

谢志成

# 材料力学

清华大学出版社



TR301

91

# 材 料 力 学

谢 志 成

清华大学出版社

F(st) 40

## 内 容 简 介

本书以新的体系处理经典材料力学基本内容,结构严谨,内容丰富、完整,且包括了一些新的内容,概念叙述仔细清楚,习题丰富,是一本有特色的教材。

本教材适用于土木、水利、机械、力学等多学时专业。

(京)新登字 158 号

## 材 料 力 学

谢志成

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

通县宏飞印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/16 印张: 18.25 字数: 433 千字

1993 年 3 月第 1 版 1993 年 3 月第 1 次印刷

印数: 0001—6000

ISBN 7-302-01106-0/O · 130

定价: 4.75 元

14

# 目 录

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 引 言                   | 1  |
| 第一章 基本概念              | 2  |
| § 1.1 材料力学关于变形固体的基本假设 | 2  |
| § 1.2 受力物体的内力、应力      | 2  |
| § 1.3 应变              | 4  |
| § 1.4 位移与应变的几何关系      | 5  |
| 习题                    | 7  |
| 第二章 材料的力学性质           | 8  |
| § 2.1 材料的静力试验         | 8  |
| § 2.2 拉伸、压缩实验现象       | 11 |
| § 2.3 材料的强度指标及塑性指标    | 14 |
| § 2.4 虎克定律            | 17 |
| 习题                    | 19 |
| 第三章 杆件内力              | 21 |
| § 3.1 杆件的内力分量         | 21 |
| § 3.2 内力方程式           | 23 |
| § 3.3 内力图             | 28 |
| § 3.4 内力分析的工程方法       | 34 |
| 习题                    | 39 |
| 第四章 杆件强度分析            | 47 |
| § 4.1 杆件拉伸(压缩)和弯曲的正应力 | 47 |
| § 4.2 横向弯曲的剪应力        | 56 |
| § 4.3 薄壁杆件的弯曲应力       | 60 |
| § 4.4 扭转剪应力           | 62 |
| § 4.5 杆件的强度计算         | 65 |
| § 4.6 剪切、挤压假定计算       | 78 |
| § 4.7 提高杆件承载能力的方法     | 80 |
| § 4.8 杆件强度的其它问题       | 83 |
| 习题                    | 90 |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| <b>第五章 杆件截面几何性质</b> .....    | 97  |
| § 5.1 坐标变换 .....             | 97  |
| § 5.2 形心主惯性矩 .....           | 100 |
| § 5.3 计算截面惯性矩、惯性积的近似方法 ..... | 107 |
| § 5.4 杆件的合理截面 .....          | 107 |
| 习题 .....                     | 108 |
| <b>第六章 应力状态和应变状态</b> .....   | 111 |
| § 6.1 二向应力状态 .....           | 111 |
| § 6.2 应力圆 .....              | 113 |
| § 6.3 主应力轨迹线 .....           | 116 |
| § 6.4 三向应力状态 .....           | 117 |
| § 6.5 三向应力状态下主应力的确定 .....    | 119 |
| § 6.6 应变分析 .....             | 120 |
| § 6.7 变形能 .....              | 123 |
| 习题 .....                     | 125 |
| <b>第七章 强度理论</b> .....        | 129 |
| § 7.1 静力强度试验 .....           | 129 |
| § 7.2 脆断的强度理论 .....          | 130 |
| § 7.3 塑性屈服的强度理论 .....        | 130 |
| § 7.4 莫尔强度理论 .....           | 133 |
| 习题 .....                     | 134 |
| <b>第八章 杆件的刚度分析</b> .....     | 136 |
| § 8.1 直杆的轴向位移和扭角 .....       | 136 |
| § 8.2 直杆的横向位移和转角 .....       | 141 |
| § 8.3 弹性地基上的梁 .....          | 152 |
| § 8.4 杆件的刚度计算 .....          | 154 |
| 习题 .....                     | 154 |
| <b>第九章 功能原理</b> .....        | 160 |
| § 9.1 刚体的虚功原理 .....          | 160 |
| § 9.2 变形体的虚功原理 .....         | 160 |
| § 9.3 莫尔定理 .....             | 162 |
| § 9.4 图形互乘法 .....            | 167 |
| § 9.5 位移的近似计算 .....          | 169 |



