有理由怀疑该地区是否有溺杀女婴的犯罪行为，从而使统计工作漏掉了被溺杀的女婴.

§1.2 随机事件与集合

为了使概率的概念摆脱直观的描述而取得精确的数学形式，我们就必须首先使随机事件概念具有明确的数学形式. 这里明确而有效的方法就是把随机事件与集合对应起来，将随机事件归结为集合，而把概率归结为集函数. 因此本节的内容将着重说明怎样用集合论语言来描述随机事件本身及其性质.

一、随机试验与样本点（基本事件）

当观察研究一个随机现象时，现象过程本身的含义是什么，这是首先需要弄清楚的. 因为这个过程决定了问题的实际意义，是分析和解决问题的依据. 我们把现象过程的实现称为随机试验，简称试验. 例如，任掷一颗骰子，它可能出现什么结果是随机的，而掷骰子这个过程本身就是一个试验. 因此，当人类头脑中还没有任何概率的概念时，某些随机试验却已经不止一次地被进行或观察到，只不过当时还没有被明确意识到而已. 因此，明确定义随机试验这个概念在逻辑上是不可缺少的. 但是我们不能总是离不开具体的现实内容来谈随机试验，而应该抽象出随机试验的共同特征，即给出一般性定义.

定义1.2 设E表示一个试验，如果它有如下特征：

1. 每次试验的结果无法预先确定（即试验具有随机性）；

2. 试验的一切可能结果能明确指出（即能从整体上把握它）；

3. 试验可以在相同条件下重复进行（即可望从中看

出统计规律性），

则称E为一个**随机试验**，简称**试验**。

例如，"任掷一颗骰子"就是一个随机试验．因为：第一，出现什么点预先无法确定；第二，一切可能结果共有六个，能明确指出；第三，试验可以在相同条件下重复进行．

我们作试验的目的是为了寻求统计规律性．这需要对试验的结果进行分析，为此，需要进一步定义几个基本概念。

定义 1.3 随机试验的每一个可能结果称为**样本点**（或**基本事件**）．

一般地，样本点用带有下标的小写希腊字母ω_i（$i=1,2,\cdots$）表示．

如在上例中，不管哪个点向上都是样本点，全部样本点共有 6 个，它们是$\omega_i=i$, $i=1, 2\cdots, 6$.

二、样本空间与随机事件

在概率论的经典部分，求随机事件的概率是一个重要内容．而解决这一问题的关键首先在于能否对随机试验全部可能结果作出正确分析，以及能否从中按照需要划分出具有同一性质的一部分来，这就导出了样本空间与随机事件这两个基本概念．

定义1.4 某随机试验全部样本点构成的集合称为**样本空间**，常常用字母Ω表示．样本点与样本空间的关系沿用与中学课本一致的元素与集合的关系表示法，即若ω是一个样本点，就记作$\omega\in\Omega$．

定义1.5 样本空间Ω中具有某一共同性质的样本点构成的子集称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母A，