现代数学手册

随机数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

华中科技大学出版社

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

随机数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·
（华中理工大学出版社）
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·随机数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2000年12月
ISBN 7-5609-2175-2

Ⅰ.现…
Ⅱ.现…
Ⅲ.①数学-手册 ②概率论-手册
Ⅳ.O 1-62

现代数学手册·随机数学卷 《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:叶见欣 姜新祺 封面设计:刘卉
责任校对:张欣 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:29.5 插页:6 字数:1 130 000
版次:2000年12月第1版 印次:2000年12月第1次印刷 印数:1—8 000
ISBN 7-5609-2175-2/O·208 定价:88.00元

《现代数学手册》编纂委员会

前　言

在人类开始跨入21世纪的历史时期，人们已普遍地看到了一种历史现象，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期，伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展，此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国，“科学技术是第一生产力”（邓小平名言）已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是，如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具，当然也就不会有现代科技。因此“国家富强必须要依靠数学发达”这句经典名言（拿破仑（Napoleon）名言），自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识，在华中理工大学出版社的倡议与委托下，我们通过集体协作，努力编纂了这部《现代数学手册》巨著，其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望，而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来，这部工具性巨著服务的读者（或使用者）对象，包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么，作为数学工具书，这部巨型手册要求具备哪些特点呢？在编写过程中，出版社负责人和我们达成了一项共识，即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200余位撰稿人与审稿人（来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等40多所高校与研究所）按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力,使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便,本手册分5卷出版,分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”。需要指出的是,各个分支(篇目)的归属是相对的,这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如,“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生,以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后,还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作,深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编 徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇 目 录

经典数学卷

近代数学卷

计算机数学卷

随机数学卷

经济数学卷

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

MODERN MATHEMATICS

COMPUTER MATHEMATICS

STOCHASTIC MATHEMATICS

ECONOMIC MATHEMATICS

目　录

·随机数学卷·

第 1 篇

概 率 论

编　者　潘一民
审校者　陈希孺

目　录

引　言

作为研究随机现象数量规律的一门数学分支学科,概率论有着悠久的历史.早在16、17世纪,就有一些著名数学家探讨过掷骰子等赌博中出现的各种概率计算问题.瑞士数学家伯努利(J. Bernoulli)在18世纪初提出并证明了概率论的第一个极限定理,即伯努利大数律.随后,法国数学家拉普拉斯(P.S. Laplace)集前人之大成,并在概率论中引入了更有力的分析工具,证明了第二个极限定理,即中心极限定理的雏形;同时,他还从哲学的高度提出了"概率论终将成为人类知识中最主要的组成部分"的重要见解,大大扩展了概率论的应用范围.

概率论自身的发展以及20世纪初完成的一般测度论和积分论,促成了概率论公理体系的建立.经过若干学者前赴后继的努力,前苏联数学家科尔莫戈罗夫(A. N. Kolmogorov)于1933年给出了概率的测度论式的定义和一整套严密的体系,并在此基础上证明了根据给定的相容联合分布族构造一个概率测度的基本存在性定理,严格定义了最一般的条件期望与条件概率.可以说,科尔莫戈罗夫提出的体系是概率论现代化的里程碑.

在20世纪,概率论的理论和方法与数学其他分支、自然科学、工程技术以及社会经济相互交叉、渗透,取得了极其丰富的成果,已经成为一些自然科学学科、社会和经济科学学科的坚实的方法论.

1　事件与概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

在一定条件下,所得的结果不能预先完全确定,而只能确定是多种可能结果中的一种的现象称为随机现象.例如,任意掷一枚硬币,其结果有可能是出现正面,也有可能是出现反面;电话交换台在1分钟内接到的呼叫次数,可能是0次,1次,2次,…;在同一工艺条件下生产出的灯泡,其使用寿命有长有短;测量同一物体的长度时,由于仪器及观察受到环境的影响,多次测量的结果往往有差异;悬浮在液体中的微粒受周围液体分子的碰撞而产生运动(这种运动称为布朗(R. Brown)运动),其轨道极不规则.这些都是随机现象.

