

现代数学基础丛书

惯性流形与 近似惯性流形

● 戴正德 郭柏灵 著



科学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍惯性流形与近似惯性流形的基本概念、研究方法和最新研究成果,内容包括惯性流形的存在性、构造和稳定性;近似惯性流形的构造、存在性、收敛性和 Gevrey 逼近;非线性 Galerkin 方法,非线性有限元逼近;惯性集的构造,正则吸引子结构,吸引子的分形局部化和分形结构。

本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,以及供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

惯性流形与近似惯性流形/戴正德,郭柏灵著.-北京:科学出版社,2000.1

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-007596-X

I. 惯… II. ①戴… ②郭… III. 流形分析 IV. 019

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 19306 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000 年 1 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

2000 年 1 月第一次印刷 印张: 8 3/8

印数: 1—1 800 字数: 217 000

定价: 19.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

《现代数学基础丛书》编委会

副主编：夏道行 龚昇 王梓坤 齐民友

编委：(以姓氏笔画为序)

万哲先	王世强	王柔怀	叶彦谦
孙永生	庄圻泰	江泽坚	江泽培
陈希孺	张禾瑞	张恭庆	严志达
胡和生	姜伯驹	聂灵沼	莫绍揆
曹锡华			



引 言

近 10 多年来,有限维动力系统的问题、思想以及部分性质已深深地渗透到无穷维动力系统和偏微分方程的理论之中.许多国内外学者已对数学物理发展方程描述的动力系统理论进行了研究,这些方程有 Navier-Stokes 方程、非线性 Schrödinger 方程, KdV 方程, 铁磁链方程, Ginzburg-Landau 方程, 反应扩散方程、阻尼半线性波方程等等. 由于许多科学家的努力,在适当的泛函空间已获得 Navier-Stokes 方程的整体吸引子. 即当 $t \rightarrow +\infty$ 时吸引 Navier-Stokes 系统所有有界集上出发的轨道的紧致连通集,且在 Hausdorff 意义下是紧的有限维集,维度的上、下界估计也已获得. Navier-Stokes 方程的上述结果刺激了对其他数学物理方程吸引子的研究. 数学家们已建立了吸引子存在性、基本性质、吸引子的局部化和流形逼近等一系列理论. 特别在最近几年围绕吸引子结构和方程解的长时间动力学性态研究,人们相继发现了惯性流形,即内含吸引子、指数地吸引解的轨道且在其上无穷维系统约化为有限维动力系统的有限维正不变 Lipschitz 流形. 发现了惯性形式、指数吸引子、决定结以及近似惯性流形等等;与此同时,在数值逼近研究领域,发展了线性 Galerkin 方法,建立了非线性 Galerkin 逼近以及其与有限元、有限差分相互交叉结合的其他逼近模式. 在此期间,对弱耗散发展方程定义的无穷维动力系统吸引子及相关问题也获得比较丰富的结果. 所有这些成果,对逐步揭示由非线性发展方程所刻划的非线性现象发生机理和内在规律有重要意义. 随着研究工作的展开,我国数学物理工作者也做了大量有成效的工作.

本书致力于无穷维动力系统惯性流形以及与之相关的一些课题,书中涉及到的内容,绝大多数是近几年取得的研究成果.

我们研究一类非线性发展方程:

$$\frac{du}{dt} + Au + R(u) = 0 \quad (1)$$

其中 A 在某一 Hilbert 空间 H 上是线性、自共轭无界算子, R 是非线性算子. 令 $S(t)$ 是由 (1) 及其初值问题确定的非线性算子半群, $S(t): u_0 \rightarrow u(t)$, 记 P 是 H 中具有有限维值域的正交投影, $Q = I - P$, 记 $p = Pu, q = Qu$; 假设 (1) 在 H 中存在有界吸收集, 于是在引进截断函数 θ , 且将 (1) 分解后, (1) 的解的长时间性态等价于下面两个方程解的性态:

$$\frac{dp}{dt} + Ap + PF(u) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dq}{dt} + Aq + QF(u) = 0 \quad (3)$$