|                              |     |
|------------------------------|-----|
| § 9.6 虚位移原理 .....            | 170 |
| § 9.7 最小位能原理 .....           | 174 |
| § 9.8 卡氏定理 .....             | 177 |
| 习题 .....                     | 179 |
| <b>第十章 静不定问题</b> .....       | 185 |
| § 10.1 力法 .....              | 185 |
| § 10.2 位移法 .....             | 197 |
| § 10.3 静不定问题的特性 .....        | 207 |
| 习题 .....                     | 210 |
| <b>第十一章 压杆稳定</b> .....       | 216 |
| § 11.1 稳定概念 .....            | 216 |
| § 11.2 临界载荷 .....            | 217 |
| § 11.3 确定临界载荷的能量法 .....      | 219 |
| § 11.4 临界应力总图 .....          | 221 |
| § 11.5 压杆稳定校核 .....          | 222 |
| § 11.6 偏心受压杆及具有初曲率的受压杆 ..... | 225 |
| § 11.7 纵横弯曲 .....            | 227 |
| 习题 .....                     | 231 |
| <b>第十二章 薄壁杆件</b> .....       | 234 |
| § 12.1 弯曲应力与弯曲中心 .....       | 234 |
| § 12.2 约束扭转 .....            | 238 |
| 习题 .....                     | 251 |
| <b>第十三章 构件强度的进一步问题</b> ..... | 253 |
| § 13.1 构件的动应力及变形 .....       | 253 |
| § 13.2 高温对材料性能的影响 .....      | 258 |
| § 13.3 变形速度对材料性质的影响 .....    | 260 |
| § 13.4 疲劳强度 .....            | 261 |
| § 13.5 含裂纹构件的断裂 .....        | 272 |
| 习题 .....                     | 273 |
| <b>附录 型钢表</b> .....          | 277 |

# 引 言

## 一、材料力学的任务

材料力学是一门基础技术学科,它为解决机械、土木、水利、交通、航空、电力等工程问题提供一些基本知识和分析方法,而且也为进一步学习力学专业理论以及相关的后续课程打下必要的基础。

对各类工程结构构件,如房屋建筑的梁或柱,机械中的轴等,人们总希望它在使用期限内能安全工作,不要损坏。构件的安全或破坏问题称为强度问题,材料力学的任务之一就是解决构件的强度问题。工程设计中,对于某些构件不允许它们在受力后发生过大的变形,例如机床中的主轴若在加工工件时(受载时)变形过大,将影响加工精度。研究构件的变形问题,以保证构件正常工作,称为刚度问题,这也是材料力学研究的一个任务。此外,工程中有些构件在某种载荷作用下可能处在一种不稳定的平衡状态,使构件从原来的平衡形式突然变到另一种平衡形式。例如细长的受压力的桁架杆,当压力增加到一定程度时,压杆的直线平衡状态已不稳定,它很容易从直线的平衡状态突然变弯,在工程结构中是不允许这种情况发生的。构件平衡形式的稳定与不稳定特性称为稳定问题,材料力学另一任务就是研究构件的稳定问题。

## 二、材料力学的研究对象

各类工程结构构件具有各种不同的形状,但其中有大量的构件、如梁、柱、轴、螺钉等,它们的长度比其它两个方向的尺寸大得多(例如5倍以上)。这些构件都可视为同一类型,称为杆件。杆件是材料力学的主要研究对象。

除了杆件外,工程中有些构件还可以简化为薄板、薄壳的形式或实体的形式,这些结构不是材料力学讨论的主要内容。

## 三、材料力学的分析方法

在材料力学中,分析构件的强度、刚度、稳定问题的方法有两类:一类是理论计算,另一类是实验。这两种手段都很重要,而且是相辅相成的。实验为理论分析提供必要的材料参数和假设依据;理论、概念又在实验中起着关键的指导作用。由于生产技术的发展,特别是计算工具的日益完善,过去一些理论上的难题目前已可分析计算,而实验手段的更新改造,又可以进一步解决理论上未能解决的工程问题,为理论发展打下必要的基础。

应该指出,对构件的强度、刚度、稳定问题,材料力学只能提供解决这些问题的一些基本知识和方法。要想真正解决问题,还需要了解各类工程专业知识和在实践中积累实际经验。

# 第一章

## 基 本 概 念

### § 1.1 材料力学关于变形固体的基本假设

任何基础学科都建立在一定的假设基础上,而这些假设又是有实践依据的,是符合实际的。在理论力学中,都假设物体为刚体,认为物体的变形对研究物体的平衡及运动状态影响很小,是可以略去的次要因素。材料力学虽然仍需应用这些建立在刚体假设基础上的平衡规律和运动规律,但当进一步讨论构件的强度、刚度和稳定问题时构件的变形,即使是极微小的变形,亦会变得特别重要,此时不能把物体看作刚体。由此可见,根据所研究的问题不同,会有不相同的假设。

