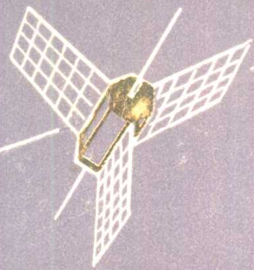

暴雨文集

BAOYU WENJI

1978

吉林人民出版社

暴 雨 文 集

《暴雨文集》编委会 编

吉 林 人 民 出 版 社

暴 雨 文 集

《暴雨文集》编委会 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米16开本 16½印张 衬页2 373,000字

1980年4月第1版 1980年4月第1次印刷

印数：1—6,300册

书号：13091·46 定价：2.65元

目　　录

湿斜压大气的天气动力学问题

谢 义 炳

（北京大学地球物理系）

根据近年来国内降水，尤其是暴雨分析预报的实践[1]、[2]，我们感到现代气象学中，水汽对大气运动和天气系统的发生、发展的作用还没有得到应有的注意。下面提出开展湿斜压大气天气动力学研究的一些具体意见。

一、湿空气的能量守恒定律及其某些应用

湿空气质点或单位质量湿空气的运动方程和绝热方程作如下形式：

$$\frac{du}{dt}-fv=-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt}+fu=-\alpha\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dw}{dt}+g=-\alpha\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$c_p\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}=-L\frac{dq_s}{dt}$$

q_s为质点的凝结饱和比湿。可合并，取$\partial p/\partial t=0$，注意$w=dz/dt, V^2=u^2+v^2+w^2$，得

$$\frac{d}{dt}(c_pT+gz+Lq_s+\frac{V^2}{2})=0$$

或

$$E_t=c_pT+gz+Lq_s+\frac{V^2}{2}=常值 \qquad (1)$$

即湿绝热过程中总能量守恒定律。或引用总温度 T_t，则

$$T_t=T+\frac{gz}{c_p}+\frac{Lq_s}{c_p}+\frac{V^2}{2c_p}=常值 \qquad (2)$$

即湿绝热过程中总温度守恒定律。总能量和总温度守恒定律是早就以某种形式提出了的[3]。

由于$V^2/2$项较小，一般加以忽略，近似地，

$$E_\sigma=c_pT+gz+Lq_s\approx常值$$

$$T_\sigma=T+\frac{gz}{c_p}+\frac{Lq_s}{c_p}\approx常值$$

这是作为近似关系来考虑的。最好还是把（1）和（2）式写成

$$E_t = E_\sigma + \frac{V^2}{2} = 常值 \tag{3}$$

$$T_t = T_\sigma + \frac{V^2}{2c_p} = 常值 \tag{4}$$

E_σ 可以称为总湿位能，T_σ 可以称为总湿位温。

传统著作中和教科书〔4〕中称

$$c_v T + gz = 全位能（干空气）$$

而把全位能的变化和动能的变化联系起来。全位能的两项相加只是考虑了内能和位能之和。一个单位空气柱里的全位能是

$$\int_0^\infty (c_v T + gz)\ \rho dz = \frac{c_p}{g}\int_0^{p_0} T d p$$

根据我们上面从运动方程和绝热方程的统一考虑，在干绝热过程中单位质量的总位能应当是

$$c_p T + gz = c_v T + RT + gz = 总位能 \tag{5}$$

单位空气柱里的总位能应当是

$$\int_0^\infty (c_p T + gz)\ \rho dz = \frac{c_p + R}{g}\int_0^{p_0} T d p \tag{6}$$

如在（1）式中略去 Lq_s 项，即考虑干空气，并改写成

$$c_v T + RT + gz + \frac{V^2}{2} = 常值$$

或

$$c_v T + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = 常值 \tag{7}$$

在水力学中的能量守恒定律是

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = 常值 \tag{8}$$

（8）式中 p/ρ 是压力头，gz 是高度头，$V^2/2$ 是速度头。水力学中因为没有因比容变化而产生的温度变化，所以没有（7）式中第一项。由（7）和（8）式相互比较，可以看到传统著作和教科书中省略了 RT 或 $p\alpha$ 项似是不正确的。同时，由下述的讨论，可以看出我们作出这种改正，才能与其他考虑一致。

