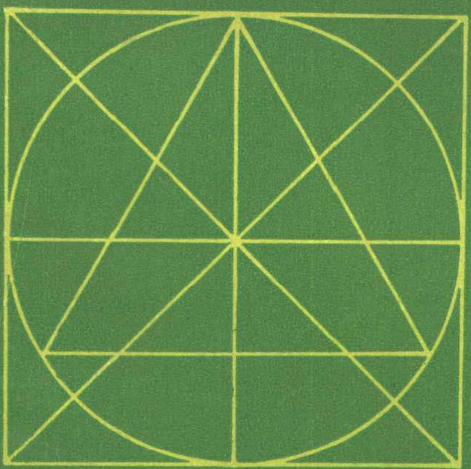
HE
ZHONGXUE
SHENG
TAN
XUEWEIJIFEN

和中学生谈学微积分

徐墨林



原子能出版社

和中学生谈学微积分

徐墨林　编

原 子 能 出 版 社

和中学生谈学微积分
徐墨林　编
原子能出版社出版
（北京2108信箱）
重庆印制一厂印刷
（重庆枇杷山后街87号）
新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售
☆
开本 787×1092 $^{1}/_{32}$ · 印张 $6^{3}/_{8}$ · 字数138千字
1983年3月第一版 · 1983年3月第一次印刷
印数00,001—43,800 · 统一书号：7175 · 447
定价：0.55元

内 容 简 介

本书是配合现行高中数学第四册的内容所写的课外辅导材料，包括极限的概念、导数的求法、导数的应用、微分的求法及其应用、不定积分、定积分举例及在生产实践上的应用。

本书由浅入深循序渐进，每章后面配合一定数量的习题并附有答案和解法要点，不但适合初学者阅读和自学，对于初次讲授微积分课程的教师也是一本很好的参考书。

见 面 话

同学们，从一九八二年起全国普通中学将开始讲授微积分学。我国中学开设微积分课，这在历史上还是第一次。在开始学习微积分之前，我想和你们简要地谈几句话。

我们国家要实现具有高度物质文明和高度精神文明的社会主义现代化。现代化需要大批的物理学家、化学家、计算机专家、航天专家、生物学家、农业专家、建筑专家、机械专家、地质专家、海洋专家……。大批科学人材，将从你们中间涌现出来。

现代科学尽管包括的学科领域十分广泛，但所有不同学科都需要一个共同的工具，那就是数学。数学能反映物质世界的量以及量与量之间的关系。人们常说，数学是科学的皇后。这不是没有道理的。

举一个例子。一九八〇年五月十八日，我国向太平洋发射了一枚火箭。这项工作涉及的部门是数不胜数的。火箭的箭体由金属制成，你想，从冶炼到加工成型，要经过多少计算？它需要高大的发射架，须预先计算好各种应力；火箭运行的轨道、运行中姿态的校正，也必须由计算机计算并加以控制……，所有这些计算都离不开微积分。因为，微积分是整个高等数学的基础。

到目前为止，同学们只学过初等数学。初等数学研究的量都是常量，研究的数都是常数，也叫不变的量和数。

而物质世界是运动的，反映这种运动的量大都是变量，或者说是变数。这是初等数学无能为力的，必须借助微积分。所以说，微积分学就是以研究变量为主要对象的数学。

学习微积分常常会遇到一个难点，即寻找问题的函数关系的困难。对一道题，不知道或找不到变量之间的关系，甚至有的人不认为是数学题，而认为是物理题。其原因不在于他数学不好，而在于他对其他学科的函数关系不了解。这就要求我们对其他学科——物理、化学、生物学、……等学科的基本知识都要学好、要掌握牢。

最后，我想有必要向你们简要介绍一下微积分的两位伟大创始人。一个是英国的伟大物理学家、伟大数学家牛顿，另一个是德国的伟大数学家莱布尼兹。

牛顿，生于一六四二年，死于一七二七年。他发现了物质运动三大定律。那么他是怎么成为数学家的呢？他研究物质运动。你们知道，这当然要研究力、速度、加速度、功、转动惯量等等。怎样描述这些物理量呢？牛顿正是使用了微积分这个工具之后，才给予了速度、加速度……以严格的定义和准确的描述。