其中 $F = \theta R(u)$. 假设 F 是定义在 R 上取值于 H 的有界连续函数, 则 (3) 有唯一解, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时保持有界, 于是

$$q(t) = e^{-(t-s)AQ} q(s) - \int_s^t e^{-(t-\tau)AQ} QF(u) d\tau$$

令 $s \rightarrow -\infty$, 有

$$q(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)AQ} QF(u(\tau)) d\tau \quad (4)$$

特别,

$$q(0) = - \int_{-\infty}^0 e^{\tau AQ} QF(u(\tau)) d\tau \quad u(\tau) = p(\tau) + q(\tau) \quad (5)$$

假设 Lipschitz 函数 $\phi: PD(A) \rightarrow QD(A)$, 其中 $D(A)$ 为 A 的定义域, $u(t) = p(t) + \phi(p(t))$, 于是

$$q(0) = - \int_{-\infty}^0 e^{\tau AQ} QF(p(\tau) + \phi(p(\tau))) d\tau$$

若 $p(\tau) = p(\tau, \phi, p_0)$ 是 (2) 中 $u = p + \phi(p)$ 时以 p_0 为始值的解, 定义映射 $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}\phi(p_0) = - \int_{-\infty}^0 e^{\tau AQ} QF(p(\tau) + \phi(p(\tau))) d\tau \quad (6)$$

换 p_0 为 $p(t)$, 注意到 $p(\tau, \phi, p(t)) = p(t + \tau, \phi, p_0)$, 于是

$$\mathcal{T}\phi(p(t)) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)AQ} QF(p(\tau) + \phi(p(\tau))) d\tau \quad (7)$$

可以证明,若算子 A 的谱满足“谱间隙”条件,则(7)中的映射 $\mathcal{T}$ 对一类函数空间 $\mathcal{T}_{b,l}$ 存在不动点 ϕ , 即有

$$\phi(p) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)AQ} QF(p(\tau) + \phi(p(\tau))) d\tau \quad (8)$$

令 $\mu = \text{graph } \phi$, 则 μ 满足如下条件:

(i) $S(t)\mu \subseteq \mu, \forall t \geq 0$;

(ii) μ 是有限维 Lipschitz 流形;

(iii) μ 指数地吸引(1)中所有解的轨线. 我们称 μ 为(1)的惯性流形. 显然在 μ 上(1)约化为(2), 其中 $u = p + \phi(p)$, 而(2)则是有限维常微动力系统. 称为(1)的惯性形式.

这就产生了一系列课题:

是否对具有吸引子的所有数学物理发展方程都存在惯性流形?

如果谱间隙条件不满足, 能否用其他流形或具有一定特征的集合逼近吸引子?

什么情况下, 可以用其他流形逼近惯性流形, 而且以 C^0, C^1 拓扑收敛到惯性流形? 即所谓近似惯性流形的构造问题.

近似惯性流形, 惯性流形的显式表示及数值逼近问题.

算子 A 非自共轭情形.

等等.

本书围绕上述问题, 对(1)的惯性流形, 近似惯性流形, 数值逼近模式, 近似惯性流形的收敛性, 吸引子的逼近等进行了较为系统的研究. 书中总结了1988年以来在无穷维动力系统的上述研究领域的许多重要成果, 其中有不少是作者及国内学者取得的.

第一章, 惯性流形. 研究了方程(1)在“谱间隙”条件下, 算子半群 $S(t)$ 的强收缩性和锥不变性, 基于锥不变性, 运用压缩映像原理导出惯性流形存在性, 研究了惯性流形的构造及其稳定性. 对算子 A 是非自共轭的情形也做了研究.

第二章,我们从惯性流形的逼近流形开始给出了近似惯性流形几种不同的构造方法和技巧,同时研究了解的 Gevrey 类正则性和指数逼近的近似惯性流形,对非自共轭弱耗散、非自治情形也获得近似惯性流形的一些结果.

第三章,我们研究了非线性 Galerkin 逼近模式,非线性 Galerkin 有限元,非线性 Galerkin 有限差分逼近模式. DT 逼近和近似惯性流形族的构造是近几年来最好的研究成果之一.

