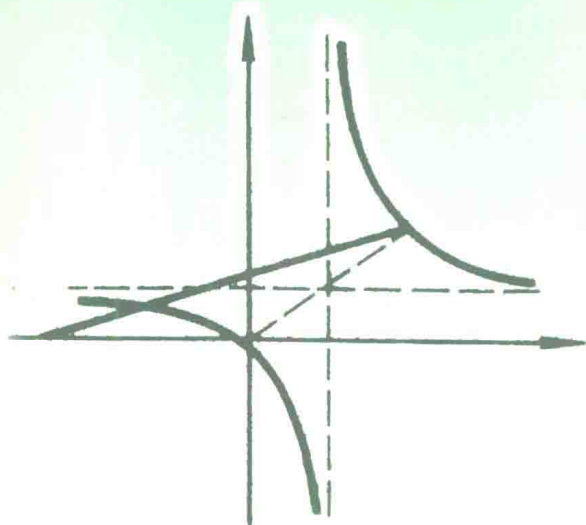


平面解析几何 方法与研究

刘连璞 编著



北京大学出版社

平面解析几何方法与研究

刘连璞 编著

北京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面解析几何方法与研究/刘连璞编著. —北京:北京
大学出版社,1999.8

ISBN 7-301-04170-5

I. 平… II. 刘… III. 平面几何:解析几何 IV. 0182.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 17835 号

书 名: 平面解析几何方法与研究

著作责任者: 刘连璞 编著

责任编辑: 王 艳

标准书号: ISBN 7-301-04170-5/O · 446

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 编辑室 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京高新特公司激光照排中心

印 刷 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 32 开本 14.375 印张 322 千字

1999 年 9 月第一版 1999 年 9 月第一次印刷

定 价: 19.00 元

前 言

平面解析几何是数学基础课程之一,它对进一步学习近代数学有密切关系.

编者在教学实践中,根据自己的教学经验,陆续积累了这方面的一些材料,本书就是把这些材料加以补充整理而成的.

本书各章节联系紧密,条理清楚,力图避免内容支离破碎.

本书较全面地介绍了欧氏平面解析几何的知识.例如,在第一章(直角坐标)介绍了有向线段、有向角及射影的基本原理;在第二章(曲线与方程)介绍了曲线的水平渐近线与垂直渐近线的求法;在第三章(直线)介绍了二元一次不等式表示的平面区域、二元二次方程表示两条直线的条件,并且详细讨论了中心直线束;在第四章(圆)介绍了极线、共轴圆系及平面上的反演变换;在第五章(椭圆)、第六章(双曲线)、第七章(抛物线),较详细地介绍了三种圆锥曲线的切线的性质以及极线;在第八章(坐标变换·二次曲线的一般理论)详细地介绍了二次曲线的不变量以及二次曲线的判定与方程的化简;在第九章(参数方程)详细介绍了二次曲线的渐近线、切线与直径;在第九章、第十章(极坐标)介绍了一些常用的经典曲线.斜角坐标这个内容,在普通解析几何书中很少论及,为此,本书在附录中作了初步介绍.

本书中的定理,凡在普通解析几何书中常见的,或容易证明的,一般不再予以证明;不常见的,都适当地给出了证明.证明力求严谨.

本书没有配备习题,但给出了一定数量的例题.这些例题都

经过了精心的选择,这对深刻理解本书中的重要概念、掌握基本方法以及提高解题能力都有一定帮助.有的例题也是对正文内容的补充.

本书可作为学有余力的高中学生的课外学习用书,对扩大他们的知识面,提高学习兴趣有一定帮助;师范院校学生准备将来从事数学教学工作的,他们可以从本书中获得很多有助于教学的知识,为将来工作打好基础;本书也可供青年数学教师参考之用,对加深理解教材,丰富解析几何知识,对提高驾驭解析几何方法的能力都有帮助.

编者衷心感谢北京教育学院杨大淳、张鸿顺两位教授,他们审阅了本书初稿,并提出了宝贵的改进意见.特别要感谢北京大学数学科学学院姚孟臣副教授,他对本书的编写、出版,一直给予很大关心和帮助,并且详细审阅了本书的最后稿,使本书得到很大改进.

限于编者水平,书中不妥或错误在所难免,敬请读者批评指正.

