第二卷 第一分册

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

R.柯朗 F.约翰 著

科学出版社

数学名著译丛

微积分和数学分析引论

第二卷 第一分册

R. 柯朗 F. 约翰 著

林建祥 刘婉如 朱德威 等 译

冷生明 校

科学出版社

2001

图字：01-98-2682

内 容 简 介

本书系统地阐述了微积分学的基本理论. 在叙述上, 作者尽量作到既严谨而又通俗易懂, 并指出概念之间的内在联系和直观背景. 原书分两卷, 第一卷为单变量情形, 第二卷为多变量情形.

第二卷中译本分为两册出版. 本书是第二卷第一分册, 包括前三章. 第一章详论多元函数及其导数, 包括线性微分型及其积分, 补充了数学分析中最基本的概念的严密证明; 第二章在线性代数方面为现代数学分析的基础准备了充分的材料; 第三章叙述多元微分学的发展及应用, 包括隐函数存在定理的严密证明, 多元变换与映射的基本理论, 曲线、曲面的微分几何基础知识以及外微分型等基本概念. 原书有练习解答, 分别编入各分册.

译者 (按内容顺序): 邵士敏、周建莹、张锦炎（第一章）、刘婉如（第二章）、林建详、张顺燕、朱德威（第三章）、林源渠（解答）.

读者对象为高等学校理工科师生与工程技术人员.

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分和数学分析引论. 第二卷, 第一分册 / 【美】 R. 柯朗, 【美】 F. 约翰著; 林建祥等译. —— 北京: 科学出版社, 2001.3
书名原名: Introduction to Calculus and Analysis, Volume 2
ISBN 7-03-008540-X

I. 微… II. ①柯…②约…③林… III. ①微积分②数学分析 IV. O17

中国版本图书馆数据核字 (2000) 第 60214 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717

北京双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年3月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32
2001年3月第一次印刷 印张: 16
印数: 1-3 000 字数: 416 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

序　　言

R. 柯朗的《微积分 (Differential and Integral Calculus) 》, 卷一和卷二, 获得了巨大的成功, 引导了几代数学家进入高等数学的领域. 整套书阐发了这样一条富有教益的道理: 真正有意义的数学是由直观想象与演绎推理相结合而创造出来的. 在准备本修订版的过程中, 著者们力图保持原著所特有的这两种思维方式的合理结合. 虽然 R. 柯朗未能亲眼看到这第二卷的修订本的出版, 但是在柯朗博士于 1972 年 1 月去世之前, 所有主要的修改内容都已经由著者们商量出一致的意见并草拟了纲要.

从一开始, 著者们就清楚地理解到, 阐述多元函数的第二卷应当比第一卷作更大的修改. 特别是, 似乎最好用与一维空间中的积分法同样程度的严密性和普遍性来处理高维空间中的积分法的所有基本定理. 另外, 若干具有根本重要性的新概念和新论题, 它们在著者们看来, 是属于数学分析引论的.

本卷末尾较短的几章 (六、七、八) (分别讲微分方程、变分法、复变函数的) 仅作了较小的改动. 在本卷的主体部分 (第一至第五章) 中, 我们尽量保存了原来的体系, 各章的主题都在不同的水平上按大体上平行的两条线索进行阐述: 一条是较多地基于直观论证的非正式引述, 一条是为后续的严密证明打基础的、对于应用的讨论.

原来的第一章中所讲的线性代数的材料, 看来已不足以作为扩展了的微积分结构的基础. 因此, 这一章 (现在的第二章) 完全重写了, 现在讲述了所需要的 n 阶的行列式、矩阵、多线性型、格拉姆行列式、线性流形等的一切性质.

现在的第一章包括了线性微分型及其积分的所有基本性质. 这就为读者提供了阅读第三章 (第 3.6 节) 新添的高阶外微分型的预备

知识. 现在的第三章中还新添了一个关于隐函数定理的利用逐次逼近法的证明, 一个关于临界点的个数和二维向量场的指数的讨论.

在第四和第五章中, 对重积分的基本性质作了大量的增补. 这里面临着一个大家熟知的困难: 展布在一个流形 M 上的积分, 很容易通过把 M 适当划分成小片来定义, 却必需证明它不依赖于特殊的分划. 这由系统地使用约当可测集类的有限交性质和单位分划而解决了. 为了使应用拓扑学上的复杂性减少到最低限度, 我们只考虑了光滑地嵌入于欧氏空间中的流形. 另外, 对流形的"定向"的概念也作了详细的研讨, 这是要讨论外微分型的积分及其可加性所必需的. 在这个基础上我们给出了 n 维空间中的散度定理和司铎克斯定理的证明. 在第四章关于傅里叶积分的一节 (第 4.13 节) 里, 还新添了关于帕塞瓦尔等式和傅里叶重积分的论述.