第四章研究了近似惯性流形的收敛性,DT 逼近的收敛性,近似惯性流形的 C^0, C^1 收敛性,一些收敛性结果是比较深刻的.

最后一章,第五章对(1)的指数吸引子进行了研究,研究发现,几乎所有具有吸引子的数学物理发展方程,都具有指数吸引子,即惯性分形集.研究了离散和连续动力系统的指数吸引子,弱耗散发展方程的指数吸引子,有界和无界域上(1)的指数吸引子,并对几类数学物理发展方程吸引子的分形结构进行了描述,同时给出吸引子的分形局部化逼近序列.

书后参考文献仅就最主要的列出,在每章序言中都给出了最主要的参考文献目录.

本书力求比较系统地总结近 10 年来在无穷维动力系统惯性流形以及吸引子相关领域的主要成果,对于动力系统研究领域、非线性发展方程研究领域和从事无穷维动力系统研究的高校教师、研究人员,科研院所相关研究人员,都可以不困难地通读全书内容,并会从中发现尚未解决的许多研究课题.

近 10 年来,在无穷维动力系统研究领域取得大量的研究成果,由于时间和篇幅所限,一些重要的成果可能未能述及,书中也可能有不妥之处,请读者鉴谅和指正.

本书得到中国科学院科学出版基金资助,在编写过程中得到国内外学者的支持和帮助,科学出版社吕虹同志付出了艰辛的劳动,我们在此一并表示诚挚的谢意.

作者

1998 年 5 月

目 录

第一章 惯性流形	1
§ 1 一类非线性演化方程的惯性流形	1
§ 2 惯性流形研究的新进展	22
第二章 近似惯性流形(AIM)	35
§ 1 惯性流形的逼近流形	35
§ 2 AIM 构造(I)	45
§ 3 AIM 构造(II)	62
§ 4 Gevrey 类正则性和指数逼近的 AIM	79
§ 5 非自共轭情形弱耗散方程的 AIM	93
§ 6 非自治系统 AIM 的构造	101
第三章 数值逼近	109
§ 1 非线性 Galerkin 逼近模式	109
§ 2 Galerkin 有限差分逼近	119
§ 3 Galerkin 有限元逼近	132
§ 4 DT 逼近格式和 AIM 的构造	147
第四章 AIM 的收敛性	161
§ 1 DT 逼近模式下 AIM 的收敛性	161
§ 2 强收缩性和锥不变性	171
§ 3 AIM 的 C^0 收敛性	179
§ 4 AIM 的 C^1 收敛性	186
第五章 指数吸引子与吸引子结构初步	193
§ 1 离散动力系统 IFS	193
§ 2 连续动力系统 IFS	204
§ 3 NS 方程的 IFS	210
§ 4 无界域上耗散发展方程 IFS	216

§ 5 弱耗散发展方程 IFS	226
§ 6 吸引子分形结构初步.....	243
参考文献	250

第一章 惯性流形

本章首先给出惯性流形的定义,证明了在“谱间隙”条件下,惯性流形存在性定理,在第二节介绍了惯性流形研究领域的新进展,本章主要参考文献见[1]~[35].

§1 一类非线性演化方程的惯性流形

在 Hilbert 空间 H 上给定内积 $(\cdot, \cdot)$, 非线性演化方程具有形式

$$\frac{du}{dt} + Au + R(u) = 0 \quad (1.1)$$

其中

$$R(u) = B(u, u) + Cu - f \quad (1.2)$$

A 是 H 上线性无界自共轭算子, $D(A)$ 在 H 中稠. 设 A 是正的, 即

$$(Av, v) > 0, \forall v \in D(A), v \neq 0$$

A^{-1} 是紧的, 映射 $u \rightarrow Au$ 是从 $D(A)$ 到 H 的同构. A^s 表示 A 的 s 次幂. 空间 $V_{2s} (s \in \mathbb{R}) (V_{2s} = D(A^s))$ 是 Hilbert 空间, 具有内积:

$$(u, v)_{2s} = (A^s u, A^s v), \forall u, v \in D(A^s)$$

$u \in V_s$, 令 $|u|_s = (u, u)_s^{\frac{1}{2}}$.