莱布尼兹，生于一六四六年，死于一七一六年，他和牛顿是同时代的人。莱布尼兹年青的时候，刻苦地钻研，终于攀上了数学的高峰。他在三十岁之前，已经完成了微积分学的创立工作。这不论是在过去还是在将来，都是辉煌的成就。

还有一点也要向同学们交代一下，那就是，牛顿和莱布尼兹两人，是各自独立地完成微积分学的创立工作的。牛顿是从对物理学的研究建立微积分学的，莱布尼兹则是从对曲面研究而建立起微积分学的。这一点说明了什么呢？

它说明了微积分学的客观真理性，无论谁发现它，都是一样。莱布尼兹在物理、化学、生物学等方面也有很深的造诣，这一点他与牛顿又是相同的。莱布尼兹还把微积分运算的各种符号及意义明确规定下来，至今仍被使用着。

[illegible]介

目录

一　曲变直的必经之路——极限

同学们，从现在开始，我们将进入微积分学具体内容的学习。对微积分学的认识，既要认识全貌，又要认识细节。这正如看一所房子一样，先看外部轮廓，然后再进入室内看各房间的装饰。

那么现在我们先来看一看微积分学的全貌吧。看全貌要站得高一点，比如你坐在飞机上，可以鸟瞰全市；登山眺望，山下景物可以尽收眼底；坐在飞船上，可以看到地球的全貌。

微积分学包括两大部分，第一大部分是微分学，第二大部分是积分学。

微分学部分，又可包括三大支干，它们是极限、导数、微分；而导数和微分又有许多方面的应用。其中极限是完成曲变直的中间媒介，或者把极限这个过程叫做曲通向直的一个必经之路。第二大部分，包括不定积分和定积分、重积分，以及积分在物理学等多方面的应用。关于每一支干中的若干小分支，将在各部分中加以叙述。微积分学包括的这些内容，是不是我们在中学都学呢？不，不是的。我们中学阶段只讲其中主要的部分。这些部分就是课本中安排的极限、导数、微分、导数和微分的应用，以及不定积分、定积分和定积分的应用。还有一点也要说明，我们中学课本里的微积分学，许多定理都不加证明而直接使用，有许多定理以及应用的方面没有讲到，这在具体部分中将向同学们介绍一下那

个方面的概要或题目，详细内容不做介绍，那要到理工科高等院校学习。甚至有的内容也只有数学系专业的同学才有学习的必要，非数学专业的同学也不一定全学到。

那么，现在我们就从头开始吧。

§1-1　怎样理解极限概念

极限是微积分学的基础。在这一部分中，除了课本上向同学们介绍的之外，我想向同学们强调的是，极限是做什么用的。我觉得很有必要把它的用途突出出来。它的用途是什么呢？就是曲的变成直的中间媒介。完成了极限的过程，就是完成了曲变直的过程。如果说，曲怎么会变成直、直怎么能代替曲这个关键的问题，你还弄不懂、还不理解的话，症结在于你对极限过程的本质还不理解。那么请你仔细地、反复地读一读这一节的内容。我们不能孤立地学极限，现在学极限要知道它是为下面讲导数、微分、积分服务的。没有它，曲就不能变直。那就是，曲就是曲，直就是直，永远把常数和变数分割开来。

至于极限的具体内容，它包括下面这些：什么叫极限？什么叫数列的极限？什么叫函数的极限？极限的运算性质是什么？怎样求数列极限？怎样求函数极限？两个重要的极限是什么？关于极限理论及多元函数极限也是包括在极限内容之内的，不过那要到高等院校或数学专业才学习。同学们要知道，极限内容除了我们学习的这几个部分之外还有没学到的内容，知道这一点就行了。