刘连璞

1998年12月于北京

绪 论

我们首先介绍一下解析几何的简单历史. 究竟是谁建立了解析几何, 它建立在什么年代, 所有这些问题, 都存在不同意见, 这是因为在古代埃及、希腊、罗马时期的实际问题和某些研究中, 实际上已经有了属于解析几何的某些内容. 但大多数史学家都认为 17 世纪法国的两位数学家笛卡儿 (Rene Descartes, 1596—1650, 哲学家、数学家) 和费马 (Pierre de Fermat, 1601—1665, 法学家、数学家) 是解析几何的奠基人, 并且主要是笛卡儿. 一般认为笛卡儿于 1637 年发表的哲学著作《方法论》中的一个附录《几何学》是解析几何的创始作品, 所以我们都认为解析几何建立于 1637 年. 以后又经过数学家们, 如牛顿 (Isaac Newton, 1642—1727, 英国物理学家、数学家)、莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716, 德国哲学家、数学家)、欧拉 (Leonard Euler, 1707—1783, 瑞士数学家) 等人一百多年的改进、补充, 才逐渐形成了今天的解析几何. 笛卡儿与费马之所以能建立解析几何, 与他们所处的时代是分不开的. 他们所处的时代正是中世纪 (15 世纪中叶至 17 世纪中叶) 欧洲文艺复兴的后期, 这个时期的生产技术和自然科学、文学艺术都出现了新面貌, 得到了新发展, 所有这一切, 都自然而然地对数学提出了新问题, 希望从数学中得到解决. 这样, 在数学中就必须研究曲线, 就必须研究长度、面积、体积的计算, 就必须研究变量与变量之间的函数关系. 于是在数学中几乎同时引起了三个数学学科的建立, 这就是笛卡儿和费马的解析几何与牛顿和莱布尼兹

的微分学与积分学. 这几种学科的建立, 标志着数学从初等数学(常量数学)发展到了高等数学(变量数学). 新学科的建立从本质上改变了整个数学的面貌, 使得只用初等数学无法解决的问题变得易于解决了.

笛卡儿等人建立的解析几何有两个基本思想. 一个是点的坐标的概念, 通过这个概念把点和数联系起来; 另一个是曲线方程的概念, 通过这个概念把曲线和方程联系起来, 这样就可以利用代数或分析的方法来研究几何图形的性质了, 这对几何的发展起了巨大的推动作用.

所谓解析几何, 通常是指应用代数方法来研究一些简单曲线(如直线、圆锥曲线等)的简单性质的几何. 这样, 解析几何与我们过去已经学过的初等几何的主要区别不在于它们所研究的对象, 而在于研究这些对象时所使用的方法. 解析几何使用的是代数解析法, 即坐标法; 而初等几何使用的是综合法, 即古典公理法. 现代研究几何还有一种方法, 叫做(现代)公理法, 这是一套纯理论方法, 例如几何基础这个几何分支使用的就是这种方法. 研究几何所使用的这些方法的区分并不是绝对的, 我们很难划分出综合法与公理法的严格界线, 同样, 解析法与公理法也不免有混淆的地方. 这样的分类不过是根据历史发展的进程而作出的一种不严密的分类而已.

内 容 简 介

《平面解析几何方法与研究》一书全面系统地介绍了欧氏平面解析几何的有关重要内容,是作者参考了多种有关论著并结合自己的教学经验整理而成的。本书对进一步理解平面解析几何基本内容、拓宽知识面都有很大帮助。对于书中的难点和一般解析几何书中不常见到的内容作者都作了严谨而详细地论述,并配备了较多例题。每个例题都具有典型意义,是对正文的重要补充;这些例题对理解重要概念、掌握解析几何方法有重要作用。因此,《平面解析几何方法与研究》是一本有价值的数学教学参考书。