因 A^{-1} 是紧的和自共轭的, 则存在 H 的正交基 $\{w_j\}$, 由 A 的特征向量组成,

$$Aw_j = \lambda_j w_j \quad (1.3)$$

特征值满足

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_j \rightarrow +\infty, j \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

从(1.3),(1.4)易得

$$|A^{\frac{1}{2}}u| \geq \lambda_1^{\frac{1}{2}}|u|, u \in D(A^{\frac{1}{2}}) \quad (1.5)$$

$$|A^{p+\frac{1}{2}}u| \geq \lambda_1^{\frac{1}{2}}|A^p u|, \forall u \in D(A^{p+\frac{1}{2}}), \forall p \quad (1.6)$$

令 P_N 是 H 在 $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ 所成子空间的正交投影 ($N=1, 2, \dots$), $Q_N = I - P_N$. 在(1.2)中的非线性项为 $R(u)$, $B(u, u)$ 为双线性算子 $D(A) \times D(A) \rightarrow H$, C 是 $D(A)$ 到 H 的线性算子, $f \in D(A^{\frac{1}{2}})$. 进一步, 设

$$(B(u, v), v) = 0, \forall u, v \in D(A) \quad (1.7)$$

$$|B(u, v)| \leq C_1 |u|^{\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}}v|^{\frac{1}{2}} |Av|^{\frac{1}{2}}, \forall u, v \in D(A) \quad (1.8)$$

$$|Cu| \leq C_2 |A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}} |Au|^{\frac{1}{2}}, \forall u \in D(A) \quad (1.9)$$

其中 C_1, C_2 和下面的 $C_i (i=3, 4)$ 均为正常数. 对 B, C 附加如下连续性质:

$$|A^{\frac{1}{2}}B(u, v)| \leq C_3 |Au| |Av|, \forall u, v \in D(A) \quad (1.10)$$

$$|A^{\frac{1}{2}}Cu| \leq C_4 |Au|, \forall u \in D(A) \quad (1.11)$$

最后, 设 $A + C$ 是正的, 即有

$$((A + C)u, u) \geq \alpha |A^{\frac{1}{2}}u|^2, \forall u \in D(A), \alpha > 0 \quad (1.12)$$

考虑(1.1)的初值问题, 即(1.1)满足初始条件

$$u(0) = u_0 \in H \quad (1.13)$$

设问题(1.11), (1.13)具有唯一解 $S(t)u_0, \forall t \in \mathbb{R}^+$. $S(t)u_0 \in D(A), \forall t \in \mathbb{R}^+$. 映射 $S(t)$ 具有通常的半群性质.

现对方程(1.1)的解作一致先验估计. 为此, 需要如下不等式

和引理: 对于 $\beta > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p, q < +\infty$, 有

$$\sum |x_i y_i| = \sum |\beta x_i| |\beta^{-1} y_i|$$

$$\leq \frac{\beta^p}{p} \left(\sum |x_i|^p \right) + \frac{\beta-q}{q} \left(\sum |y_i|^q \right) \quad (1.14)$$

引理1.1 设 $g(t), h(t), y(t)$ 是三个正的可积函数, $t_0 \leq t < \infty$, 它满足

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h, \forall t \geq t_0 \quad (1.15)$$

且

$$\int_t^{t+1} g(s)ds \leq \alpha_1, \int_t^{t+1} h(s)ds \leq \alpha_2, \int_t^{t+1} y(s)ds \leq \alpha_3, \forall t \geq t_0 \quad (1.16)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正常数, 则有

$$y(t+1) \leq (\alpha_3 + \alpha_2) \exp(\alpha_1), \forall t \geq t_0 \quad (1.17)$$

(1.1) 和 u 作内积, 利用(1.7), (1.12) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + \alpha |A^{\frac{1}{2}} u|^2 &\leq |(f, u)| \\ &\leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} |f| |A^{\frac{1}{2}} u| \\ &\leq \frac{\alpha}{2} |A^{\frac{1}{2}} u|^2 + \frac{1}{2\lambda_1 \alpha} |f|^2 \end{aligned}$$

