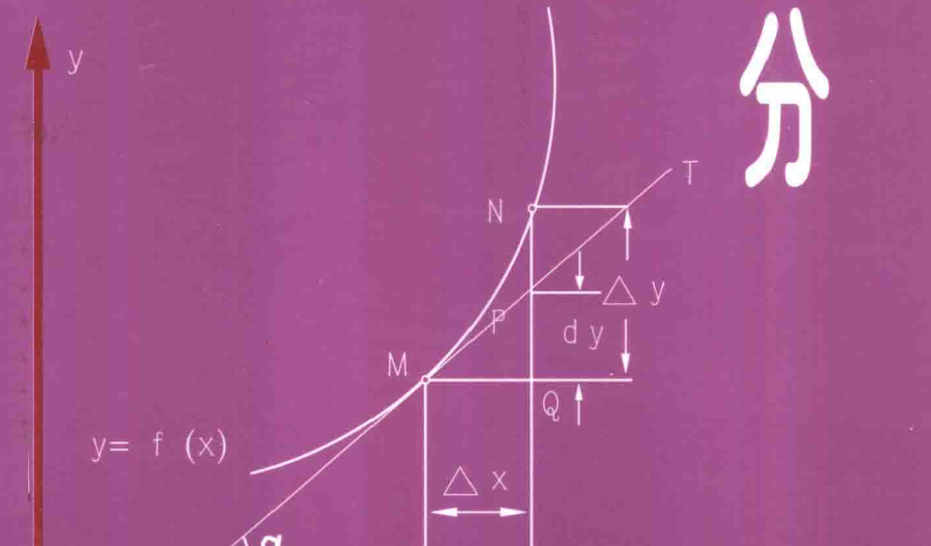
财经类高等数学系列教材

1

杨冬莲 主编

微积分



中国金融出版社

财经类高等数学系列教材

主　编　郭青峰
副主编　李庆高　王明惠
　　　　杨冬莲　熊福生

（第一分册）

微　积　分

本册主编　杨冬莲

中国金融出版社

责任编辑：邓瑞锁
封面设计：孔维云
责任印制：张　莉

图书在版编目（CIP）数据

微积分/杨冬莲主编. --北京：中国金融出版社，1997.8
ISBN 7-5049-1749-4
Ⅰ. 微…
Ⅱ. 杨…
Ⅲ. 微积分-高等学校-教材
Ⅳ. 0172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 18288 号

出版：
发行：中国金融出版社
社址：北京广安门外小红庙南里 3 号
邮编：100055
经销：新华书店
印刷：北京宏文印刷厂
开本：850 毫米×1168 毫米　1/32
印张：13.75
字数：422 千
版次：1997 年 8 月第 1 版
印次：2001 年 2 月第 2 次印刷
印数：10301—12358 册
定价：19.80 元

编写说明

随着我国经济体制改革的深入发展和社会主义市场经济体制的建立与完善，经济管理水平日益提高，经济决策的科学化、计量化和经济理论的数学化已成为必然趋势。因此，未来社会对高等财经人才的数学素质和专业水平的要求也会越来越高。为了适应这一发展趋势的需要，我们编写了这套“财经类高等数学系列教材”。

“财经类高等数学系列教材”是根据“高等学校财经类专业核心课程教学大纲”编写的。这套教材吸取了《经济数学基础》教材的优点，并且更加突出了基本概念、基本知识和基本技能训练的要求，进一步体现了高等数学作为一门基础理论课的功能，以加强对学生数学素质的培养；同时，对教材的体系结构，也力求做到更为合理。

“财经类高等数学系列教材”包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《线性规划》四个分册。全书由湖南财经学院党委书记兼院长郭青峰教授主编，李庆高、王明惠、杨冬莲和熊福生任副主编。

本册《微积分》由浅入深地系统介绍了微积分学的基本知识，强调基本理论和基本方法的掌握，并尽可能地做到与经济应用相结合。对书中基本原理除给出了严格的证明外，又特别注意适当配合图形以直观上的解释，力求通俗易懂。全书列举了大量具有一定特色的例题，各章末尾还选配了丰富的一般型及综合型习题以供学生练习。个别章节加了“*”号，可供教学时灵活掌握。