关于极限的定义，我不想多说什么，书中明白地写着，而且为提醒同学们注意，都是用粗黑体字印刷的。我想向同

学们谈的是对定义怎样理解。就是说极限意味着什么？你懂不懂求极限过程的本质？现在，我就这个问题，向同学们谈一谈。

我们现在作这样一种假设，你乘火车从北京去上海旅行，火车运行一般不是匀速的，这样在时间和路程方面，就具有函数关系了。路程是时间的函数，这个函数，随着自变量（时间）的变化而变化。变化的趋势是，越来越接近终点上海。换一种说法，就是你同终点的距离越来越小。小到什么程度呢？这个权利交给你，叫你任选一个小正数ε，你说小到什么程度就小到什么程度。讲到这里你要注意，这种小的含义你弄明白没有？理解了没有？这种小是怎样的一种小？这种小和普通说的小是不是一回事？它当然不是一回事。既然不是，它们的本质区别又是什么？围绕你所指定的这个小正数，我从不同角度向同学们进行了发问，目的在于理解和领会这种逼近过程。这种逼近过程是无限进行下去的。用静止的、不变的想法是理解不了的。尽管选不到那么一个小的小正数，但又知道它向终点无限的逼近，并以终点为限。这就是极限的思想。你自己也可以举出很多极限的例子，你自己举举看，看你能举出几个。

§1-2　数列极限定义及符号意义

数列的极限是这样定义的：一般地，对于数列$\{a_n\}$，如果存在一个常数A，无论预先指定多么小的正数ε，都能在数列中找到一项a_N，使得这一项后面的所有项与A的差的绝对值都小于ε，就把常数A叫做数列$\{a_n\}$的极限，记作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

在这样的定义中，包括五个内容：数列$\{a_n\}$，常数A，指定的小正数ε，数列中总能找到的一项a_N，a_N后面的所有项与A的差的绝对值。

对这五个内容怎样理解？它们之间怎样组成一个整体而形成极限定义的？现在我们来谈一下。设有函数$y=f(x)$，给定自变量一系列值x_1、$x_2\cdots$、$x_n\cdots$，相应地函数也取得一系列值y_1、y_2、$\cdots y_n\cdots$，或者写作a_1、a_2、$\cdots a_n\cdots$，这就组成了一个数列，而这样一个数列常用$\{a_n\}$表示。我在上面举的那个例子，把时间当自变量，路程当因变量，就可以组成一个数列。常数A就是这个数列要逼近的终点。无论怎样小的正数ε，是叫读者或学习的人选择的，叫你任意选的目的，在于说明，这种逼近是可以无限进行下去的。我打个比方，有两个小孩比谁的东西大。一个说，我的比房子大，另一个说，我的比楼房还大，第一个小孩又说，我的比天大，第二个小孩又说，我的比天还大。请你给裁判一下，他俩谁把大说出来了呢？这里的无限逼近，使得数列与常数A的距离越来越小也是这个意思，谁能把这种向A逼近的小说出来呢？你说个小，他比你说的还小。定义中使用这句话的意思是，这种逼近是一个无限过程。要加深对无限进行下去的过程的理解。无限就意味着永远不能完结，这里说的小和平常说的小是截然不同的。极限中说的无限进行下去，逼近A的那个小已经在无限进行中发生了质变。即a_N随着ε的取值而变化，当ε的取值越来越小时，而N的取值就越大，则a_N的对应值就越来越逼近于A。这种变化过程，就是所说的极限的概念。

为了说明这个意思，有的书中画成数轴，标明一个数列$\{a_n\}$是怎样一点一点向A逼近的，换一句不同的说法，就是

a_N与A之差的绝对值越来越小。比如书中25页的下图，是利用$\{a_n\}=\frac{1}{2^n}$画的。你不妨自己动笔试一试，看数列$\{a_n\}=\frac{1}{2^n}$向什么样的常数A逼近。

同样，为了向同学们讲清这种思想，又用表格的形式，如课本26页上表，就是按数列$\{a_n\}=1-\frac{1}{10^n}$列成的，同学们不妨列一列看，看它向哪个常数A逼近。

上面共向同学们谈了两个内容。一个是什么叫极限，另一个是什么叫数列的极限。着重对极限的本质，在文字上作了叙述，同时也突出了不变包括在变之中；不变是相对的，变是绝对的，不变是变的特例。研究变数，当然也就研究了常数；高等数学当然包含了初等数学。