于是有

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + \alpha |A^{\frac{1}{2}} u|^2 \leq \frac{d}{dt} |u|^2 + \alpha |A^{\frac{1}{2}} u|^2 \leq \frac{1}{\alpha \lambda_1} |f|^2 \quad (1.18)$$

(1.1) 和 Δu 作内积, 由(1.8), (1.9) 和(1.14), 有

$$\begin{aligned} &|B(u, u) + (u, Au)| \\ &\leq C |u|^{\frac{1}{2}} |A^{\frac{1}{2}} u|^{\frac{3}{2}} + C_2 |A^{\frac{1}{2}} u|^{\frac{1}{2}} |Au|^{\frac{3}{2}} \\ &\leq 54 (C_1^4 |u|^2 |A^{\frac{1}{2}} u|^4 + C_2^4 |A^{\frac{1}{2}} u|^2) + \frac{1}{4} |Au|^2 \end{aligned}$$

类似地, 有 $|(f, Au)| \leq |f| |Au| \leq |f|^2 + \frac{1}{4} |Au|^2$. 由此可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |A^{\frac{1}{2}} u|^2 + \lambda_1 |A^{\frac{1}{2}} u|^2 \leq \frac{d}{dt} |A^{\frac{1}{2}} u|^2 + |Au|^2$$

$$\leq C_6 |u|^2 |A^{\frac{1}{2}} u|^4 + C_7 |A^{\frac{1}{2}} u|^2 + 2|f|^2 \quad (1.19)$$

(1.1)与 $A^2 u$ 作内积,得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Au|^2 + |A^{\frac{3}{2}} u|^2 \\ & \leq |B(u, u) + (Cu, A^2 u)| + |(f, A^2 u)| \\ & \leq |(A^{\frac{1}{2}}(B(u, u) + Cu), A^{\frac{3}{2}} u)| + |(A^{\frac{1}{2}} f, A^{\frac{3}{2}} u)| \\ & \leq C_3 |Au|^2 |A^{\frac{3}{2}} u| + C_4 |Au| |A^{\frac{3}{2}} u| + |A^{\frac{1}{2}} f| |A^{\frac{3}{2}} u| \\ & \leq \frac{1}{2} C_8 |Au|^4 + \frac{1}{2} C_9 |Au|^2 + \frac{3}{2} |A^{\frac{1}{2}} f|^2 + \frac{1}{2} |A^{\frac{3}{2}} u|^2 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} |Au|^2 + \lambda_1 |Au|^2 \leq \frac{d}{dt} |Au|^2 + |A^{\frac{3}{2}} u|^2 \\ & \leq C_8 |Au|^4 + C_9 |Au|^2 + 3 |A^{\frac{1}{2}} f|^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

将(1.15)应用于(1.18),可得 $u(t) = S(t)u_0$,

$$|u(t)|^2 \leq |u(0)|^2 \exp(-\alpha \lambda_1 t) + \rho_0^2 (1 - \exp(-\alpha \lambda_1 t)) \quad (1.21)$$

其中 $\rho_0 = \frac{1}{2\lambda_1} |f|$. 因此 $|u(t)|$ 对 t 一致有界,有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)|^2 \leq \rho_0^2 \quad (1.22)$$

再从(1.18),有 $\int_t^{t+1} |A^{\frac{1}{2}} u|^2 ds$ 是一致有界的. 由(1.19),有

$$\frac{d}{dt} |A^{\frac{1}{2}} u|^2 \leq C_{10} |A^{\frac{1}{2}} u|^4 + (C_7 - \lambda_1) |A^{\frac{1}{2}} u|^2 + 2|f|^2$$