在讨论材料力学的问题时,必然涉及构件材料的特性。由于宏观构件的尺寸比物体微观结构的尺寸大得多,因此,物质微观结构的不连续、不均匀和各向异性(即各方向具有不同的材料性质)等特性对研究宏观构件的安全、破坏、变形等问题的影响是次要的。在大多数情形下,物质材料宏观的性质,实际上是微观性质的统计平均值。因此,可以假设:物体是均匀、连续和各向同性的,即物体是密实的,无空隙的,物体各部分(宏观)有相同的物理特性,而且在物体上同一点不同的方向亦有相同的物理性质(例如弹性、抵抗破坏的能力、热膨胀或导热性能等)。

实践证明,对于大多数常用的结构材料,如钢铁、有色金属、混凝土等,上述的假设是合理的、是符合实际的。但是,随着生产、科研的飞速发展,例如近代航空、航天事业的发展,新的高强度材料的不断出现,已部分地改变了人们对强度概念的看法,而且人们已能按照工程实际的需要,制造出宏观非均匀的各向异性材料。因此,不能将上述假设看成固定不变的,它们只是在一定条件下符合实际的一些假定。

### § 1.2 受力物体的内力、应力

解决强度、刚度、稳定问题,除了需要应用刚体力学的规律求出构件的外力以外,还应该进一步研究构件内部的受力情况。

图 1.1a 物体在外力作用下处于平衡状态。研究该物体的内力时,可以假想用—个平面将物体截开(图 1.1b),使物体分为两部分。根据每一部分物体的平衡要求,截面上必然存在内力。由于这些内力的作用,物体会变形,甚至破坏。按物体的连续性假设,该截面上的内力可以认为是连续分布的。

用一个假想的截面将物体分开的方法,是材料力学中分析内力的一种基本方法,称为截面法。

表示内力大小及方向的方法有两种:一是用截面上分布内力的合力表示,或者是在截



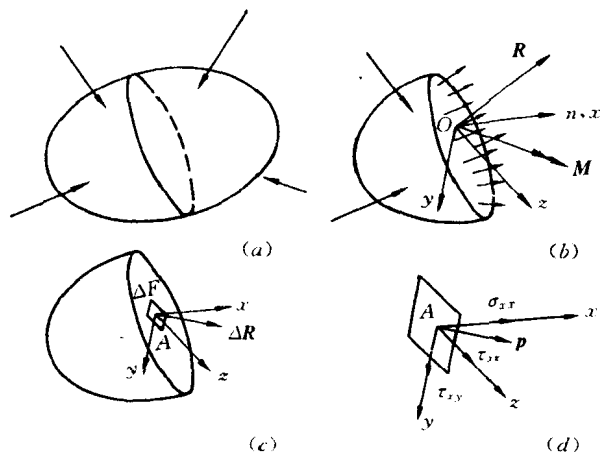


图 1.1

面上某指定点  $O$  处,用内力简化所得的主向量  $\mathbf{R}$  及主矩  $\mathbf{M}$  表示(图 1.1b),或者用这主向量及主矩在选定坐标系的分量表示(通常其中一个坐标轴选为该面的法线方向),这种表示方法有利于分析内力和外力的定量关系;另一种是在截面上某一点  $A$  取一极微小的面积  $\Delta F$ (图 1.1c),把作用在该微面上的总内力  $\Delta R$  除以  $\Delta F$ ,并取极限,即

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta F} = \frac{d\mathbf{R}}{dF} \quad (1.1)$$

以此来表示截面上  $A$  点内力集中的程度,作为度量材料安全、破坏的依据。 $\mathbf{p}$  称为应力,它的量纲为[力]/[长度]<sup>2</sup>,单位为 Pa 或 kPa (Pa=1N/m<sup>2</sup>)等。若在  $A$  点规定一坐标系,以某一坐标轴(如  $x$  轴)为截面的外法线方向(图 1.1c),则应力  $\mathbf{p}$  在三个坐标上的分量表示为:  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ 。 $\sigma_{xx}$  表示垂直于截面  $A$  点的应力,称为正应力或法向应力; $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  表示作用在截面内,方向分别为  $y$  和  $z$  向的应力,称剪应力。表示这些应力分量有两个下标:第一个表示应力作用面的外法线方向;第二个表示应力的方向(图 1.1d),如  $\tau_{xy}$ ,它表示作用面外法线方向与  $x$  轴一致,方向与  $y$  轴一致的剪应力。由以上分析可知,应力这一物理量是与其作用面紧密相关联的;根据极限概念,应力又是指在某一面上的内力的集度。