同理，湿绝热过程中的总湿位能是

$$E_\sigma = c_p T + gz + Lq_s$$

但不是常值。同理，总湿位温

$$T_\sigma = T + \frac{gz}{c_p} + \frac{Lq_s}{c_p}$$

也不是常值。单位湿空气柱里的总湿位能是 E_σ 的铅直积分。我们这里用“总”字而不用“全”字，是沿用能量天气学的命名，并有别于传统著作和教科书中的命名。

地转运动方程在等压面，等熵面，和湿熵面分别作

$$f v=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p(gz), \qquad f u=-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p(gz) \tag{9}$$

$$f v=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\theta(c_pT+gz), \qquad f u=-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_\theta(c_pT+gz) \tag{10}$$

$$f v=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\theta se}(c_pT+gz+Lq_s), f u=-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\theta se}(c_pT+gz+Lq_s) \tag{11}$$

一般称 gz 为位势，称 c_pT+gz 为焓或等熵流函数。根据(9)、(10)、(11)式，也可以称 gz 为等压流函数，称 c_pT+gz 为等熵流函数，$c_pT+gz+Lq_s$ 为等湿熵流函数。

热成风方程一般作

$$f\frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_p, \qquad f\frac{\partial u}{\partial p}=\frac{R}{p}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p$$

在干斜压大气中，用 θ，T 的关系代入，得

$$f\frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{R}{p_{00}^k}p^{k-1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_p, \qquad f\frac{\partial u}{\partial p}=\frac{R}{p_{00}^k}p^{k-1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_p \tag{12}$$

在湿斜压大气中，用 θ_{se}，T 的关系代入，得

$$\begin{aligned} f\frac{\partial v}{\partial p}&=-\frac{R}{p_{00}^k}p^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p(\theta_{se}e^{-Lq_s/c_pT}) \\ f\frac{\partial u}{\partial p}&=\frac{R}{p_{00}^k}p^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p(\theta_{se}e^{-Lq_s/c_pT}) \end{aligned} \tag{13}$$

(13)式可以称为湿斜压大气中的热成风方程，或湿热成风方程。如将(13)式中的 e 的指数项展开，只取一项，则(13)式简化为

$$\begin{aligned} f\frac{\partial v}{\partial p}&\approx-\frac{R}{p_{00}^k}p^{k-1}\left(\frac{\partial\theta_{se}}{\partial x}\right)_p, \\ f\frac{\partial u}{\partial p}&\approx\frac{R}{p_{00}^k}p^{k-1}\left(\frac{\partial\theta_{se}}{\partial y}\right)_p \end{aligned} \tag{14}$$

这种简化的误差并不大于地转平衡假定的误差。能量天气学中已广泛地在等压面上绘制等 θ_{se} 线或等 T_σ 线。

不考虑运动方程，即不考虑加速，即考虑稳定、缓慢的运动，由热力学方程得

$$\theta_{se}=\theta e^{Lq_s/c_pT}=\text{常数} \tag{15}$$

而如没有加速运动，总能量 E_t 变为 E_σ，T_t 变为 T_σ。所以 θ_{se} 和 T_σ 或 E_σ 的保守性是一样的，都不如 T_t 或 E_t。

等熵面上的等焓线，可以看成是等熵面和等焓面的交线。干绝热过程中，如没有加速运动，空气质点的熵和焓都不变，所以等熵面上的地转流线和等焓线是叠合的。在湿绝热过程中，以 θ_{se} 代替 θ，$c_pT+gz+Lqs$ 代替 c_pT+gz，可以得到类似的结论。

二、对 流 性 降 水

1．铅直层结不稳定性和对流发展

能量方程是一个算帐的方程，单独地不能揭示运动的发展。对流运动需要用温度或能量的铅直层结结合能量方程一起考虑。

对(15)式作对数微分，并引用静力平衡假定，得

$$\frac{1}{\theta_{se}}\ \frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}=\frac{1}{T}\ \frac{\partial}{\partial p}\left(T+\frac{gz}{c_p}+\frac{Lq_s}{c_p}\right)=\frac{1}{T}\ \frac{\partial T_\sigma}{\partial p} \tag{16}$$