其中 $C_{10} = C_6 b_0^2$, $|u(t)|^2 \leq b_0^2$, $t \geq 0$. 则由引理 1.1, 令

$$g = C_{10} |A^{\frac{1}{2}} u|^2, \quad y = |A^{\frac{1}{2}} u|^2$$

$$h = (C_7 - \lambda_1) |A^{\frac{1}{2}} u|^2 + 2|f|^2$$

可得 $|A^{\frac{1}{2}}u|^2$ 在 H 上一致有界. 由 (1.19) 可知 $\int_t^{t+1} |Au(s)|^2 ds$ 一致有界, 再从 (1.20) 可得 $|Au(t)|^2$ 和 $\int_t^{t+1} |A^{\frac{3}{2}}u(s)|^2 ds$ 对 t 一致有界, 因而

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2 \leq \rho_1^2 \quad (1.23)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |Au(t)|^2 \leq \rho_2^2 \quad (1.24)$$

从 (1.22), (1.23), (1.24) 可知: (1.1) 的任何解在某个时间之后 ($t \geq t_0 > 0$) 分别进入球

$$B_0 = \{x \in H, |x| \leq 2\rho_0\}$$

$$B_1 = \{x \in D(A^{\frac{1}{2}}), |A^{\frac{1}{2}}x| \leq 2\rho_1\}$$

$$B_2 = \{x \in D(A), |Ax| \leq 2\rho_2\}$$

中, 且 B_2 的 ω 极限集 $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} = \omega(B_2) = \bigcap_{s \geq 0} Cl(\bigcup_{t \geq s} S(t)B_2)$$

是 (1.1) 的整体吸引子, 闭包 Cl 取在 H 上, 且有

$$\mathcal{A} \subseteq B_2 \cap B_1 \cap B_0$$

我们考虑 (1.1) 的截断方程的惯性流形. 设 $\theta(s)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 到 $[0, 1]$ 的光滑函数: $\theta(s) = 1, 0 \leq s \leq 1; \theta(s) = 0, s \geq 2, |\theta'(s)| \leq 2, s \geq 0$. 固定 $\rho = 2\rho_2$, 定义

$$\theta_\rho(s) = \theta\left(\frac{s}{\rho}\right), \quad s \geq 0$$

则 (1.1) 的截断方程为

$$\frac{du}{dt} + Au + \theta_\rho(|Au|)R(u) = 0 \quad (1.25)$$

(1.25) 具初值 $u(0) = u_0 \in H$ 的解的存在性、唯一性的证明是直接的. 显然, 当 $|Au| \leq \rho$ 时, $\theta_s(|Au|) = 1$. (1.24) 和 (1.1) 是相合的. 当 $|Au| \geq 2\rho$ 时, $\theta_\rho(|Au|) = 0$. 作 (1.24) 与 A^2u 的内积, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Au|^2 + \lambda_1 |Au|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Au)^2 + |A^{\frac{3}{2}}u|^2 \leq 0$$

因而轨线 $u(t)$ 将在 $D(A)$ 中以指数收敛于半径 $\rho_3 \geq 2\rho$ 的球中. 另外, $R(u)$ 对 u 是局部 Lipschitz 连续的, 而 $F(u) = \theta_\rho(|u|) \cdot R(u)$ 是整体 Lipschitz (以下简写 Lip) 连续, 即存在 K , 使

$$|F(u) - F(v)| \leq K|u - v|, \forall u, v \in H \quad (1.26)$$

定义 半群算子 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的惯性流形, 是一个有限维的光滑流形 $\mu \in H$ (起码是 Lip), 它满足

(i) μ 是不变的. 即有

$$S(t)\mu \subset \mu. \quad (1.27)$$

(ii) μ 指数地吸引 (1.25) 方程的所有解. 即存在常数 $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, 对于 $u_0 \in H$, 有

$$\text{dist}(S(t)u_0, \mu) \leq k_1 e^{-k_2 t}, \forall t \geq 0 \quad (1.28)$$

(iii) 吸引子 $\mathcal{A}$ 在 μ 上.