本书可作为高中或师范院校学生的课外学习用书,也可供中学或师范院校青年教师参考之用。教师可以从中得到许多与解析几何教材密切联系的重要知识,有助于数学教学工作。

目 录

绪论	(I)
第一章 直角坐标	(1)
§ 1.1 有向线段	(1)
1.1.1 有向线段	(1)
1.1.2 配置在轴上的有向线段	(1)
§ 1.2 直线上的点的直角坐标	(3)
1.2.1 直线上的直角坐标系	(3)
1.2.2 直线上的点的直角坐标	(4)
§ 1.3 几个基本公式	(4)
1.3.1 坐标轴上的有向线段的数值和长度	(4)
1.3.2 线段的定比分点	(5)
§ 1.4 平面上的点的直角坐标	(5)
1.4.1 平面上的直角坐标系	(5)
1.4.2 平面上的点的直角坐标	(6)
1.4.3 复点	(7)
§ 1.5 射影的基本原理	(7)
1.5.1 有向角·轴、有向线段之间的角	(7)
1.5.2 有向线段和有向折线在轴上的正射影	(13)
1.5.3 有向线段在坐标轴上的正射影	(16)
§ 1.6 几个基本公式	(17)
1.6.1 两点间的距离	(17)
1.6.2 线段的定比分点	(19)
1.6.3 三角形的面积	(24)
第二章 曲线与方程	(29)
§ 2.1 曲线的直角坐标方程的定义	(29)

§ 2.2	已知曲线,求它的方程	(29)
§ 2.3	已知曲线的方程,描绘曲线	(33)
2.3.1	描点法	(33)
2.3.2	曲线性质的讨论	(33)
2.3.3	已知曲线的方程,讨论并描绘曲线	(39)
§ 2.4	曲线的交点	(42)
第三章	直线	(44)
§ 3.1	直线的倾斜角和斜率	(44)
3.1.1	直线的倾斜角	(44)
3.1.2	直线的斜率	(44)
§ 3.2	直线的方程	(45)
3.2.1	平行于坐标轴的直线的方程	(45)
3.2.2	直线的点斜式方程	(46)
3.2.3	直线的斜截式方程	(49)
3.2.4	直线的两点式方程	(51)
3.2.5	直线的截距式方程	(52)
3.2.6	直线的一般式方程	(53)
3.2.7	直线的法线式方程	(58)
§ 3.3	直线到点的有向距离	(66)
§ 3.4	二元一次不等式表示的平面区域	(71)
§ 3.5	两条直线的相关位置	(74)
3.5.1	两条直线的相关位置	(74)
3.5.2	两条直线的夹角	(74)
3.5.3	两条直线平行与垂直的条件	(78)
§ 3.6	二元二次方程表示两条直线的条件	(80)
§ 3.7	三条直线的相关位置	(84)
§ 3.8	直线系	(89)
3.8.1	直线系的方程的定义	(90)
3.8.2	平行直线束的方程	(90)
3.8.3	中心直线束的方程	(92)

第四章 圆	(97)
§ 4.1 圆的定义	(97)
§ 4.2 圆的方程	(97)
4.2.1 圆的标准方程	(97)
4.2.2 圆的一般方程	(97)
§ 4.3 点和圆的相关位置	(102)
§ 4.4 圆的切线	(103)
4.4.1 圆上一点的切线方程	(103)
4.4.2 圆的已知斜率的切线方程	(104)
4.4.3 从已知点到已知圆引的切线的方程	(106)
4.4.4 从已知点到已知圆引的切线的长	(109)
§ 4.5 点关于圆的切点弦与极线	(110)
4.5.1 点关于圆的切点弦	(110)
4.5.2 点关于圆的极线	(111)
§ 4.6 共轴圆系	(115)
4.6.1 共轴圆系	(115)
4.6.2 共轴圆系的正交圆	(128)
§ 4.7 平面上的反演变换	(134)
第五章 椭圆	(138)
§ 5.1 椭圆的定义	(138)
§ 5.2 用平面截直圆锥面可以得到椭圆	(138)
§ 5.3 椭圆的标准方程	(140)
§ 5.4 椭圆的基本性质及有关概念	(141)
5.4.1 对称性	(141)
5.4.2 截距	(142)
5.4.3 范围	(142)
5.4.4 离心率	(142)
5.4.5 椭圆的通径、焦半径	(144)
5.4.6 椭圆的准线	(145)
5.4.7 椭圆的第二种定义	(147)
§ 5.5 点和椭圆的相关位置	(156)