在这一卷的准备过程中, 最珍贵的是, 著者们能不断得到两位朋友慷慨的帮助, 一位是 Carnegie-Mellon 大学的 Albert A. Blank 教授, 一位是 Negev 大学的 Alan Solomon 教授. 在几乎每一页上都有着他们的批评、改正、建议的痕迹. 他们还为这一卷准备了练习题和问题.

我们感谢 K.O. Friedrichs 教授和 Donald Ludwig 教授建设性的宝贵建议, 还感谢 John Wiley and Sons 公司及其编辑部的不断鼓励和帮助.

F. 约翰

纽约, 1973 年 9 月

目　　录

第一章　多元函数及其导数

在第一卷中曾讨论过的极限、连续、导数和积分等概念，同样也是二元或多元函数的基本概念. 然而，有很多在一元函数理论中并不存在的新的现象，必须在多维中加以讨论. 通常一个定理只要对于两个变量的函数可以证明它，那么在证明中不需要作任何本质的改变，就容易推广到多于两个变量的函数中去. 因此，在以后的论述中我们常限于讨论两个变量的函数，其中各种关系都比较容易用几何图形来显示，而只当由此得到一些另外的见解时，才对三个或更多个变量的函数加以讨论；所得结果也同样可以作简单的几何学的解释.

1.1　平面和空间的点和点集

a. 点的序列：收敛性

在一个笛卡儿平面坐标系中，一对有顺序的数值 (x,y) 在几何上可以用一个点 P 来表示，这个点的坐标为 x 和 y. 两点 $P=(x,y)$ 与 $P'=(x',y')$ 之间的距离可以由公式

$$\overline{PP'}=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$$

求得. 这是欧几里得几何学的基本公式. 我们利用距离的概念可以定义一个点的邻域. 一个点 $C=(\alpha,\beta)$ 的 ε 邻域是由所有那些与 C 的距离小于 ε 的点 $P=(x,y)$ 构成的；从几何学上说，这是一个

以 C 为中心、以 ε 为半径的圆盘 [1)], 它可用不等式

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<\varepsilon$$

来描述.

我们考虑无穷的点序列

$$P_1=(x_1,y_1),P_2=(x_2,y_2),\cdots,P_n=(x_n,y_n),\cdots.$$

例如 $P_n=(n,n^2)$ 定义了一个序列, 其中所有的点都在抛物线 $y=x^2$ 上. 一序列中的点并不一定都不相同. 例如, 无穷序列 $P_n=(2,(-1)^n)$ 只有两个不同的元素.

如果能找到一个圆盘, 它包含所有的 P_n, 也就是说, 如果存在一个点 Q 与一个数 M, 使得对所有的 n 都有 $\overline{P_nQ}<M$, 那么我们说序列 $P_1,P_2,\cdots$ 是**有界的**. 例如序列 $P_n=(1/n,1/n^2)$ 是有界的, 而序列 (n,n^2) 是无界的.

与序列有关的最重要的概念是**收敛**的概念. 我们说, 一个点序列 $P_1,P_2,\cdots$ 收敛到一个点 Q, 或

$$\lim_{n\to\infty}P_n=Q,$$

是指距离 $\overline{P_nQ}$ 收敛到零. 这样, $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=Q$ 就意味着对于每一个 $\varepsilon>0$, 都必然存在一个数 N, 使对于所有 $n>N$, P_n 都在 Q 的 ε 邻域内 [2)].

举一个例. 对于由 $P_n=(e^{-n/4}\cos n,e^{-n/4}\sin n)$ 定义的点序列, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=(0,0)=Q$, 因为, 在这里

$$\overline{P_nQ}=e^{-n/4}\to0\quad 当\ n\to\infty.$$

1) 平常所用的 "圆" 这个词, 是指一条曲线还是指由它所界的区域, 是含糊不清的. 我们根据实际流行的说法, 把 "圆" 只用于曲线, 而把 "圆形区域" 或 "圆盘" 用于两维区域. 同样, 在空间中我们把 "球面"(即球形曲面) 与它所界的三维立体 "球体" 区别开来.

2) 等价地说, 任何一个以 Q 为中心的圆盘, 除有限个 P_n 外, 它包含所有的 P_n. 我们也常用记法表示成: 当 $n\to\infty$ 时 $P_n\to Q$.