现在要构造出惯性流形, 从而证明惯性流形的存在性. 设 P_N 是在 H 中 N 维的正交投影, $Q_N = I - P_N$. 并记 $P = P_N$, $Q = Q_N$. 设 $u(t)$ 是 (1.25) 的解. 令 $p(t) = Pu$, $q(t) = Qu$, 则 $p(t)$, $q(t)$ 在 PH 和 QH 上满足:

$$\frac{dp}{dt} + Ap + PF(u) = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{dq}{dt} + Aq + QF(u) = 0 \quad (1.30)$$

其中 $F(u) = \theta_\rho(|Au|)R(u)$. 且 $u = p + q$. 我们寻求惯性流形 μ , 它是由 Lip 函数 $\Phi: PD(A) \rightarrow QD(A)$ 的图构造得到的. 即 $\mu = \text{graph } \Phi$. 函数 Φ 作为一个算子, 在函数类 $\mathcal{F}_{b,l}$ 上的不动点得到. 其中 $\mathcal{F}_{b,l}$ 是一类函数 $\Phi: PD(A) \rightarrow QD(A)$, 它满足

$$|A\Phi(p)| \leq b, \forall p \in PD(A) \quad (1.31)$$

$$|A\Phi(p_1) - A\Phi(p_2)| \leq l|Ap_1 - Ap_2|, \forall p_1, p_2 \in PD(A) \quad (1.32)$$

$$\text{supp } \Phi \subset \{p \in PD(A) \mid |Ap| \leq 4\rho\}$$

其中 $b > 0, l > 0$. 当 $p = p(t)$, $q = \Phi(p(t))$ 满足 (1.29) (1.30) 时, $u = p(t) + \Phi(p(t))$ 为 (1.25) 的解. 设 Φ 在 $\mathcal{F}_{b,l}$ 中给定, $p_0 \in$

$PD(A)$, 则

$$\frac{dp}{dt} + Ap + PF(p + \Phi(p)) = 0, p(0) = p_0 \quad (1.33)$$

的解 $p = p(t; p_0, \Phi)$ 是唯一存在的. 这是由于 $\sigma \rightarrow \theta_\sigma R(\sigma + \Phi(\sigma))$ 是 Lip 连续的. 因 $p = p(t; p_0, \Phi), \forall t \in \mathbb{R}$. 类似于 (1.30), 有

$$\frac{dq}{dt} + Aq + QF(p + \Phi(p)) = 0, p(0) = p_0 \quad (1.34)$$

由于 $QF(p + \Phi(p))$ 是有界的: $R \rightarrow H$, 因此 (1.34) 存在唯一的当 $t \rightarrow \infty$ 时是有界的解 $q(t)$. 由此可得

$$q(0) = - \int_{-\infty}^0 e^{\tau A Q} QF(p + \Phi(p)) d\tau \quad (1.35)$$

其中 $p = p(\tau) = p(\tau, \Phi, p_0)$. $q(0)$ 依赖于 $\Phi \in \mathcal{F}_{b,l}$ 和 $p \in PD(A)$. $q(0) = q(0, p_0, \Phi)$. 函数

$$p_0 \in PD(A) \rightarrow q(0; p_0, \Phi) \in QD(A)$$

把 $PD(A)$ 映射到 $QD(A)$, 记为 $\mathcal{F}\Phi$. 因此

$$\mathcal{F}\Phi(p_0) = - \int_{-\infty}^0 e^{\tau A Q} QF(u) d\tau \quad (1.36)$$

其中 $u = u(\tau) = p(\tau, \Phi, p_0) + \Phi(p(\tau; \Phi, p_0))$. 因 $q(0) = \Phi(p_0)$, 于是寻求关于 N, b, l 的条件, 使

- (i) $\mathcal{F}$ 映射 $\mathcal{F}_{b,l}$ 到自身;
- (ii) $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{F}_{b,l}$ 上是压缩的.

现在考虑函数 $\Phi: PD(A) \rightarrow QD(A) (P = P_N, Q = Q_N = I - P_N)$. $\Phi \in \mathcal{F}_{b,l}$, 即满足 (1.31) ~ (1.33).