§ 5.6 椭圆的切线与法线	(157)
5.6.1 曲线的切线的一般定义	(157)
5.6.2 求曲线上已知点的切线方程的方法	(158)
5.6.3 椭圆的切线方程	(160)
5.6.4 椭圆的切线和法线的性质及判定定理	(164)
§ 5.7 点关于椭圆的切点弦与极线	(168)
5.7.1 点关于椭圆的切点弦	(168)
5.7.2 点关于椭圆的极线	(169)
§ 5.8 椭圆的面积	(170)
第六章 双曲线	(172)
§ 6.1 双曲线的定义	(172)
§ 6.2 用平面截直圆锥面可以得到双曲线	(172)
§ 6.3 双曲线的标准方程	(173)
§ 6.4 双曲线的基本性质及有关概念	(175)
6.4.1 对称性	(175)
6.4.2 截距	(175)
6.4.3 范围	(176)
6.4.4 渐近线	(176)
6.4.5 离心率	(177)
6.4.6 双曲线的通径、焦半径	(177)
6.4.7 双曲线的准线	(178)
6.4.8 双曲线的第二种定义	(179)
§ 6.5 等轴双曲线	(180)
§ 6.6 共轭双曲线	(181)
§ 6.7 点和双曲线的相关位置	(187)
§ 6.8 双曲线的切线与法线	(188)
6.8.1 双曲线的切线方程	(188)
6.8.2 双曲线的切线和法线的性质及判定定理	(192)
§ 6.9 点关于双曲线的切点弦与极线	(195)
6.9.1 点关于双曲线的切点弦	(195)

6.9.2 点关于双曲线的极线	(195)
第七章 抛物线	(197)
§ 7.1 抛物线的定义	(197)
§ 7.2 用平面截直圆锥面可以得到抛物线	(197)
§ 7.3 抛物线的标准方程	(199)
§ 7.4 抛物线的基本性质及有关概念	(201)
7.4.1 对称性	(201)
7.4.2 截距	(201)
7.4.3 范围	(201)
7.4.4 离心率	(202)
7.4.5 抛物线的通径、焦半径	(203)
§ 7.5 点和抛物线的相关位置	(207)
§ 7.6 抛物线的切线与法线	(208)
7.6.1 抛物线的切线方程	(208)
7.6.2 抛物线的切线和法线的性质及判定定理	(213)
§ 7.7 点关于抛物线的切点弦与极线	(214)
7.7.1 点关于抛物线的切点弦	(214)
7.7.2 点关于抛物线的极线	(214)
§ 7.8 抛物线弓形的面积	(216)
第八章 坐标变换·二次曲线的一般理论	(221)
§ 8.1 坐标变换的概念	(221)
§ 8.2 坐标轴的平移	(221)
8.2.1 坐标轴的平移	(221)
8.2.2 平移公式	(222)
8.2.3 平移公式的基本应用	(222)
§ 8.3 利用平移化简曲线方程	(223)
8.3.1 代公式法	(223)
8.3.2 配方法	(224)
§ 8.4 圆锥曲线的更一般的标准方程	(225)
8.4.1 椭圆的更一般的标准方程	(225)

8.4.2	双曲线的更一般的标准方程	(228)
8.4.3	抛物线的更一般的标准方程	(229)
8.4.4	缺坐标交叉项的二元二次方程的曲线	(233)
§ 8.5	坐标轴的旋转	(234)
8.5.1	坐标轴的旋转	(234)
8.5.2	旋转公式	(234)
8.5.3	旋转公式的基本应用	(235)
§ 8.6	坐标变换的一般公式	(236)
§ 8.7	曲线的分类	(242)
§ 8.8	二次曲线在直角坐标变换下的不变量 与半不变量	(244)
8.8.1	二元二次方程的几个记号	(244)
8.8.2	在直角坐标变换下二元二次方程的系数的变换	(245)
8.8.3	二次曲线在直角坐标变换下的不变量与半不变量	(246)
§ 8.9	二元二次方程的曲线	(251)
8.9.1	二元二次方程的曲线	(251)
8.9.2	二元二次方程的曲线的判定	(252)
§ 8.10	二次曲线方程的化简	(259)
8.10.1	利用坐标变换化简二次曲线方程	(260)
8.10.2	利用不变量化简二次曲线的方程	(279)
§ 8.11	确定一条二次曲线的条件	(287)
§ 8.12	二次曲线系	(289)
8.12.1	三种二次曲线对于顶点的统一方程	(289)
8.12.2	共焦点的椭圆和双曲线系	(291)
第九章	参数方程	(296)
§ 9.1	曲线的参数方程的定义	(296)
§ 9.2	曲线的参数方程与普通方程的互化	(296)
9.2.1	由曲线的参数方程求普通方程	(296)
9.2.2	由曲线的普通方程求参数方程	(301)
§ 9.3	已知曲线,求它的参数方程	(304)
§ 9.4	已知曲线的参数方程,描绘曲线	(306)