本册由杨冬莲主编并执笔编写第一、二章，晏木荣写第三、四、十章，李建平写第五、六、九章，杨湘豫写第七、八章。罗先照、王稳遐任主审，他们对原稿进行了认真审阅，并提出了许多改进意见。

这套“财经类高等数学系列教材”的出版，得到了中国金融出版社和湖南财经学院教务处的大力支持，在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限，本套教材难免存在某些不足之处，欢迎读者和同行批评指正。

《财经类高等数学系列教材》编写组

1997 年 5 月

目　录

第一章　函　　数

函数是高等数学的重要概念之一，也是微积分学的主要研究对象．所谓函数关系，就是变量之间的依赖关系．本章将介绍函数的基本概念，讨论函数的有关性质，并简介几个经济学中常用的函数．

第一节　函数概念

一、集合

1．集合的基本概念

所谓集合，就是指具有某种共同属性的事物的全体．例如，某班级的全体同学构成一个集合，全体实数构成一个集合，等等．构成集合的每一事物称为该集合的元素．习惯上，我们用大写字母 A、B、C…表示集合，用小写字母 a、b、c…表示集合中的元素．

如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"；如果 a 不是 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A"．

由有限个元素组成的集合叫有限集，可用列举法来表示，就是把集合中的所有元素都列出来．例如，由 a、b、c、d 这四个元素组成的集合 A，可表示为

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

由无限多个元素组成的集合叫无限集，通常用描述法表示，即把集合中元素所具有的某种共同属性描述出来．例如，由大于零的全体实数 x 组成的集合 B，可表示为

$$B=\{x\mid x\text{ 为实数},x>0\}.$$

又如，xOy 平面上，坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体组成的集合 C，可表示为

$$C=\{(x,y)\mid x、y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}.$$

此集合实际上就是 xOy 平面上以原点 O 为中心、半径为 1 的圆周上的全体点所组成的集合．

以后我们要用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．如果没

有特别说明，以后提到的数都是实数，故所论数集是实数集. 我们常用 R 表示全体实数的集合，用 N 表示全体自然数的集合，用 Z 表示全体整数的集合，用 Q 表示全体有理数的集合.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A". 例如，$N \subset Z$，$Z \subset Q$，$Q \subset R$.

如果集合 A 是集合 B 的子集且 B 也是 A 的子集，即两个集合所含元素完全相同，则称两个集合相等，记作 $A=B$. 例如，设 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,1\}$，$C=\{x \mid x$ 为实数，$x^2-3x+2=0\}$，则 $A=B=C$.

不含任何元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$. 例如，$A=\{x \mid x$ 为实数，$x^2+4=0\}$ 是一个空集，因为满足方程 $x^2+4=0$ 的实数 x 是不存在的.

2. 集合的运算

正如数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合之间也有其特定的运算.

由集合 A 与集合 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，它可表示为

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由集合 A 和集合 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，它可表示为

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

例如，设 $A=\{x \mid -1<x \leqslant 2\}$，$B=\{x \mid 1<x \leqslant 3\}$，则

$$A \cup B=\{x \mid -1<x \leqslant 3\}, A \cap B=\{x \mid 1<x \leqslant 2\}.$$

属于集合 A 且不属于集合 B 的所有元素构成的集合叫做 A 与 B 的差，记为 $A-B$，它可表示为

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，则

$$A-B=\{1,2\}, B-A=\{5\}.$$

若集合 A 是集合 B 的一个子集，由属于 B 而不属于 A 的所有元素构成的集合叫做 A（关于 B）的补集（也称余集），记作 $\overline{A}_B$（简记为 $\overline{A}$）. 显然，$A \cup \overline{A}_B=B$，$A \cap \overline{A}_B=\varnothing$.

例如，设 $A=\{1,3,4,8\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，则

$$\overline{A}_B = \{2,5,6,7,9\}.$$

又如，设 $N=\{$全体自然数$\}$，$A=\{$全体正奇数$\}$，

则　　$\overline{A}_N=\{$全体正偶数$\}$.

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a、b 为实数，且 $a<b$，那么，满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 为端点的开区间，记作 $(a、b)$，即

$$(a,b) = \{x|a < x < b\}.$$

在数轴上，它表示以 a、b 为端点但不包含 a 和 b 的线段（图 1—1）.