为了进一步理解定义和它各部分的含义，我们给同学们留几道思考题。

有数列$\{a_n\}=1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}$，

1. 在数轴上标出前四项，看向什么常数逼近。
2. 算出a_n中第几项之后，与1之差的绝对值小于0.001。
3. 求出数列的极限。

也可参考下面的答案。先解决第一小问。它的前四项分别是：$\frac{1}{2}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{17}{16}$。把它们标在数轴上如图(1.1)

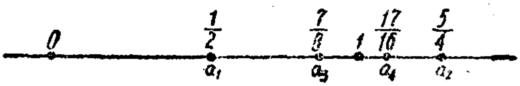


图 (1.1)

我们观察一下，当n取自然数时，a_1项和a_N项等都向 1 靠近。只要n充分大，那么就可以做到$|A-a_N|<\varepsilon$。

第二小问，这是一个不等式，解不等式

$$\left|1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}-1\right|<0.001$$

$$\frac{1}{2^n}<0.001$$

$$10^3<2^n$$

当$n>9$时，就是n大于自然数 9 以后，第10项开始，a_n与 1 的差的绝对值小于0.001，不等式恒成立。

第 3 小问，求这个数列的极限。数列与 1 的差的绝对值小于预先任选的小正数ε，故数列a_n以 1 为极限。

对同学们来说，当你学过极限的运算性质之后，就可以利用极限的运算性质，对于一些数列的极限进行计算了。但在具体计算时，重要的是根据已知的条件或规律写出数列的通项。这一点，同学们在后面解数列的题目中将会碰到。那么怎么突破这一关呢？窍门没用，只有你的几何、三角、代数等基础知识雄厚，才能根据条件或规律，找到数列的通项。这类题目在习题中将出现，那里将给出略解和答案，目的在于启发解题的思路。

对极限和它们的符号意义有了充分理解之后，再看定义就理解得透了。下面给出函数极限的定义和有关函数极限的一些说明。

描述性定义：一般地，当自变量x的绝对值无限增大时，如果函数$f(x)$无限趋近于一个常数A，就说当x趋向于无穷大时，函数$f(x)$的极限是A，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

其中自变量 x 可能趋于正无穷大，可能趋于负无穷大，两种情形都是函数在无限远处的极限。自变量 x 趋向于正、负无穷大可统称为 $|x|$ 无限增大。

函数极限在某点处的描述性定义是：

当自变量 x 无限趋近于常数 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就说当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

需要说明的是，第一点，函数极限与数列极限二者的区别。求数列 $\{a_n\}$ 的极限时，n 是取自然数的，即 $n \to \infty$。而求函数极限时，自变量 x 是属于实数集，它可以取 $x \to +\infty$，可以取 $x \to -\infty$，统称为 $|x| \to \infty$。还有一种情形就是象上面定义的那样 $x \to x_0$。在函数的极限中，x 是在定义的区间上连续变化的，这是二者的主要区别。第二点，基本初等函数在定义区间上都是连续的。有关函数连续的概念和性质，要到系统学习高等数学之后才能了解，这里不作介绍。第三点，关于如何判断一个函数是否存在极限的定理未做证明，因为已超出中学学习范围。第四点，有些函数极限的求法，用课本中介绍的知识还不够，比如罗彼塔法则，在求函数极限时很有用，也超出教学大纲的范围。

§1-3　极限运算法则

我们把数列 $\{a_n\}$ 极限的运算法则和函数 $f(x)$ 极限的运算法则放到一起，因为它们是完全类似的，没有重复的必要。

极限的运算法则很简单，现列出如下：

设：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，

则：$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = kA$ （k＝常数）

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}，（当 \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 或 \infty 时）$$

若是用函数 $f(x)$、$g(x)$ 分别去代替上面的 a_n、b_n，就成为函数极限的运算法则。我们还可以把法则从两个数列、两个函数推广到多个。

连续函数求极限 $\lim f[\phi(x)] = f[\lim\phi(x)]$。

根据数列和函数极限运算法则，做几个求极限的例题。

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 4)$的极限

解：利用运算性质一

$$\lim_{x\to 1}(x^2+4) = \lim_{x\to 1}x^2 + 4 = 5$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$的极限

解：利用极限运算性质一、运算性质四，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

在求极限的运算中，包括求数列极限和求函数极限，比较难一点的题是求有理分式的极限，如