因为 θ_{se}，T 都是正数，所以 $\partial\theta_{se}/\partial p$和$\partial T_\sigma/\partial p$ 同号并成比例，但比例系数随 θ_{se}，T而变。

由 θ_{se} 的铅直分布得到的对流性不稳定性即对流发展的结论，完全适用于 T_σ或 E_σ 的铅直分布。但 T_σ 或 E_σ 是三项之和，使用时有一定程度的方便处。

2．对流中微观运动的宏观特征

对流运动中包含有极为复杂的微观和半宏观运动。这些运动的全部理解是相当困难的，还有待新的探测技术、新的探测理论和新的微观和半宏观的运动理论。但这些微观运动的某些宏观特征，例如对流区等 θ_{se} 线或等 T_σ 线上凹下凸的分布等，则当前就可以在一定程度内加以阐明。

考虑湿空气向上运动过程中有侧向混合。先考虑一维扩散，二维扩散可以用类似方法处理。水汽连续方程作如下形式：

$$\frac{\partial q_s}{\partial t}=-w\frac{\partial q_s}{\partial z}+D\frac{\partial^2 q_s}{\partial x^2} \tag{17}$$

这里D是侧向扩散系数，w是铅直上升速度，暂取作常数。如运动是定常的，则得

$$\frac{\partial q_s}{\partial z}=\frac{D}{w}\ \frac{\partial^2 q_s}{\partial x^2}=D'\frac{\partial^2 q_s}{\partial x^2} \tag{18}$$

$$D'=D/w$$

(18)式的解是

$$q_s=\frac{A}{z^{1/2}}e^{-x^2/4D'z} \tag{19}$$

(19)式是x方向对称的水汽密度正态分布曲线。在$z=\infty$处，$q_s=0$；另峰值随z减小。积分常数A可由下法确定。令

$$M=\int_{-\infty}^{\infty}q_s dx$$

即整层（摩擦层顶）的水汽扩散量，又取

$$\xi^2=x^2/4D'z$$

则

$$2\xi d\xi=\frac{2x dx}{4D'z},\ dx=2(D'z)^{\frac{1}{2}}d\xi$$

因此

$$M=2AD'^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi^2}d\xi=2A\ (\pi D')^{\frac{1}{2}}$$

即

$$A=\frac{M}{2}(\pi D')^{-\frac{1}{2}}$$

因此，得

$$q_s = \frac{M}{2(\pi D'z)^{\frac{1}{2}}} e^{-x^2/4D'z} \tag{20}$$

这里，M 和 D' 都需要由观测值来加以确定。不过(20)式还是粗略地说明了对流区水汽的空间分布情况。对流区附近，T和 gz 的准水平变化是小的，因而 T_σ 的空间分布状态也是近于正态的。这可能为对流区等 T_σ 线或等 θ_{se} 线上凹下凸，上下近于打通的宏观特征提供一个解释。

当然，这种阐述是极为粗略的。严谨完整的解释需要考虑非定常情况，w 也不是常值。这就需要引进运动方程、连续方程、湿绝热方程，还要考虑地面蒸发和液态水的降落，以及对流微结构等一系列问题。不过上述粗略考虑还是阐述了整个问题的某个侧面，因而有助于整个问题的解决，也许还能帮助实际工作者理解所绘制的结果。

三、湿力管，湿有效位能

对流性降水只涉及到铅直方向上 θ_{se} 或 T_σ 的分布问题。大面积降水尤其是暴雨，则涉及到 θ_{se} 或 T_σ 的水平或准水平（等压面）的分布问题，也就是湿斜压大气有效位能的释放问题，或能量天气学中能量锋的生消问题。有效位能的观点应当扩充到湿斜压大气，即湿有效位能。