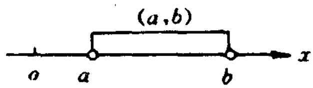


图 1—1

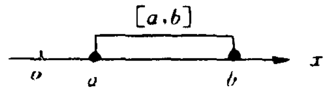


图 1—2

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}.$$

在数轴上，它表示以 a、b 为端点且包含 a 和 b 的线段（图 1—2）.

类似的称

$$[a,b) = \{x|a \leqslant x < b\} \text{ 及 } (a,b] = \{x|a < x \leqslant b\}$$

为半开区间，在数轴上分别表示为图 1—3 和图 1—4.

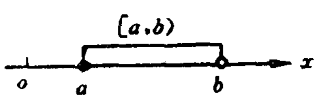


图 1—3

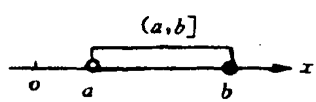


图 1—4

以上区间都叫做有限区间，区间的长度为 $b-a$，从数轴上看，其长度均为有限线段.

如果我们引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间.

例如， $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$，

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，

在数轴上分别表示如图 1－5、图 1－6.

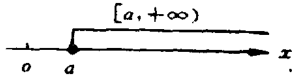


图 1－5

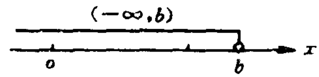


图 1－6

全体实数的集合 R，用区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示，即

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}.$$

它也是一个无限区间，在几何上表示整个数轴.

设 x_0 与 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，我们称数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$，也就是以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，其中点 x_0 为该邻域的中心，δ 为邻域的半径. 数轴上表示如图 1－7.

在 x_0 的 δ 邻域内，如果去掉中心点 x_0，则得到数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，也就是开区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，叫做点 x_0 的空心（去心）邻域.

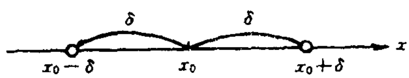


图 1－7

例如，点 $x_0=3$ 的 $\frac{1}{4}$ 邻域是指开区间 $(2.75,3.25)$，而点 $x_0=3$ 的 $\frac{1}{4}$ 去心邻域是指 $(2.75,3)\cup(3,3.25)$.

二、映射

本节，我们引入两个集合间的一种对应关系——映射.

定义 1 设 X、Y 为两个非空集，如果存在一个从 X 到 Y 的对应法则 f，使得 X 中的每一个元素 x，有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，这样的对应就叫做从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y.$$

按照对应法则 f，与元素 $x \in X$ 对应的元素是 $y \in Y$，我们称 y 是 x

的象，x 是 y 的原象. 原象的集合是 X，称作映射 f 的定义域，记作 D_f，象的集合叫作映射 f 的值域，记作 W_f. 显然，$D_f=X$，$W_f\subset Y$.

映射需要具备的条件是：

(1)所有原象个个有象；

(2)每一个原象只能有一个象.

需要说明的是：

(1)在映射 $f:X\to Y$ 中，并不要求 Y 中的所有元素都有 X 中的某个元素与之对应；

(2)尽管 X 中的任一元素不允许与 Y 中的两个或多个元素对应，但 Y 中的某个元素可以是 X 中的两个或多个元素的对应元素.

下面举几个映射的例子.

例 1 设 A 是某组学生的集合，B 是实数集(单位:kg)，将每个学生与其体重建立对应关系，即每个学生在同一时刻均有唯一确定的体重，这就构成了从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$(图 1—8).

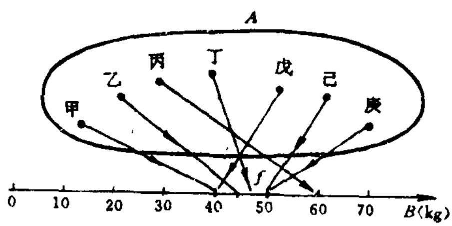


图 1—8

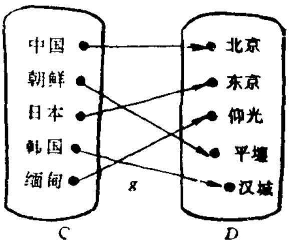


图 1—9

例 2 设 C 是五个国家的集合，D 是五个首都城市的集合，则可把 C 中的每个国家与 D 中的某一城市相对应，构成映射 $g:C\to D$(图 1—9).