引入距离

$$\|\Phi - \Psi\| = \sup_{p \in D(A)} |A\Phi(p) - A\Psi(p)| \quad (1.37)$$

则 $\mathcal{F}_{b,l}$ 是一个完备的度量空间. 对于 $\Phi \in \mathcal{F}_{b,l}$, 映射 $\mathcal{F}$ 在 $PD(A)$ 上定义为

$$\mathcal{F}\Phi(p_0) = - \int_{-\infty}^0 e^{\tau A Q} QF(u) d\tau, p_0 \in PD(A) \quad (1.38)$$

其中 $u(\tau) = p(\tau; \Phi, p_0) + \Phi(p(\tau; \Phi, p_0))$, $p(\tau; \Phi, p)$ 是 (1.29) 满足 $p(0; \Phi, p_0) = p_0$ 的解. 以下我们对算子 $\mathcal{F}$ 的性质进行研究.

引理 1.2 设 $\alpha > 0$ 和 $\tau < 0$, 算子 $(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}$ 在 QH 上是线性、连续的, 它在 $\mathcal{H}(QH)$ 上的模 (即 $|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_0$) 是囿于

$$\begin{aligned} K_3 |\tau|^{-\alpha}, \quad & \text{当 } -\alpha \lambda_{N+1}^{-1} \leq \tau < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{N+1}^\alpha e^{\tau \lambda_{N+1}}, \quad & \text{当 } -\infty < \tau \leq -\alpha \lambda_{N+1}^{-1} \text{ 时} \end{aligned} \quad (1.39)$$

证 设 $v = \sum_{j=N+1}^{\infty} b_j \omega_j$ 是 QH 上的一个元素, 则

$$\begin{aligned} |(AQ)^\alpha e^{\tau AQ} v|^2 &= \sum_{j=N+1}^{\infty} (\lambda_j^\alpha e^{\tau \lambda_j})^2 b_j^2 \leq \sup_{\lambda \geq \lambda_{N+1}} (\lambda^\alpha e^{\tau \lambda})^2 \sum b_j^2 \\ &= \sup_{\lambda \geq \lambda_{N+1}} (\lambda^\alpha e^{\tau \lambda})^2 |v|^2 \end{aligned}$$

因此

$$|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_0 \leq \sup_{\lambda \geq \lambda_{N+1}} \lambda^\alpha e^{\tau \lambda}$$

初等计算表明

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_{N+1}} (\lambda^\alpha e^{\tau \lambda}) = \begin{cases} |\tau|^{-\alpha} (\alpha e^{-1})^\alpha, & \text{当 } -\alpha \lambda_{N+1}^{-1} \leq \tau < 0 \text{ 时} \\ \lambda_{N+1}^\alpha e^{\tau \lambda_{N+1}}, & \text{当 } \tau \leq -\alpha \lambda_{N+1}^{-1} \text{ 时} \end{cases}$$

我们得到 (1.39), 其中 $K_3 = K_3(\alpha) = (\alpha e^{-1})^\alpha$.

作为 (1.39) 的直接推论, 有

$$\int_{-\infty}^0 |(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_0 d\tau \leq (1-\alpha)^{-1} e^\alpha \lambda_{N+1}^{-\alpha-1} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.40)$$

从 (1.10), (1.11) 可得

$$\begin{aligned} |(AQ)^{\frac{1}{2}} R(u)| &\leq |A^{\frac{1}{2}} B(u, u)| + |A^{\frac{1}{2}} C u| + |A^{\frac{1}{2}} f| \\ &\leq C_3 |Au|^2 + C_4 |Au| + |A^{\frac{1}{2}} f| \end{aligned}$$

当 $|Au| > 2\rho$ 时, $\theta_\rho(|Au|) = 0$, 有

$$|(AQ)^{\frac{1}{2}} F(u)| \leq K_4 \quad (1.41)$$

其中 $K_4 = 4C_3\rho^2 + |A^{\frac{1}{2}} f|$, $F(u)$ 由 (1.30) 所决定.

引理 1.3 设 $p_0 \in PD(A)$, $\mathcal{F}\Phi(p_0) \in QD(A)$, 则

$$|A\mathcal{F}\Phi(p_0)| \leq K_5 \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \quad (1.42)$$