将单位质量的总能量对整个大气积分

$$\begin{aligned}[E_t] &= \iint_{s\,0}^{\infty}\left(c_p T + gz + Lq_s + \frac{V^2}{2}\right)\rho dz ds \\ &= \frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0}\left(T + \frac{gz}{c_p} + \frac{Lq_s}{c_p} + \frac{V^2}{2c_p}\right)dp ds \\ &= \frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0} T_\sigma\, dp ds + \frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0}\frac{V^2}{2c_p} dp ds \end{aligned} \tag{21}$$

这里 s 表示整个水平面或等压面，ds 是面积元。T_σ 不是 p 的单纯函数，即等 T_σ 面和等 p 面是相交的，其相交所构成的管子是广义的力管，可以称之为湿斜压大气力管，或简称湿力管。力管的概念源自环流理论，用于考虑环流加速[5]。这里自能量观点引出，也许改名能管较恰当些。

如经过湿绝热过程由将状态(1)变到状态(2)，因为总能量不变，所以

$$\begin{aligned} &\frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0} T_{\sigma 1}\, dp ds + \frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0}\frac{V_1^2}{2c_p} dp ds \\ = &\frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0} T_{\sigma 2}\, dp ds + \frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0}\frac{V_2^2}{2c_p} dp ds \end{aligned}$$

或

$$\frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0}(T_{\sigma 1} - T_{\sigma 2}) dp ds = \frac{c_p}{g}\iint_{s\,0}^{p_0}\frac{V_2^2 - V_1^2}{2c_p} dp ds \tag{22}$$

(22)式的物理意义是，如经过湿绝热过程由状态(1)到状态(2)，若湿力管场变弱，则总湿位能减少，而总动能增加。若经过湿绝热过程，等 T_σ 面和等 p 面变成平行，则湿力管为零，(21)式中第一项即总位能项最小，而第二项即动能项最大。这事实上是有效位能的释放过程。湿斜压大气的有效位能可以称为湿有效位能。等压面上等 T_σ 线或等 θ_{se} 线的密集揭示湿力管场的强度。能量锋即湿力管场强度大的区域。

干斜压大气中曾有人用下述方法论证有效位能的大小[6]。

单位干空气柱的全位能是：

$$\frac{1}{g}\int_0^{p_0}(c_v T+gz)\,dp=\frac{c_p}{g}\int_0^{p_0}T\,dp$$

$$\approx\frac{c_p}{(1+k)gp_{00}^k}\int_0^{\infty}p^{1+k}d\theta$$

而干斜压大气的有效位能是

$$A_d\approx\frac{c_p}{(1+k)gp_{00}^k}\iint_{s\,\theta\,0}^{\infty}(p^{1+k}-\overline{p}^{1+k})\,d\theta ds$$

这里 s 是 θ 面的总面积，ds 是面积元。$\overline{p}$ 是等 θ 面上的气压平均值。根据第一节讨论，这是不对的。单位干空气柱的总位能应是

$$\frac{1}{g}\int_0^{p_0}(c_v T+gz)dp\approx\frac{c_p}{gp_{00}^k}\int_0^{\infty}p^{1+k}d\theta$$

而干斜压大气的有效位能应是

$$A_d\approx\frac{c_p}{gp_{00}^k}\iint_{s\,0}^{\infty}(p^{1+k}-\overline{p}^{1+k})\,d\theta ds \tag{23}$$

湿斜压大气也可以作类似处理，即

$$\frac{1}{g}\int_0^{p_0}(c_v T+gz+Lq_s)\,dp=\frac{c_p}{g}\int_0^{p_0}T_\sigma dp$$

$$\approx\frac{c_p}{gp_{00}^k}\int_{\theta_{se0}}^{\infty}p^{1+k}e^{-Lq_s/c_pT}\,d\theta_{se}$$

$$\approx\frac{c_p}{gp_{00}^k}\int_{\theta_{se0}}^{\infty}p^{1+k}d\theta_{se}$$

这里的 e 的指数函数展开为级数后，只取了一项，以便于与(23)式比较，并便于应用。由于有效位能的估计并不准确，这种近似可能是允许的。湿斜压大气的有效位能或湿位能是

$$A_m\approx\frac{c_p}{gp_{00}^k}\iint_{s\,\theta_{se0}}^{\infty}(p^{1+k}-\overline{p}^{1+k})\,d\theta_{se}ds \tag{24}$$