我们指出， P_n 是沿着极坐标方程为 $r=e^{-\theta/4}$ 的对数螺线趋于原点 Q 的 (见图 1.1).

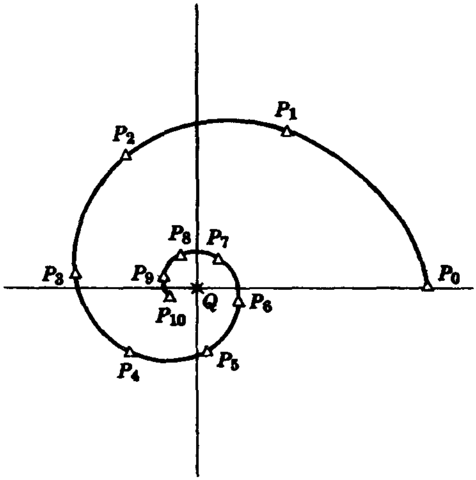

图 1.1　收敛序列 P_n

点序列 $P_n=(x_n,y_n)$ 收敛到点 $Q=(a,b)$ 意味着，两个数序列 x_n 与 y_n 分别收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

诚然， $\overline{P_nQ}$ 很小隐含着 x_n-a 与 y_n-b 都很小，因为

$$|x_n-a| \le \overline{P_nQ},\quad |y_n-b| \le \overline{P_nQ};$$

反之

$$\overline{P_nQ}=\sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} \le |x_n-a|+|y_n-b|,$$

从而当 $x_n\to a$ 与 $y_n\to b$ 时有 $\overline{P_nQ}\to 0$.

如同数序列的情形一样，我们可以利用 柯西的内在收敛判别法 来证明一个点序列收敛，而不需要知道它的极限值. 这个判别

法，在两维中断言：一个点序列 $P_n=(x_n,y_n)$ 是收敛的必要充分条件是，对每一个 $\varepsilon>0$，不等式 $\overline{P_nP_m}<\varepsilon$ 对大于适当的值 $N=N(\varepsilon)$ 的所有 n,m 都成立. 其证明可以对两个序列 x_n 与 y_n 中的每一个运用数序列的柯西收敛判别法来推得.

b. 平面上的点集

在讨论单变量 x 的函数时，我们常允许 x 在一个"区间"内变化，区间可以是闭的或开的，可以是有界的或无界的. 而对于高维空间中的函数所可能取的区域而言，必需考虑更多种类的集合，并且必需引进描述这些种类集合的简单性质的一些述语. 在平面中我们通常考虑的可以是曲线也可以是二维区域. 平面曲线在第一卷第四章中已广泛地讨论过. 通常它们可以用"非参数"形式的一个函数 $y=f(x)$ 给出，或者用"参数"形式的一对函数 $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ 给出，或者用一个隐式方程 $F(x,y)=0$ 给出 (在第三章中我们将更多地讲到隐式表示法).

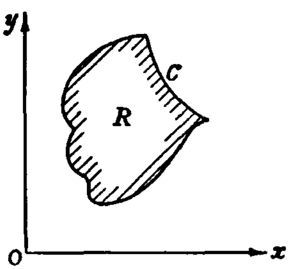

图 1.2　单连通区域

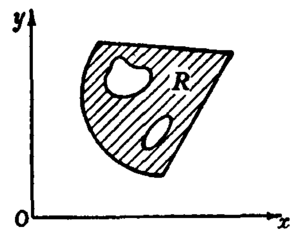

图 1.3　三连通区域

除曲线之外，我们还有组成一个区域的二维点集. 这个区域可以是整个 xy 平面，或者是由一简单闭曲线围成的一部分平面 (在这种情况下，形成一个单连通区域如图 1.2 所示)，或者是由几个这类曲线围成的一部分平面. 在后一种情况下，我们称之为多连通区域，边界曲线的数目就叫做连通数；例如图 1.3 就表示一

个三连通区域. 一个平面集合也可以是全然不连通的[1], 而是由几个分离部分组成的 (图 1.4).

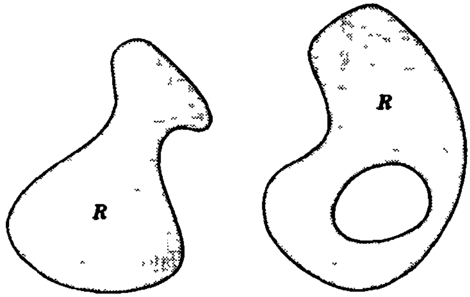

图 1.4 非连通区域

一般说来, 要考虑的区域的边界曲线都是逐段光滑的, 亦即每一个这样的曲线是由有限个弧组成的, 每一段弧上所有的点, 包括端点在内, 都有一个连续转动的切线. 因此, 这样的曲线至多也只有有限个角.