使随机现象得以实现和对它的观察的全过程通称为**随机试验**.要完成一个随机试验,主要是要明确实现它的"一定条件",以及由它产生的一切可能的"基本结

果”.这里的“一定条件”可以是人为的,也可以是客观存在的;这里的“基本结果”是指随机试验最简单的、不可(或不必)再细分的结果.

1.1.2 基本空间

定义 1 一个随机试验所有可能的“基本结果”ω 构成的集合称为该随机试验的**基本空间**,常用集合 $\Omega=\{\omega\}$ 表示.基本空间又称为**样本空间**,其元素 ω 又称为**样本点**.

例如,对于任意掷一枚硬币的随机试验,$\Omega=\{$正,反$\}$.又如,对于某批灯泡使用寿命(小时)的试验,$\Omega=\{t:t\geqslant 0\text{h}\}$;若规定 $t\geqslant 200\text{h}$ 为合格灯泡,否则为不合格,且所关心的问题只是合格与否,那么可以取基本空间 $\Omega=\{$不合格,合格$\}$.再如,对于布朗运动,Ω 为从空间某一坐标原点出发的所有连续轨道的全体.

在研究极限规律时,人们往往会考虑重复多次、甚至潜在的无穷多次的试验序列.例如,投掷一枚硬币,人们往往会考虑重复 n 次或想象中的无穷多次的情形,并把它们也视为一种随机试验,这时,基本结果就分别是诸如(正,反,…,反,正)这样的 n 维“向量”或“正,反,正,反,反,正,…”这样的无穷序列.若记空间 $\Omega_0=\{$正,反$\}$,则二者的基本空间可分别记为

$$\Omega=\Omega_0^n \quad \text{或} \quad \Omega=\Omega_0^\infty .$$

总之,依据不同的考察对象与目的,基本空间可以代表现实中种种不同的基本结果的全体.

1.1.3 事件

定义 2 给定了基本空间 Ω,一个随机事件就是 Ω 的一个子集,也就是由某些基本结果组成的集,它表示随机试验的某种结果.随机事件又简称为事件.

原则上,指定了基本结果 ω 要满足的规定条件,就可以描述一个事件.例如,投掷两颗骰子,“其和为4点”这一事件就是子集 $A=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.单个基本结果的集称为**基本事件**.

定义 3 若给定一个事件 A,则“A 不发生”这个事件,称为 A 的**对立事件**,用子集 A 在 Ω 中的补集 $A^c=\Omega-A$ 表示.

定义 4 若给定两个事件 A 和 B,则“A 或 B 至少有一个发生”的事件就是子集 A 与 B 的并,记作 $A\cup B$;“A 和 B 同时发生”的事件就是子集 A 与 B 的交,记作 $A\cap B$,或简记作 AB.

定义 5 整个基本空间 Ω 称为**必然事件**;空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为**不相容或互斥**.

定义 6 当 $A\subset B$ 时,称事件 A 的发生导致事件 B 的发生.

这样,就把事件之间的关系与运算同其集合之间的关系与运算一一对应起来了,其结论还可推广到有限个及无限个事件的场合.

需要特别指出的是,在概率论中为了保证符合规定性质的概率存在,并不总是把基本空间 Ω 的一切子集都当作事件,尤其是当 Ω 为不可数无穷集时.为了研究事件间的各种关系,记全体事件所构成的集类为 $\mathscr{F}$,要求 $\mathscr{F}$ 应满足以下三个条件:

1° $\Omega\in\mathscr{F}$;

2° 若$A\in\mathscr{F}$,则 $A^c\in\mathscr{F}$;

3° 若$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\in\mathscr{F}$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

定义 7 满足以上三条件的$\mathscr{F}$称为**事件 σ 域**,或称 **σ 域**.

从定义 7 还可推出:

$$\varnothing=\Omega^c\in\mathscr{F};\quad \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i^c)^c\in\mathscr{F}.$$

1.2 概 率

1.2.1 古典概型

从直观意义上说,**概率**是随机事件发生的可能性的量度.在概率论发展的初期,主要的研究对象局限于随机试验所有基本结果为有限个等可能的情形,即所谓**古典概型**问题.这时基本空间 Ω 由 N 个基本结果组成,事件 σ 域 $\mathscr{F}$由 Ω 的一切子集组成.若事件 A 包含 n 个基本结果,则定义 A 的概率 $P(A)=n/N$.此时,每个基本事件的概率都是 $1/N$,即所谓等可能.