例 3 设 $X=\{x|x$ 为实数$\}$，$Y=\{y|y$ 为实数$\}$，根据“数的平方”法则，可定义从 X 到 Y 的映射 $\varphi:X\to Y$. 例如 $2\to4$，$-2\to4$，$1.3\to1.69$，$-1\to1$.

例 4 设 $Z=\{z|z$ 为整数$\}$，$R=\{r|r$ 为实数$\}$，根据“二分整数”的

法则，可定义一个从 Z 到 R 的映射 $\psi: Z \to R$. 例如，$1 \to 0.5$，$-2 \to -1$，$2 \to 1$，$-5 \to -2.5$.

对于例 1、例 3 的映射，第一个集合中的每一个元素都与第二个集合中的一个且仅只一个元素相对应(一个人仅仅只有一个体重；一个数平方后只有一个数)，然而，第一个集合中一个以上的元素可以与第二个集合中的某同一元素相对应(两个或两个以上的人的体重相同；两个数的平方对应同一个数，这都是可能的)，我们称这样的映射是"多对一".

例 2 中的映射是"一对一"映射. 集合 C 中的每一元素对应了 D 中的仅仅一个元素(一般来说，没有一个国家会有两个或两个以上首都的)，并且，也没有 C 中的两个或两个以上元素对应 D 中的同一元素(没有两个或两个以上的国家拥有同一个首都). 同样，例 4 也是"一对一"映射.

因此，我们所论的映射，实际上是指集合间的"多对一"或"一对一"的对应关系.

另外，让我们进一步讨论一下例 2 的映射. 我们已经知道，从 C 到 D 的映射是"一对一"的对应，C 中的每一元素都对应了 D 中的唯一元素，如中国→北京，朝鲜→平壤，…，如果将图 1－9 中的箭头反过来，便得到从 D 到 C 的映射，这也是一个"一对一"的对应，即 D 中的每一元素对应了 C 中的唯一元素，如北京→中国，平壤→朝鲜，…这样，我们称 C 与 D 之间的对应为"一一对应". 同样，例 4 中的 Z 与 R 也是"一一对应".

如果对于每一个 $x \in X$，都对应了唯一的 $y \in Y$，且对于每一个 $y \in Y$ 也只对应了唯一的 $x \in X$，我们就称 X 与 Y 的对应是"一一对应"，也称这样的映射为"一一映射".

三、函数概念

1. 常量与变量

如图 1－10，$ABCD$ 是一个矩形，AB 边上的高就是 AB 边上任意一点 x 到 CD 边的距离 y，不管点 x 在 AB 上怎样移动，这个高度 y 都是不变的.

图 1－11 中，$ABCD$ 被称为"曲边梯形"，其 CD 边是曲线. 过 AB

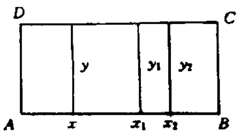


图 1—10

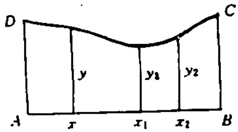


图 1—11

边上任意一点 x 作 AB 的垂线交 $\overset{\frown}{CD}$ 于一点，这个垂线段的长 y 也称作"高"，当点 x 在 AB 上移动时，这个"高"是变化的.

在一定的过程中，往往涉及若干个量，其中有的量总保持一定数值不变，我们称它为常量或常数；而有的量是在不断变化着的，即可取不同数值的，我们称它为变量或变数.

例如，图 1—10 中的矩形的高 y 这个量，在点 x 于 AB 边上移动的过程中只取相同的数值，它是个常量；而图 1—11 中曲边梯形的高 y 随 AB 边上点 x 的移动而取不同的数值，它是个变量.

又如，在自由落体运动中，$s=\frac{1}{2}gt^2$，其中的重力加速度 g 在同一地点是个常量，而下落的时间 t 和下落的路程 s 都是变量.

我们说一个量是常量还是变量，总是与过程密切相关的. 同样是讲"高"，对于矩形来说是个常量，而对于曲边梯形来说就是个变量了. 又如，考虑在一天内或某一月内的某种商品的销售问题，商品的单价可能是稳定的，可视为常量，而销售量及销售额会随时间的延长而增加，故销售量和销售额均为变量. 然而，如果在一段较长时间内（如一年或更长时间）考察，商品的单价往往是有起伏的，那么，它就是个变量了.