§ 9.5	曲线的交点	(307)
9.5.1	已知一条曲线的参数方程及一条曲线的普通 方程,求它们的交点	(307)
9.5.2	已知两条曲线的参数方程,求它们的交点	(308)
§ 9.6	直线的参数方程	(311)
§ 9.7	圆的参数方程	(315)
§ 9.8	椭圆的参数方程	(317)
§ 9.9	双曲线的参数方程	(320)
§ 9.10	抛物线的参数方程	(324)
§ 9.11	二次曲线的渐近线	(329)
9.11.1	二次曲线与直线的相关位置	(329)
9.11.2	二次曲线的渐近线	(332)
§ 9.12	二次曲线的切线	(336)
9.12.1	二次曲线的奇异点	(336)
9.12.2	二次曲线的切线	(336)
§ 9.13	二次曲线的直径·牛顿关于代数曲线的 直径的一般理论	(340)
9.13.1	二次曲线的直径的定义	(340)
9.13.2	二次曲线的直径的方程	(341)
9.13.3	二次曲线的共轭直径	(345)
9.13.4	二次曲线的主径	(347)
9.13.5	二次曲线的直径的若干性质	(348)
9.13.6	牛顿关于代数曲线的直径的一般理论	(352)
§ 9.14	两种著名的三次曲线	(357)
9.14.1	戴奥克利斯蔓叶线	(357)
9.14.2	笛卡儿叶形线	(360)
§ 9.15	几种旋轮线与圆的渐伸线	(361)
9.15.1	普通旋轮线	(361)
9.15.2	圆内旋轮线	(366)
9.15.3	圆外旋轮线	(372)
9.15.4	圆的渐伸线	(375)

第十章 极坐标	(378)
§ 10.1 平面上的点的极坐标.....	(378)
10.1.1 平面上的极坐标系.....	(378)
10.1.2 平面上的点的极坐标.....	(378)
10.1.3 已知点的对称点.....	(380)
10.1.4 点的极坐标与直角坐标的关系.....	(381)
10.1.5 几个基本公式.....	(384)
§ 10.2 曲线的极坐标方程.....	(385)
10.2.1 曲线的极坐标方程的定义.....	(385)
10.2.2 曲线的极坐标方程的等价.....	(385)
10.2.3 曲线的极坐标方程与直角坐标方程的互化.....	(387)
10.2.4 已知曲线,求它的极坐标方程.....	(389)
10.2.5 已知曲线的极坐标方程,描绘曲线.....	(389)
10.2.6 曲线的交点.....	(398)
§ 10.3 直线的极坐标方程.....	(401)
§ 10.4 圆的极坐标方程.....	(403)
§ 10.5 圆锥曲线的极坐标方程.....	(406)
§ 10.6 尼哥米得蚌线与帕斯卡蚶线.....	(411)
10.6.1 尼哥米得蚌线.....	(411)
10.6.2 帕斯卡蚶线.....	(414)
§ 10.7 几种螺线.....	(416)
10.7.1 阿基米得螺线.....	(416)
10.7.2 双曲螺线.....	(421)
10.7.3 对数螺线.....	(423)
§ 10.8 双纽线与玫瑰线.....	(426)
10.8.1 双纽线.....	(426)
10.8.2 玫瑰线.....	(427)
附录 斜角坐标	(433)
§ 1 斜角坐标.....	(433)
1.1 斜角坐标系.....	(433)
1.2 平面上的点的斜角坐标.....	(434)

§ 2 几个基本公式	(434)
2.1 直角坐标与斜角坐标的关系	(434)
2.2 两点间的距离	(435)
2.3 线段的定比分点	(437)
2.4 三角形的面积	(438)
2.5 斜角坐标轴的平移和旋转	(441)