在绝大多数情况下, 我们用一个或多个不等式来描述一个区域, 而在边界的一些部分保持等号. 有两种最重要的区域形式是经常遇到的: 一个是矩形区域 (其各边平行于坐标轴), 一个是圆盘. 矩形区域(图 1.5) 是由这样一些点 (x, y) 构成的, 它们的坐标满足不等式

$$a < x < b, \quad c < y < d;$$

每一个坐标限制在一个确定的区间上, 并且点 (x, y) 在一个矩形内部变化. 我们这里定义的矩形区域是开的, 就是说它不包含它的边界.

把定义该区域的一个或几个不等式改为等式, 并且允许 (但不是必需的) 其余的不等式中有等号, 这样就得到边界曲线. 例如

$$x = a, \quad c \leq y \leq d$$

1) "连通" 的确切定义见第 110 页.

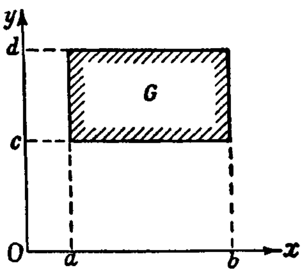

图 1.5　矩形区域

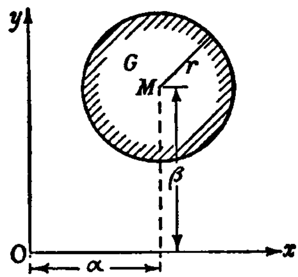

图 1.6　圆盘

定义了矩形的一条边. 把所有的边界点加到该集合中去, 就得到**闭**矩形, 它由下面的不等式来描述:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

如前面所见那样, 中心为 (α, β) 、半径为 r 的**圆盘**(图 1.6), 可由下面这不等式给出:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < r^2.$$

把边界圆加到这个“开”圆盘上, 我们就得到“闭”圆盘, 它由下式表示

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leq r^2.$$

c. 集合的边界. 闭集与开集

区域的边界可以看作一类薄膜, 它把那些属于区域的点与不属于区域的点分开. 我们将会看到, 这样的边界的直观概念并不总是有意义的. 然而, 值得注意的是, 有一种方法可以十分一般地定义任何点集的**边界**, 使得它在这种定义方式中至少与我们的直观概念相一致. 我们说**点** P **是点集合** S **的一个边界点, 意思是说**, P **的每一个邻域内有属于** S **的点也有不属于** S **的点**. 因此, 如果 P 并不是一个边界点, 那就必定存在 P 的一个邻域, 它只包含同一

类的点；也就是说，或者我们可以找到 P 的一个邻域，它包含的全部是 S 的点，在这种情况下，我们叫 P 为 S 的一个内点；或者我们可以找到 P 的一个邻域，它包含的全部不是 S 的点，在这种情况下，我们叫 P 为 S 的一个外点. 这样，对于一个给定的点集 S，平面上的每一个点，不是 S 的边界点，就是 S 的内点或外点，而且只能属于这三类点中的一类. S 的全部边界点的集合构成 S 的边界，我们用符号 ∂S 表示.

举一个例子，令 S 为矩形区域

$$a < x < b, \quad c < y < d.$$

显然，对于 S 中任一个点 P，我们可以找到一个以 $P = (\alpha, \beta)$ 为中心的小圆盘，它全部包含于 S 之中；我们只需要取一个 P 的 ε 邻域，其中 ε 为足够小的正值，使

$$a < \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon < b, \quad c < \beta - \varepsilon < \beta + \varepsilon < d.$$

这表明在这里 S 的每一个点都是内点. S 的边界点 P 是那些刚好位于矩形的一个边上或一个角上的点. 在第一种情况下，P 的每一个足够小的邻域一半属于 S，一半不属于 S；在第二种情况下，每一个邻域的四分之一属于 S 而四分之三不属于 S (图 1.7).

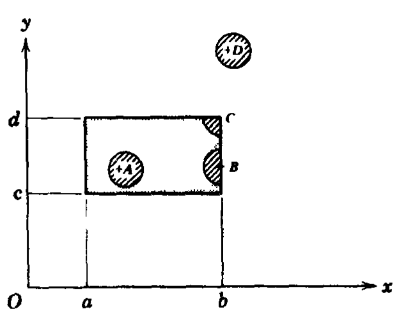

图 1.7　矩形区域的内点 A，外点 D 和边界点 B, C