

高等数学辅导 下册

盛祥耀 葛严麟 编
胡金德 张元德

清华大学出版社

高等数学辅导

(下 册)

盛祥耀 葛严麟 编
胡金德 张元德

清华大学出版社

内 容 简 介

本书基本上是根据教育部1980年制定的工科高等数学教学大纲的要求编写的。也是编者多年来在清华大学教学、辅导工作的结晶。

下册内容共六章，包括空间解析几何及矢量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等。是工科大学生、电大和职工大学学员、自学高等数学者学习高等数学时的辅导教材，也可供从事工科高等数学教学的教师、非数学专业的研究生及中学数学教师参考。

2. 107

高 等 数 学 辅 导

(下册)

盛祥耀 葛严麟

胡金德 张元德

编

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

景山学校印刷厂 排版

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32 印张：16 1/8 字数：362千字

1983年10月第一版

1983年10月第一次印刷

印数：1—120000

统一书号：15235·47

定价：1.70元

目 录

第七章 空间解析几何、矢量代数	(1)
§ 1 行列式	(1)
§ 2 空间直角坐标系, 矢量代数	(18)
§ 3 平面与直线 (一)	(42)
§ 4 平面与直线 (二)	(61)
§ 5 二次曲面的标准方程	(95)
§ 6 习题与答案	(103)
第八章 多元函数及其微分法	(114)
§ 1 函数、极限、连续、偏导数	(114)
§ 2 全微分及其在近似计算中的应用	(132)
§ 3 多元函数的微分法	(145)
§ 4 曲面的切平面, 空间曲线的切线	(162)
§ 5 极值	(170)
§ 6 习题与答案	(129)
第九章 重积分	(192)
§ 1 二重积分	(192)
§ 2 三重积分	(223)
§ 3 重积分的物理应用	(235)
§ 4 习题与答案	(249)
第十章 曲线积分与曲面积分	(259)
§ 1 曲线积分	(259)
§ 2 曲面积分	(290)

§ 3 习题与答案	(314)
第十一章 级数	(319)
§ 1 数项级数的基本概念	(319)
§ 2 同号级数敛散性的判别法	(329)
§ 3 交错级数与任意项级数	(345)
§ 4 函数项级数的一般概念	(359)
§ 5 幂级数的收敛半径、收敛域及和函数	(369)
§ 6 展开函数为幂级数, 幂级数的应用	(379)
§ 7 三角级数	(392)
§ 8 习题与答案	(409)
第十二章 常微分方程	(421)
§ 1 基本概念	(421)
§ 2 一阶微分方程及初等解法	(429)
§ 3 高阶微分方程	(457)
§ 4 常系数线性方程(组)	(473)
§ 5 习题与答案	(497)

第七章 空间解析几何、矢量代数

§1 行列式

(一) 内容提要

1 二阶行列式

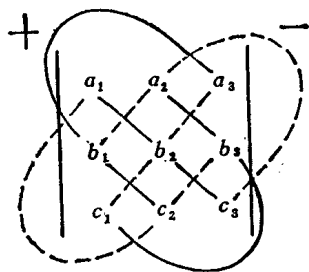
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

2 三阶行列式

$$\text{定义: } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$- a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2.$$

沙路展开式:



实线上三数的连乘积都带正号, 虚线上三数的连乘积都带负号。

性质:

1° 行、列依次对调, 行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2° 某两行（或两列）对调，行列式的值变号。

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

3° 某行（或某列）的元素有公因数，则此公因数可提到行列式记号之外。例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4° 某两行（或两列）的元素对应成比例，包括某两行（或两列）元素对应相等及某一行（或列）元素全为零。行列式等于零。例如：

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5° 某行（或列）的元素都是两项之和，则该行列式可以分解成为两个相应行列式的和。

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^* & b_1 & c_1 \\ a_2^* & b_2 & c_2 \\ a_3^* & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6° 某行（或列）的所有元素乘以同一倍数 λ (λ 为任何常数)，加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变。

例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + kc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

代数余子式及行列式按一行(或列)的展开式:

代数余子式: 设 x 是行列式中位于第 i 行第 j 列的元素, 在这个行列式中, 去除 x 所在的第 i 行及第 j 列元素后, 剩下的元素构成的行列式乘以 $(-1)^{i+j}$, 称为 x 的代数余子式, 记 X . 例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad b_1 \text{ 的代数余子式: } B_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

按一行(或列)的展开式:

行列式的值等于其任一行(或列)的元素与它们的代数余子式两两乘积之和。例如:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 \\ = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3.$$