这里 θ_{se0} 是 $p=p_{00}$ 处的 θ_{se} 值。

等压面上的等 θ_{se} 线或等 T_σ 线能较好地表示湿力管和湿有效位能，今后在夏半

年低层等压面图上似应当以等 T_σ 线或等 θ_{se} 线代替等T线。

整个大气不可能都是饱和的，所以本节中考虑对整个大气积分是有其不严谨处的。但是可以理解为对饱和空气的有限空间的积分。有效位能的现代理论虽然考虑整个大气，但是在一般天气分析预报中应用时，却只考虑有限空间。

四、湿急流——低空急流的水汽输送

低空急流对水汽的输送作用，现在已经受到相当大的注意。低层急流的成因一般归之于高低层湍流动量交换。从总能量守恒原则似可以提出另一种观点。设一湿空气质点或单位质量湿空气按湿绝热过程上升，因为总能量守恒，它将停留在原先所在的等总能量 E_t 面或总温度 T_t 面上，只在这个面上运动。如以 1 表示起始时刻的特征，2 表示后一时刻的特征，如起始时刻是静稳的，则

$$c_pT_1+gz_1+Lq_{s1}=c_pT_2+gz_2+Lq_{s2}+\frac{V_2^2}{2}$$

或

$$c_pT_{\sigma1}=c_pT_{\sigma2}+\frac{V_2^2}{2} \tag{25}$$

即湿空气质点在湿不稳定大气中按湿绝热过程上升，将得到加速，增加了动能，而总湿位能 c_pT_σ 将减少，即转向较低的 T_σ 区。这种观点，英国人曾用于解释行星尺度的高层急流[7]。看来，用于解释次天气尺度的低层急流也许更好些。这种观点的意义是：湿空气在湿不稳定大气中上升，将得到加速。在较晚时刻到达某地后，将给该地带来水汽和风，而不是低空急流输送了水汽。湿急流将导致湿力管场。这可能是湿急流中心左前方出现暴雨的原因。

在我国探空网密集地区，也许可能用事实揭示湿空气上升，转向和加速的过程，即湿急流的形成过程。这至少可以阐明某一种低空急流形成的机制，也可能阐明湿斜压有效位能的集中过程。

五、湿斜压不稳定性理论
——导致大面积暴雨天气系统发生的一种机制

气象学中一般用斜压不稳定性理论解释中纬度西风带天气系统的发生发展，并用诊断分析判断位势倾向和铅直运动，因而说明了有效位能的释放问题。斜压不稳定性理论阐明在一般的西风带常见的温度层结情况下，不稳定性最大的波长约4000公里。这种研究结果不能说明与1000公里左右次天气尺度有关的大面积暴雨。

斜压不稳定性理论[8]所考虑的是干燥大气，假定了干绝热过程。考虑潮湿大气，引进潜热的影响，可以缩短波长。如考虑可逆的湿绝热过程，则证明至为简单。

湿绝热过程方程可以写成

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+\omega\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{\alpha}{c_p}\omega=-\frac{L}{c_p}\frac{dq_s}{dT}\cong-\frac{L}{c_p}\frac{\partial q_s}{\partial p}\omega$$

或

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=-\left(\frac{T}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}+\frac{Lq_s}{c_p}\right)\omega \tag{26}$$

$$=-T\left(\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}\right)\omega=-\frac{\partial T_\sigma}{\partial p}\omega$$

一般干绝热斜压不稳定性理论用的是干绝热方程，即

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=-T\left(\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)\omega$$

而湿绝热斜压不稳定性的研究只不过是以$\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}$代替$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}$罢了。其他的方程和运算方法全部都可以照搬。两层准地转模式的干斜压不稳定性理论的结果，最大不稳定性的波长与层结因子$\sigma=-\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}$的平方根成比例，即

$$L_d\sim\left(-\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

因此，湿斜压大气中最大不稳定性的波长L_m

$$L_m\sim\left(-\frac{\alpha}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{\alpha}{T}\frac{\partial T_\sigma}{\partial p}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