度量物体  $A$  点材料的安全程度时,仅仅求得某一截面上  $A$  点的应力是不够的,因为通过  $A$  点的其它截面上的应力(正应力、剪应力)也会对该点材料的安全、破坏产生影响。因此,为了分析物体某一点  $A$  的强度,需要沿三个相互垂直的方向应用截面法,围绕  $A$  点从物体中截出一个微小的六面体(图 1.2a),分析作用在这六面

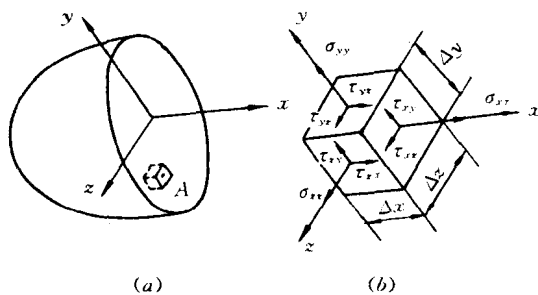


图 1.2

体上各个面的应力(图 1.2b)。将这些应力用一矩阵表示,即

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

称为 A 点的应力状态。微小六面体称为物体的微单元,相对整个物体来说它是很小的,可以认为是物体上的一个点(A 点),但微单元仍是一个宏观的微量,它比物体材料的微观结构(如晶粒等)要大得多。

微单元体的每对面之间都有一微小距离( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ),故各对平行面上相应的应力其大小会有微小差异,但方向相反。这种应力大小的差异对研究微六面体的安全、破坏或变形时影响极小,因而可以略去<sup>①</sup>。另外,对在相互垂直微面上的剪应力,根据微单元的力矩平衡条件,例如

$$\sum m_x = 0 \quad \tau_{xy} \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta x = \tau_{yx} \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta y$$

得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

同理,有

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1.3)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

每一对剪应力的方向都指向(或背向)六面体的某一棱边。(1.3)式称为剪应力成对定理,它说明 $[\sigma]$ 是一个对称矩阵,它只有六个独立的元素。在后面的分析中也常用一个列阵 $\{\sigma\}$ 来表示这些应力,即

$$\{\sigma\} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \quad (1.4)$$

### § 1.3 应 变

当物体的微单元上作用有应力时(图 1.2b)它将发生相应变形。对应于正应力,单元体各边伸长或缩短,称为线变形;对应于剪应力,单元体各相对面相互错动而引起单元直角的改变,称为角变形(图 1.3)<sup>②</sup>。在力学的分析中,人们用正应变及剪应变来表示微单元的变形程度,正应变的定义为

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \\ \epsilon_{yy} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{dv}{dy} \\ \epsilon_{zz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

剪应变就是上述的角变形 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 。(1.5)式中的 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ 分别表示微单元各边的变形量。显然正应变和剪应变都是无量纲量。与应力矩阵相似,应变亦可以写成矩阵或列阵

① 在讨论物体内的应力变化规律时,这些差异十分重要,不能略去。

② 图 1.3 中单元的角变形分三个图形表示。图中只表示了单元的变形,事实上,当物体发生变形时,单元还有刚体的移动和转动。

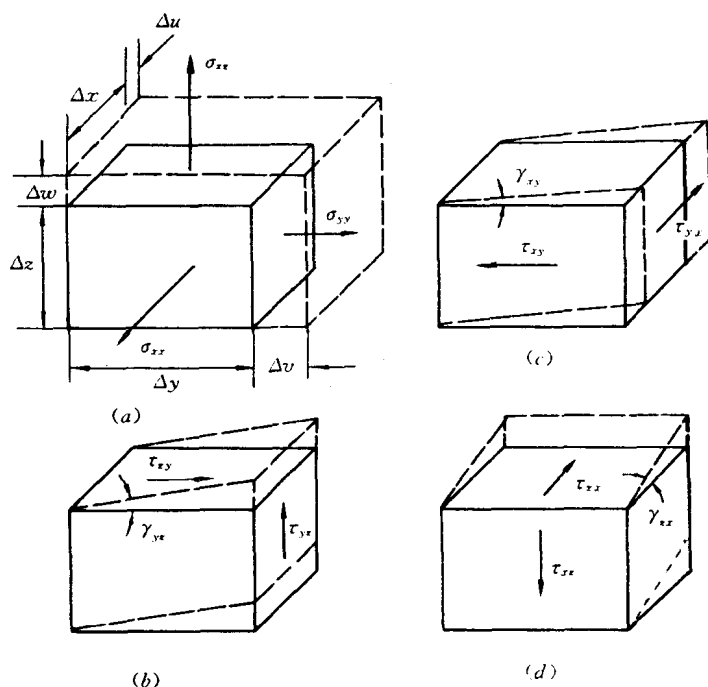


图 1.3

的形式

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

或

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$$

称为一点应变状态。对应每一种材料,应变状态和应力状态之间存在着一定的关系,称为物理关系。有关这方面的内容,将在下一章中讨论。

## § 1.4 位移与应变的几何关系

工程上为了保证构件的刚度常常要限制构件各点的位移值。显然,这些位移与单元变形(应变)之间存在一定的几何关系。为了分析方便,下面用一个平面变形的单元来讨论这一关系。