行列式的任一行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式的两两乘积之和为零。例如:

$$a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 = 0,$$

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0.$$

3 高阶行列式:

四阶和四阶以上的行列式称为高阶行列式, 高阶行列式无

沙路（对角线）展开法，但按某行（或列）的展开法仍适用，例如：四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

三阶行列式的性质对高阶行列式均成立。

（二）例题

7.1 计算下列行列式：

$$1^\circ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2^\circ \begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix}; \\ 3^\circ \begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}; \quad 4^\circ \begin{vmatrix} \log_a a & \log_a c & 1 \\ \log_c a & 1 & \log_c b \\ 1 & \log_c c & \log_c b \end{vmatrix}.$$

7.2 求出满足方程的 x 值。

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7.3 分解因式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

7.4 利用性质计算下列行列式：

$$\begin{aligned}
 1^\circ & \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}; \\
 2^\circ & \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3^\circ \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix};
 \end{aligned}$$

7.5 证明平面上三点 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 、 $M_3(x_3, y_3)$ 共线的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7.6 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.7 证明若平面上三点 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 、 $M_3(x_3, y_3)$ 不共线, 则过此三点的圆的方程为:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(三) 例题分析

7.1 计算下列行列式:

$$\begin{aligned}
 1^\circ & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2^\circ \begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix};
 \end{aligned}$$

$$3^{\circ} \begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}; \quad 4^{\circ} \begin{vmatrix} \log_a a & \log_a c & 1 \\ \log_a a & 1 & \log_a b \\ 1 & \log_a c & \log_a b \end{vmatrix}.$$

解：行列式的计算，除由沙路法直接计算外，一般可利用性质及展开定理计算，这往往使计算简便得多，而且计算的途径也是多种多样的，这里首先要观察行列式中各行或列的对应元素间是否有某种规律性，使利用性质计算，达到预期的效果。

1° 用沙路法计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - (7 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 6) \\ = 45 + 84 + 96 - (105 + 72 + 48) \\ = 225 - 225 = 0.$$

用性质计算：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\times(-1)]{\substack{\uparrow \\ (6)}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\times(-1)]{\substack{\uparrow \\ (6)}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(4)} 0.$$

$\xrightarrow[\times(\lambda)]{\substack{\uparrow \\ (i)}}$ 表示某行（列）元素乘 λ 后加到另一行（列）对应元素上。等号上的数字表示利用了第几条性质。例 $\xrightarrow{(4)}$ 表示此等号利用了性质 4° 。

2° 用沙路法计算

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix} = n(n-1)(n+1) + (n+1)n(n-1)$$

$$+ (n-1)(n+1)n - ((n-1)^3 + (n+1)^3 + n^3) \\ = 3n^3 - 3n - 3n^3 - 6n = -9n.$$

用性质计算:

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n-1 \\ n+1 & n-1 & n \\ n-1 & n & n+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\uparrow \times(1) \\ \times(1)}]{(6)} \begin{vmatrix} 3n & n+1 & n-1 \\ 3n & n-1 & n \\ 3n & n & n+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times(-1) \\ \leftarrow \times(-1) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \xrightarrow{(6)} 3n \begin{vmatrix} 1 & n+1 & n-1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3n \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -9n.$$

3° 显然 $\sin x = 0$ 或 $\cos x = 0$ 时, 有

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix} = 0.$$

故设 $\sin x \neq 0$ 及 $\cos x \neq 0$, 则

$$\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \frac{1}{\cos x \sin x} \begin{vmatrix} 2 \sin x \cos x & \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin x \cos x & -\cos^2 x & \cos^2 x \\ \cos x \sin x & \sin^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \times(1) \\ \leftarrow \times(1) \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(6)} \frac{1}{\cos x \sin x} \begin{vmatrix} 2 \sin x \cos x & \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ 2 \sin x \cos x & \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin x \cos x & \sin^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix} \xrightarrow{(4)} 0.$$

4° 显然 $a \neq 1$ $b \neq 1$ $c \neq 1$ 且有 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

$$\begin{vmatrix} \log_a a & \log_a c & 1 \\ \log_c a & 1 & \log_c b \\ 1 & \log_c c & \log_c b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\log a}{\log b} & \frac{\log c}{\log b} & \frac{\log b}{\log b} \\ \frac{\log a}{\log c} & \frac{\log c}{\log c} & \frac{\log b}{\log c} \\ 1 & \log_c c & \log_c b \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\log b \log c} \begin{vmatrix} \log a & \log c & \log b \\ \log a & \log c & \log b \\ 1 & \log_c c & \log_c b \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} 0.$$

7.2 求满足方程的 x 值.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

解: 行列式当它的元素全部是已知数时, 它是由这些元素按一定规律运算后得到的一个数. 当元素中有未知数时, 它是一个包含未知数的代数式, 令这个代数式为零, 就是一个包含未知数的方程.