即与湿层结因子

$$\sigma_m=-\frac{\alpha}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}=-\frac{\alpha}{T}\frac{\partial T_\sigma}{\partial p}$$

的平方根成正比。

夏季水汽丰富时，尤其在已有对流云带发展的地区（如准静止锋），$-\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}$远小于$-\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}$，如$-\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}$仅为$-\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial p}$的20%，则$L_m$将不到$L_d$的一半。实际上有时$-\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}$可以接近于零。在这种情况下，$L_m$将会更小。这可能揭示了导致夏季大面积暴雨的1000公里左右次天气尺度系统的发生机制。当然上述讨论还可以扩张到假绝热过程，和以原始方程代替准地转模式。

六、湿位涡度守恒定律以及湿倾向方程和湿ω方程

为了进行定量计算和设计数值预报模式，写出湿位涡度守恒定律，湿倾向方程和湿ω方程似是必要的。为了阐明问题，仍先用可逆的湿绝热过程。为简便计，引用矢量符号。

基本方程组是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}+\omega\frac{\partial\vec{V}}{\partial p}+f\vec{k}\times\vec{V}=-\nabla\phi \tag{29}$$

$$\nabla\cdot\vec{V}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0 \tag{30}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\frac{\partial\phi}{\partial p}+\sigma_m\omega=0 \tag{31}$$

这里 ϕ 是位势，$\sigma_m=-\frac{\alpha}{\theta_{se}}\frac{\partial\theta_{se}}{\partial p}=-\frac{\alpha}{T}\frac{\partial T_\sigma}{\partial p}$。

如采用准地转模式，和地转流函数 $\psi=\phi/f_0$，则基本方程组作如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)=-\vec{V}_\psi\cdot\nabla(\nabla^2\psi+f)+f_0\frac{\partial\omega}{\partial p} \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)=-\vec{V}_\psi\cdot\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{\sigma_m}{f_0}\omega \tag{33}$$

(32)式 $+\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma_m}$ (33)式，得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}_\psi\cdot\nabla\right)q=0 \tag{34}$$

$$q=\nabla^2\psi+f+f_0^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sigma_m}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) \tag{35}$$

q 可以称作湿位涡度，(34) 式即湿位涡度守恒定律。这是湿斜压大气准地转模式的基础。

采用两层准地转模式，则方程组作如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_1)=-\vec{k}\times\nabla\psi_1\cdot\nabla(\nabla^2\psi_1+f)+\frac{f_0}{\triangle p}\omega_2 \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_3)=-\vec{k}\times\nabla\psi_3\cdot\nabla(\nabla^2\psi_3+f)-\frac{f_0}{\triangle p}\omega_2 \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1-\psi_3)=-\vec{k}\times\nabla\psi_2\cdot\nabla(\psi_1-\psi_3)+\frac{\sigma_m\triangle p}{f_0}\omega_2 \tag{38}$$

这里$\psi_2=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_3)$，(36)+(37)式，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi_1+\nabla^2\psi_3)=-\vec{k}\times\nabla\psi_1\cdot\nabla(\nabla^2\psi_1+f)-\vec{k}\times\nabla\psi_3\cdot\nabla(\nabla^2\psi_3+f) \tag{39}$$

取$\lambda^2=f_0^2/\sigma_m(\triangle p)^2$，(36)－(37)式－$2\lambda^2$(38)式，得

$$\frac{\partial}{\partial}(\nabla^2-2\lambda^2)(\psi_1-\psi_3)=-\vec{k}\times\nabla\psi_1\cdot\nabla(\nabla^2\psi_1+f)+\vec{k}\times\nabla\psi_3\cdot\nabla(\nabla^2\psi_3+f)+2\lambda^2\vec{k}\times\nabla\psi_2\cdot\nabla(\psi_1-\psi_3) \tag{40}$$