设在  $xy$  平面上有微单元  $ABCD$ , 物体受力变形后, 各角点发生位移, 用  $u, v$  表示, 单元变为  $A'B'C'D'$  (图 1.4)。按物体材料的均匀连续假设, 位移  $(u, v)$  都应是坐标  $x, y$

的连续函数,因此,若  $A$  点的位移为  $u, v$ , 则  $B$  及  $D$  点的位移分别为<sup>①</sup>

$$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v_B = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$u_D = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad v_D = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

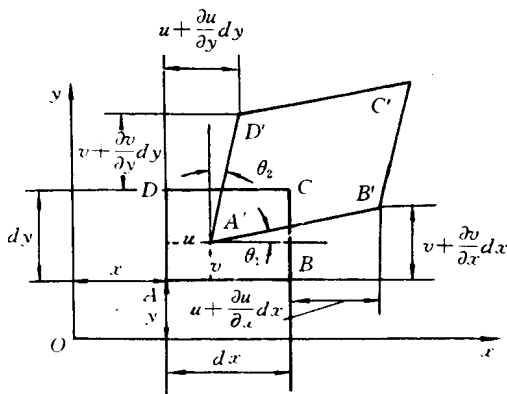


图 1.4

若单元的变形很小,  $AB$  线的伸长近似为  $u_B - u$ <sup>②</sup>, 即  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ , 于是  $AB$  边的相对伸长, 即应变为  $\frac{\partial u}{\partial x} dx/dx$ . 同理可得  $AD$  边的应变. 于是,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

剪应变按其定义实际上是单元直角的改变量, 即

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2$$

其中  $\theta_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dx/dx$ ,  $\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} dy/dy$ , 故得

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

上述分析可以推广到三维微单元, 即应变与位移的关系为:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

若将位移  $u, v, w$  写成列阵

$$\{u\} = [u, v, w]^T \quad (1.8)$$

则(1.7)式可写成

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} \quad (1.9)$$

其中  $[L]$  表示一个微分算子, 即

① 单元各角点的位移都不相同, 其结果会使单元发生刚体移动和转动, 同时又会使单元发生线变形及角变形。列下式时请注意,  $B$  点相对  $A$  点的位置没有  $y$  方向的增量,  $D$  点相对  $A$  点没有  $x$  方向的增量。

② 实际上,  $A'B'$  的长度应为

$$\begin{aligned} l' &= \left[ \left( dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u \right)^2 + \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx \\ &= dx \left[ 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

当  $(\partial u/\partial x)^2$  与  $(\partial v/\partial x)^2$  相对 1 很小时, 即小变形时, 可以略去上式中的后两项。再将上式近似展开得

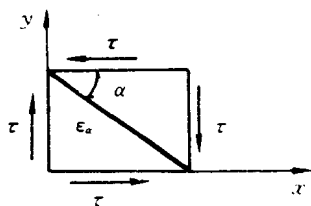
$$l' = (1 + \partial u/\partial x) dx.$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

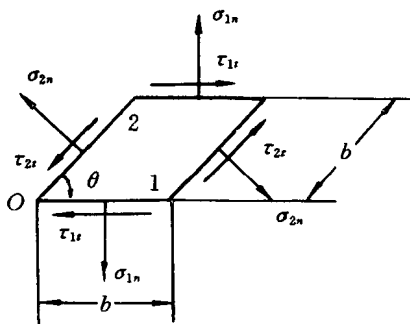
(1.7)或(1.9)式表示单元应变与位移之间的几何关系。应该指出,这个关系是在小变形条件下得到的。由于工程中结构变形一般都在小变形范围内,故上述几何关系一般均适用。