法一: 展开后直接解代数方程:

$$\begin{aligned} \text{因为 } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &\stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} x^2 - 4 & 4 & 5 \\ x - 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} x^2 - 4 & 5 \\ x - 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \times(-1) \times(-1)}}{=} - (x^2 - 4) + 5(x - 2) = (x - 2)(3 - x). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{即 } (x - 2)(3 - x) = 0.$$

得方程的解为: $x = 2, x = 3.$

$$\text{法二: } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

行列式的展开式中各项是不同行不同列的元素的乘积, 而现行列式中未知数均在第一列, 不会乘在一起, 且元素最高次方为二次, 故这是一个一元二次方程, 它应有两个根, 由观察, 当 $x=2$ 时, 行列式第一列和第二列的对应元素相等, 行列式为零, 故 $x=2$ 满足方程. 是方程的根, 同理 $x=3$ 也是方程的根, 所以由观察法得: 方程的两个根为, $x=2, x=3$.

7.3 分解因式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

解: 这是一个用行列式表示的关于 x, y, z 的代数式, 我们用下列两种方法来分解因式.

法一: 利用行列式性质计算行列式, 然后再分解因式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(6)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ \times(-1) \\ \uparrow \\ \times(-1) \end{matrix}$

$$\xrightarrow{(3)} (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

在计算过程中, 我们提出了公因子, 使分解因式的工作比较顺利, 若用沙路法展开后再分解因式, 就会麻烦得多.

法二: 直接从行列式中分析有些什么公因式, 找出其全部公因式, 再确定行列式是否和全部公因式的乘积相等.

观察行列式知, 当用 x 代替 y 时, 有
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x & z \\ x^2 & x^2 & z^2 \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} 0.$$

故行列式有因子 $(x-y)$, 同理用 y 代替 z , z 代替 x , 也使行列式为零, 因此我们至少已观察到行列式有三个因子 $(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$. 是否还有别的因子呢? 因为行列式展开式中各项的次数都为三次, 而已求的三个因子的乘积亦为三次, 所以不会再有别的因子了, (若还有别的因子, 则将出现比三次更高的项, 这是不可能的.) 当然, 我们还不能说行列式就等于这三个因子的连乘积, 因为还可能差一个常数因子. 故可设,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = k(x-y)(y-z)(z-x).$$

比较等式两边的系数就可以确定 k . 这里只要比较一项的系数即可, 例如主对角线元素的乘积项的系数: $1 \cdot y \cdot z^2$, 即比较 yz^2 项的系数, 得 $k=1$, 故

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

7.4 利用性质计算下列行列式:

$$\begin{aligned} 1^\circ & \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}; \\ 2^\circ & \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3^\circ \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

解: 一般计算行列式的主要思路是: 利用性质 6, 将某行

(或列) 中元素尽可能多的消成零, 再以该行 (或列) 元素展开, 降为低阶行列式计算。

1° 法一:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \times (-1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{每列中均} \\ \text{有两元素相} \\ \text{同, 可将一} \\ \text{个消成零.} \end{array} \right)$$

$$\stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{虽然第一} \\ \text{列中还有两} \\ \text{相同元素} c, \\ \text{但消成零对} \end{array} \right)$$

$$\stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ c & b+2c+2a & b \\ c & c+a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{展开好处不} \\ \text{多, 应在已} \\ \text{有的零所在} \\ \text{的行 (或列)} \end{array} \right)$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ c+a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \times (-1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{中尽可能多} \\ \text{的将非零元} \\ \text{素消成零.} \end{array} \right)$$

$$\stackrel{(6)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ -(a+b+c) & a+b+c \end{vmatrix},$$

$$\stackrel{(3)}{=} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+2c+2a & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)^3.$$

法二: 由观察三列对应元素之和均为: $2a+2b+2c$,

故可如下计算:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & a+c+2b \end{vmatrix}$$

$\begin{array}{c} \uparrow \\ \times(1) \\ \uparrow \\ \times(1) \end{array}$

$$\stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \times(-1) \\ \leftarrow \end{array} \right] \times(-1) \end{array}$$

$$\stackrel{(6)}{=} 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3.$$

指出下列计算的错误:

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \left[\begin{array}{l} (1) \text{行} - (2) \text{行} \end{array} \right]$$

$$\stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ a+b+c & -(a+b+c) & 0 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ 1 & -1 & 0 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \dots\dots$$