∇^2(38)－(36)+(37)式，得

$$(\nabla^2-2\lambda^2)\omega_2=\frac{f_0}{\triangle p\sigma_m}\{\nabla^2[\vec{k}\times\nabla\psi_2\cdot\nabla(\psi_1-\psi_3)]-\vec{k}\times\nabla\psi_1\cdot\nabla(\nabla\psi_1+f)+\vec{k}\times\nabla\psi_3\cdot\nabla(\nabla^2\psi_3+f)\} \tag{41}$$

(39)，(40)和 (41) 式即湿斜压大气的倾向方程和 ω 方程。这里仍然考虑了可逆湿绝热过程。如考虑假绝热过程时，方程式要复杂些。

次天气尺度较小，准地转模式的应用有些限制，用原始方程组应当好些。但准地转

模式的应用和讨论可以使某些观点明确化。

具体计算或预报时，还会有不少技术性问题，应当在工作中逐步加以克服。

七、干、湿斜压大气中的重力波——自由振动和地形强迫振动

一般用下述（x，z，t）坐标系的闭合方程组考虑小尺度重力波。X轴垂直地形轴如山脉或海岸。水汽是没有饱和的，过程是绝热的。

$$
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}+\alpha\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{dw}{dt}+\alpha\frac{\partial p}{\partial z}+g=0\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&P\alpha=RT\\
&c_p\frac{dT}{\partial t}-\alpha\frac{\partial p}{\partial t}=0
\end{aligned}
\qquad (42)
$$

引进小扰动概念，即

$$
\begin{aligned}
&u=U(z)+u'(x,z,t)\\
&p=\overline{p}(z)+p'(x,z,t)\\
&w=w'(x,z,t)\\
&\alpha=\overline{\alpha}(z)+\alpha'(x,z,t)
\end{aligned}
\qquad (43)
$$

U（z）表示大气的斜压性。考虑

$$\overline{\alpha}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+g=0$$

$$\alpha'\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}=\quad g\frac{\alpha'}{\alpha}=-g\frac{\alpha'+\overline{\alpha}-\overline{\alpha}}{\alpha}=-g\frac{\theta-\overline{\theta}}{\overline{\theta}}=g\gamma\triangle z$$

$$\gamma=\frac{1}{\theta}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\triangle z\cong\frac{d}{dt}(\triangle z)=w'$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\overline{\alpha}}{\partial z}<\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)\Big/\frac{\partial p'}{\partial x}$$

可以得到下述扰动方程组（为了简化省去“′”号）

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+w\frac{\partial^2 U}{\partial z}+\overline{\alpha}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z}=0\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w+\overline{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial p}{\partial z}+g\gamma w=0
\end{aligned}
\qquad (44)
$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

大气中可能有两种重力波，一种是自由振动或运行的重力波；另一种是地形强迫振动或驻止的重力波。实际观测到的重力波可以看成是两种波的线性叠加，即

$$\begin{aligned}
u &= u_{\mathrm{I}}+u_{\mathrm{II}}=\psi_{\mathrm{I}}(z)e^{ik_{\mathrm{I}}(x-ct)}+\psi_{\mathrm{II}}(z)e^{ik_{\mathrm{II}}x}\\
w &= w_{\mathrm{I}}+w_{\mathrm{II}}=\phi_{\mathrm{I}}(z)e^{ik_{\mathrm{I}}(x-ct)}+\phi_{\mathrm{II}}(z)e^{ik_{\mathrm{II}}x}\\
p &= p_{\mathrm{I}}+p_{\mathrm{II}}=\pi_{\mathrm{I}}(z)e^{ik_{\mathrm{I}}(x-ct)}+\pi_{\mathrm{II}}(z)e^{ik_{\mathrm{II}}x}
\end{aligned}\tag{45}$$

将(45)式代入(44)式，再作一些代数运算，得

$$\phi_{\mathrm{I}}''+\left[\frac{gr}{(U-c)^2}-\frac{U''}{U-c}-k_{\mathrm{I}}^2\right]\phi_{\mathrm{I}}=0\tag{46}$$

$$\phi_{\mathrm{II}}''+\left[\frac{gr}{U^2}-\frac{U''}{U}-k_{\mathrm{II}}^2\right]\phi_{\mathrm{II}}=0\tag{47}$$