## 习 题

- 1.1 材料力学的任务是什么?
- 1.2 变形固体的基本假设是什么?
- 1.3 材料力学中分析内力的基本方法是什么?
- 1.4 两种表示内力大小及方向的方法是什么?
- 1.5 为什么要研究物体内一点的应力状态? 如何表示一点的应力状态?
- 1.6 什么是剪应力成对定理?
- 1.7 微单元在正应力和剪应力作用下产生哪些基本变形?
- 1.8 什么是正应变? 什么是剪应变?
- 1.9 位移、变形和应变的概念有何区别? 位移和应变的几何关系是什么?
- 1.10 为什么说(1.7),(1.9)式的关系只适用小变形?
- 1.11 单纯剪应力状态,若用实验方法测出  $\alpha$  方向的线应变  $\epsilon_\alpha$ ,试求出单元体的剪应变  $\gamma_{xy}$ 。



题 1.11



题 1.12

1.12 图中过  $O$  点的 1,2 两截面上的正应力及剪应力如图所示,两截面间夹角  $\theta < \pi/2$ ,试问剪应力成对定理是否成立?

## 第二章

# 材 料 的 力 学 性 质

工程对材料性能的要求是多方面的,在材料力学中只讨论与强度、变形有关的力学性能。在静力作用下(载荷增减速度很慢),这些力学性能主要可通过材料的应力应变关系表示,即随着应力(或应变)的改变,应变(或应力)相应的变化关系,这个关系称为物理关系。

材料性能不是一成不变的,随着外界条件的变化,它将表现出不同的性质。例如在高温或低温环境下,在变动力或冲击力作用下,材料会有不同的力学性能。本章只限于讨论材料在常温、静力下的性质,其余将在后面的章节中介绍。

### § 2.1 材料的静力试验

这里介绍的试验大致分两类:一类是研究性的,常用以探索材料性质的基本规律;另一类是工程上大量应用的,从这类试验不仅可得到材料基本规律,更重要的是为了确定材料的标准参数,以制定工程设计手册,提供设计标准。下面介绍 4 种静力实验。

#### 一、拉伸试验

这是工程上大量应用的一种最重要的实验,它的实验结果在相当程度上代表了材料的静力性能。

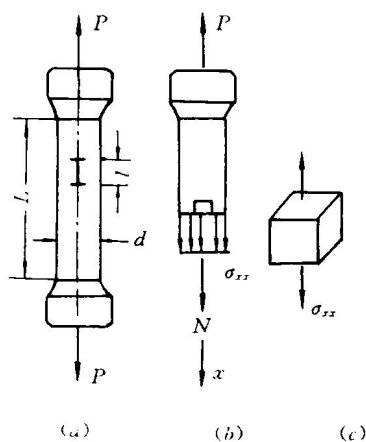


图 2.1

将材料加工成具有标准形状和尺寸的试件<sup>①</sup>。试验机给试件一个中心拉力(即外力通过试件截面中心),图 2.1a,并准确测量出拉力  $P$  的数值。在增加拉力的同时,用仪表测量试件中间某一段长度  $l$  的变形  $\Delta l$ ,得出受力  $P$  与伸长  $\Delta l$  的关系。试验进行至试件被拉断为止。得到  $P$ - $\Delta l$  关系后,如能求得应力与  $P$  的关系、应变与  $\Delta l$  的关系,就能得到材料的应力与应变之间的关系。

用截面法将受力试件的横截面截开(图 2.1b),根据部分试件的平衡条件,截面上正应力  $\sigma_{xx}$  所组成的内力  $N$  必作用在截面的中心上,而且有

$$N = P$$

可以设想,正应力  $\sigma_{xx}$  在截面上均匀分布,按(1.1)式定义

<sup>①</sup> 试件的横截面有圆形、长方形等,它的尺寸有标准规定。



$$\sigma_{xx} = \frac{dN}{dF} = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} \quad (2.1)$$

其中  $F$  为试件横截面面积。若在试件中取一微单元(图 2.1b), 由于试件上没有横向力和侧向力, 试件的横向尺寸又很小, 可以认为微单元上只有  $\sigma_{xx}$  而没有其它应力作用(图 2.1c)。这是一种最简单的微单元受力情况, 称为单向拉伸应力状态。

由于试件在长度  $l$  内是等截面的, 故该段内线段的伸长也是均匀的。当微单元取自该段时, 显然有

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{du_l}{dl} = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.2)$$

其中  $u$  为试件中各点轴线方向的位移,  $\Delta l$  为  $l$  的伸长量。据式(2.1)及(2.2)不难看出, 由试验测出  $P$ - $\Delta l$  关系后, 即能得出材料在单向拉伸应力状态下的应力应变关系。

## 二、压缩试验

压缩试验过程与拉伸试验相似, 只是试件不能太长。例如圆形试件(图 2.2), 规定  $L = (1-1.3)d$ , 以免在加力过程中试件发生失稳问题。压缩试验的目的, 是为了找出单向压缩应力状态下(图 2.2b)应力与应变的关系。