对于具体的问题,其等可能性通常可由其物理特性、几何对称性或想像的完全随机性事先加以确认;而在计算 N 与 n 时,为了避免重复或漏算的错误,常常要小心谨慎,并运用多种组合数学的技巧.

例 1 设有 k 个不同的(可分辨)球,每个球都能以同样的概率 $1/l$ 落到 l 个格子($l\geqslant k$)的每一个中,且每个格子可以容纳任意多个球,试分别求如下两事件(A 和 B)的概率:

A:某指定的 k 个格子中各有一个球;

B:存在 k 个格子,其中各有一个球.

解 由于每个球可以落入 l 个格子中的任一个,并且每一个格子中可以落入任意多个球,所以 k 个球落入 l 个格子中的分布情况相当于从 l 个格子中选取 k 个的可重复排列,故基本空间共有 l^k 种等可能的基本结果.

事件 A 所含基本结果数应是 k 个球在指定的 k 个格子中的全排列数,即 $k!$,所以

$$P(A)=\frac{k!}{l^k}.$$

为了算出事件 B 所含的基本结果数,可设想分两步进行:因为 k 个格子可以是任意的,故可先从 l 个格子中任意选出 k 个来,选法共有$\binom{l}{k}$种;对于每种选定的 k 个格子,依上述各有一个球的推理,则有 $k!$ 个基本结果,故 B 含有$\binom{l}{k}k!$ 个基本结果.所以

$$P(B)=\binom{l}{k}\frac{k!}{l^k}=\frac{l!}{(l-k)!\ l^k}.$$

假如把球视为粒子，把格子视为相空间中的小区域，那么这个问题就对应于统计物理学中的麦克斯韦－玻尔兹曼(Maxwell－Boltzmann)统计．

概率论的历史上有一个颇为著名的问题：求 k 个同班同学中没有两人生日相同的概率．若把这 k 个同学看作例1中的 k 个球，而把一年的365天看作为格子，即 $l=365$，则上述的 $P(B)$ 就可给出所要求的概率．例如，当 $k=40$ 时，$P(B)=0.109$．或者换句话说，40个同学中至少有两人的生日是同一天的概率为 $P(B^c)=1-P(B)=0.891$．后面这个概率出乎意料的大．

把古典概型稍作推广．仍设基本空间 Ω 仅含 N 个基本结果 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$，但它们的概率可以是使得 $P\{\omega_i\}\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{N}P\{\omega_i\}=1$ 的任意数；事件 σ 域 $\mathscr{F}$ 仍由 Ω 的一切子集组成．这时任一事件 A 的概率是所有属于 A 的基本结果的概率之和：

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P\{\omega_i\}.$$

$P(A)$ 显然具有以下三条性质：

1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2° $P(\Omega)=1$；

3° 若事件 A,B 不相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

1.2.2　几何概率

把等可能性推广到含无穷多个基本结果的情形，就产生了**几何概率**．设 Ω 是平面上一个可求面积的区域，事件 σ 域 $\mathscr{F}$ 由 Ω 中一切可求面积的子集组成．随意扔一个点到 Ω 中，按照等可能性的思想，可认为该点落入 Ω 内任何一指定部分的概率与这一部分面积成正比，而与这一部分的形状及其在 Ω 内的位置无关．因此，若 $A\in\mathscr{F}$，用 $\mu(A)$ 表示 A 的面积，则该点落入 A 的概率

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

类似的思想也可推广到一维、三维或更高维数的情形中去．

例2　布丰(G.L.Buffon)投针问题．设平面上画有等距离为 a 的一簇平行线．取一枚长为 $l(l<a)$ 的针随意扔到平面上，求针与平行线相交的概率．

解　设 x 表示针的中点到最近一条平行线的距离，θ 表示针与此直线间的交角(图1-1(a))，则 (x,θ) 完全决定针所落的位置．针的所有可能的位置为

$$\Omega=\left\{(x,\theta):0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}.$$

它可用 x-θ 平面上的一个矩形来表示(图1-1(b))．针与平行线相交的充分必要条件是 $x\leqslant\frac{l}{2}\sin\theta$，即图1-1(b)中带阴影的部分，它的面积为