我们常用字母 a、b、c、m、n、k、l 等表示常量，用字母 x、y、z、u、v、s、t 等表示变量.

2. 函数概念

定义 2 设在某一过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某个范围内的每一确定的值，按照某个对应法则，变量 y 有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

其中 x 叫做自变量，其取值范围叫做函数的定义域，记作 D_f 或 D. y 是

随 x 的变化而变化的，叫做因变量.

可见，函数是一种特殊的映射. 当 X 和 Y 都是数集时，映射 $f:X\to Y$ 就是一个函数：$y=f(x)$. 它要求对于 X 中的每一个元素 x，都要有 Y 中的唯一元素 y 与之对应. 这也叫做"y 是 x 的单值函数".

这里的 $y=f(x)$，仅仅表明 y 是 x 的函数. 字母"f"不是代表数，而是代表一个对应法则，是个函数符号. 其实，我们也可用别的字母如"F"、"φ"或"g"等来表示对应法则，这样，"y 是 x 的函数"也可记作 $y=F(x)$、$y=\varphi(x)$或 $y=g(x)$，甚至可记作 $y=y(x)$. 至于对应法则的具体内涵，完全由具体函数来体现. 例如，例 3 中的映射表示的函数为 $y=\varphi(x)=x^2$，例 4 的映射表示的函数为 $r=\psi(z)=\frac{1}{2}z$.

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取某定值 $x_0\in D_f$ 时，对应的因变量 y 的值称作函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 y_0、$f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$. 如果我们建立以 x 为横坐标、y 为纵坐标的平面直角坐标系，那么，这样的数对(x_0,y_0)就确定了 xoy 平面上的一点；当 x 取遍 D_f 的各个数值时，所有这样的数对所对应的平面上的点的集合便形成了一个图形，叫做函数 $y=f(x)$的图形. 我们又称所有函数值的集合为函数的值域，常用字母 W_f 表示.

如果自变量 x 在定义域 D_f 内任取一点，对应了因变量 y 的两个或两个以上的值(显然，这种对应关系不是映射)，则称 y 为 x 的多值函数. 例如，在平面直角坐标系中，圆心在原点、半径为 r 的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，这个方程确定的函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，$x\in[-r,r]$，当 x 取 $-r$ 或 r 时，对应的函数值都只有一个，但当 x 取开区间$(-r,r)$内的任一数值时，对应的函数值就有两个，所以它是多值函数.

如果没有特别说明，本书中提到的函数均指单值函数.

上面的多值函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，可以把它分成两个单值函数：

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\ y=-\sqrt{r^2-x^2}.$$

关于函数的定义域，分两种情形，一种是在实际问题中，函数的定义域是事先已经明确给定或由问题的实际意义所确定的；一种是只给出函数的解析式而不考虑其实际意义. 对于后一种情形，我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数值.

例 5 设 Q 为某种商品的需求量，P 为价格，且 $Q=30-5P$，求此函数的定义域.

解 因为价格和需求量均为非负的，故 $P\geqslant 0$ 且 $30-5P\geqslant 0$，因此得 $0\leqslant P\leqslant 6$. 即函数的定义域为 $[0,6]$.

例 6 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{|x|-1}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，则必须满足

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ |x|-1\neq 0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq\pm 1.\end{cases}$$

故函数的定义域 $D=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

例 7 求函数 $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，则必须

$$\begin{cases}x\neq 0\\ 1+\dfrac{1}{x}\neq 0\\ 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\neq 0,\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq -1,x\neq 0\\ x\neq -\dfrac{1}{2},x\neq -1,x\neq 0.\end{cases}$$

故函数的定义域

$$D=(-\infty,-1)\cup\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty).$$

例 8 求函数 $y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}x$ 的定义域.

解 要使函数有意义，则必须

$$\begin{cases}x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}x>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x>0\\ 0<x<1.\end{cases}$$

故函数的定义域 $D=(0,1)$.

例 9 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x)$ 的定义域.

解 要使函数有意义，则必须

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant 1\\ 4-x>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 5\\ x<4.\end{cases}$$