## 三、薄圆管扭转试验

这是一个研究剪应力和剪应变关系的试验。在一薄壁圆管两端加一对扭力偶  $m_x$ (图 2.3a), 测量出加力过程中力偶大小及相应的圆管纵线倾斜角度  $\gamma_{xy}$  或  $A, B$  面的相对转角  $\varphi$ (图 2.3b), 得出  $m_x$ - $\gamma_{xy}$  或  $m_x$ - $\varphi$  的关系。

为了求得剪应力, 用截面法将圆管截开(图 2.3c), 根据变形和平衡条件可知, 截面上不会有正应力而只有剪应力, 它在截面上组成的内力偶  $M_x$  为

$$M_x = m_x$$

由于管壁很薄, 可以认为剪应力沿厚度方向均匀分布; 另外再根据轴对称的要求, 剪应力沿环向(即圆周方向)也应是均匀的, 于是有

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{dT}{dF} = \frac{dT}{tds} \\ dT &= \tau_{xy} t ds \\ M_x &= \int_0^{\pi D} \frac{D}{2} \tau_{xy} t ds = \frac{\pi D^2}{2} \tau_{xy} t = m_x \\ \tau_{xy} &= \frac{m_x}{t \pi D^2 / 2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中  $ds$  表示微段弧长,  $t$  为管壁厚,  $D$  为圆管平均直径。若按图 2.3a 截取微单元<sup>①</sup>。由于

① 即按柱坐标取微单元。实际上该微单元有曲率, 但可近似为一平面单元。

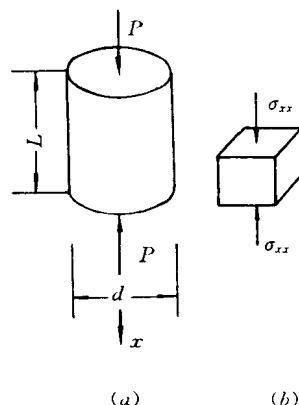


图 2.2

管的内、外壁均无外力,且管壁很薄,故除 $\tau_{xy}$ 外微单元没有其它应力作用(图 2.3c)。这种微单元受力情况称为纯剪应力状态。

圆管纵线的斜角 $\gamma_{xy}$ 就是单元的剪应变,按(图 2.3b)的几何关系,它与截面相对转角之间有如下关系

$$\gamma_{xy}L = \frac{D}{2}\varphi$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\varphi D}{2L} \quad (2.4)$$

可见,在试验时测出 $\varphi$ 即求得剪应变 $\gamma_{xy}$ ①。

#### 四、复合试验

这是一种研究材料在复杂应力状态下应力应变关系的试验。

在薄壁圆管两端加扭力偶和中心拉力或压力,又在管内加均匀内压(图 2.4a, b),可使微单元处于复杂的受力状态。

当薄管受内压 $p$ 而两端又封住时(图 2.4b),其直径和长度都发生变形,管壁的微单元受力如图 2.4c 所示(单元厚度取管壁厚)。这样的单元是有曲率的,根据单元在径向的平衡条件(图 2.4d),得

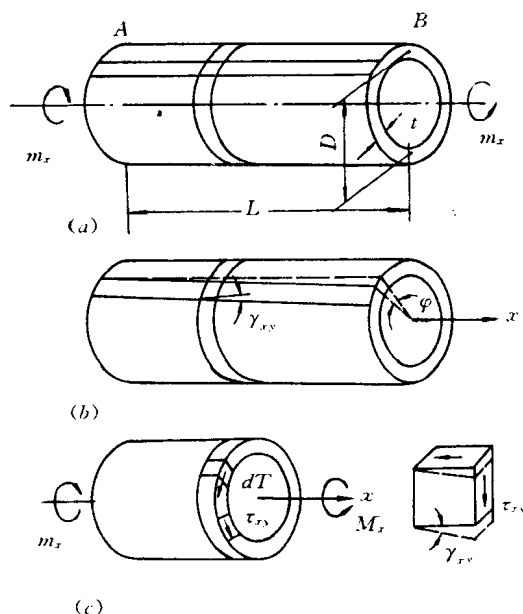


图 2.3

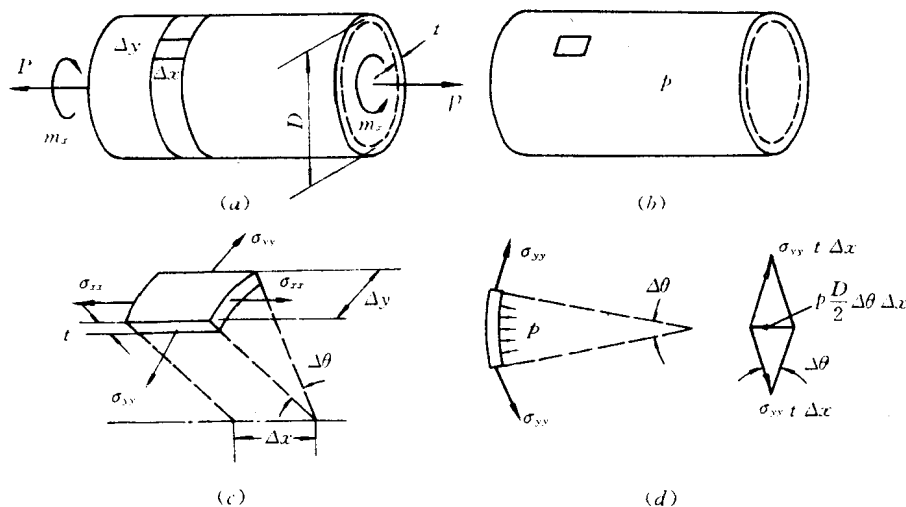


图 2.4

① 用现代的量测手段可直接测得剪应变。

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}t\Delta x\Delta\theta &= p\Delta\theta\frac{D}{2}\Delta x \\ \sigma_{yy} &= p\frac{D}{2t}\end{aligned}\quad (2.5)$$

圆管两端有封头,内压  $p$  的作用相当于管子两端有轴向拉力,故管壁上的纵向应力为

$$\sigma_{xx} = \frac{p\frac{\pi D^2}{4}}{\pi Dt} = p\frac{D}{4t}\quad (2.6)$$

由公式(2.5), (2.6)看出,当管壁很薄时,  $D/t$  是个大量,应力  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  比内压强  $p$  大得多,单元的受力可近似为一平面应力状态<sup>①</sup>,即在三维空间中一个方向的应力分量为零。

除内压外,若在薄圆管两端加轴向力  $P$  及扭力偶  $m_x$ ,单元受力将如图 2.5 示,应力值为

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \frac{P}{\pi Dt} + p\frac{D}{4t} \\ \sigma'_{yy} &= \sigma_{yy} = p\frac{D}{2t} \\ \tau_{xy} &= \frac{m_x}{\frac{\pi t D^2}{2}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

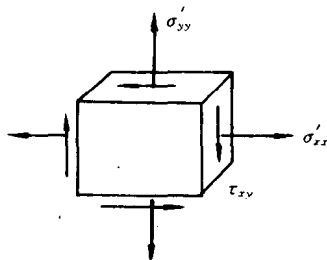


图 2.5

这是一个相当复杂的应力状态,若调整  $P, p, m_x$  的比例,可得各种不同的应力组合,即不同的应力状态。

在复杂应力状态下测量单元应变的方法将在材料力学实验课中介绍。

## § 2.2 拉伸、压缩实验现象

拉伸、压缩试验是工程中最重要材料实验。拉伸试验表明:许多金属材料在单向拉伸应力状态下的应力应变关系大致分两阶段,直线阶段及曲线阶段(图 2.6)。

在直线阶段,应力与应变成正比;当外力逐渐卸去时,应力应变沿原直线变化(例如图 2.7 的  $Om$  线)回到原点,这就是说,直线段上任一点  $m$  对应的应变是弹性的,卸载后该应变消失。在曲线段,例如图 2.7 中  $n$  点,应力与应变是非线性的。实验又表明:当曲线上超过  $e$  点所对应的应力卸去时,应力应变沿平行于直线阶段的路径变化(如  $nO'$  线);应力为零时,试件还保留一定数量的应变,称为“残余应变”或“塑性应变”。曲线阶段上任一点  $n$  所对应的应变包括两部分:一部分是卸载后消失的弹性应变,另一部分是塑性应变,即

$$\epsilon_n = \epsilon'_n + \epsilon''_n\quad (2.8)$$

图 2.6 中  $\sigma, \epsilon$  即图 2.1 中的  $\sigma_{xx}, \epsilon_{xx}$ 。在加力过程中, (2.1) 式中  $F$  及 (2.2) 式中  $l$  会不断地改变,但工程上构件在工作时变形很小,故常用变形前的截面积  $F_0$  及长度  $l_0$ , 代替  $F$

<sup>①</sup> 若将图 2.4c 微单元沿厚度方向再分成若干个单元,它们的受力情况是不同的;靠外壁的单元为平面受力;靠内壁的单元为三向受力,其前后面上有压力  $p$ ,但此压力相对  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  很小,仍可近似看作平面应力状态。