注意，这里的“$''$”符号是代表对 z 的二次微商。(46)式是自由振动或运行的重力波随 z 变化的支配方程。(47) 式是地形强迫振动或驻止的重力波的振幅随 z 变化的支配方程。(46)和(47)式可以写成

$$\phi_{\mathrm{I}}''+(l_{\mathrm{I}}^2-k_{\mathrm{I}}^2)\phi_{\mathrm{I}}=0\tag{48}$$

$$\phi_{\mathrm{II}}''+(l_{\mathrm{II}}^2-k_{\mathrm{II}}^2)\phi_{\mathrm{II}}=0\tag{49}$$

$$l_{\mathrm{I}}^2=\frac{gr}{(U-C)^2}-\frac{U''}{U-C}\tag{50}$$

这里，

$$l_{\mathrm{II}}^2=\frac{gr}{U^2}-\frac{U''}{U}$$

如 r，U，都是常数，则 $U''=0$，l_{I}^2 和 l_{II}^2 都是常数。另外，如 $l_{\mathrm{I}}^2>k_{\mathrm{I}}^2$，$l_2^2>k_{\mathrm{II}}^2$ 则(48)，(49)式都是波动方程，有标准解。由于 $k_{\mathrm{I}}^2=\frac{4\pi^2}{L_{\mathrm{I}}^2}$，$k_{\mathrm{II}}^2=\frac{4\pi^2}{L_{\mathrm{II}}^2}$，$l_{\mathrm{I}}^2$ 和 l_{II}^2 给定了可能出现的波动的最短波长。

观测事实揭示 r，U 或 l_{I}^2，l_{II}^2 都不是常数，并且常不能以简单数学函数表示其随 z 的变化。因此 (48)，(49) 式只能求数值解。对于(47)式或(49)式已有相当详细的研究[9]。不同的l_2^2的分布可以得到各种各样包括转子(x,z 面上的闭合流场)的重力驻波。(46)或(48)式可以作类似的处理。

在展开这方面的工作前，似需要指出下述几点：

1．除了重力驻波外，还存在运行的重力波。应当考虑两者叠加时可能出现振幅增大或减小的各种情况。

2．水汽饱和时，取导致(14)式的类似近似，则

$$\alpha\cong R\theta_{se}p^{k-1}/p_{00}^{k}\tag{51}$$

并以 γ_m 代替 γ，这里

$$\gamma_m=\frac{1}{\theta_{se}}\frac{\partial\overline{\theta}_{se}}{\partial z}$$

这将缩小 l_{I}^2 和 l_{II}^2。为了(48)和(49)式得到波动解，k_{I}^2 和 k_{II}^2 必须缩小，即波长必须增大。这意味着饱和大气中观测到的重力波波长应当比干燥大气中观测到的重力波波长长些。详细的计算和与实际观测现象细致分析间的相互比较，可能检定这种动力效应。

3．计算时按标准的数学物理方法，以驻波适应下边界条件。求解运行波时取零下边界条件，取观测值减去驻波作初始条件。

复杂的地形导致复杂的近地面流场，可采用流体力学通用的方法，以这些复杂的近地面流场的外包线作下边界条件。也可以用富氏级数来求谐波解。

八、干、湿斜压大气中的行星波——自由振动和地形强迫振动

大地形如西藏高原使西风偏向南和北，由于柯氏力的作用将导致地形影响的行星波。这种行星波也是驻波。地形强迫引起的行星驻波和运行的行星波合成观测到的行星波。这里，暂不考虑非绝热过程。细致的研究需要借助于数值计算。但某些物理实质却可用两层准地转模式的对称解来揭示。

假设

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= -U_1 y + \psi_1(x, y, t)\\
\Psi_3 &= -U_3 y + \psi_3(x, y, t)\\
w_2 &= w_2(x, y, t)
\end{aligned}
\tag{52}
$$

F 指标 1,2,3 分别指示250，500和750毫巴面。Ψ 是流函数，ψ 和 w 是扰动值，U_1 和 U_3 取作常数。取 x 轴与大地形的长轴相叠合。如取 $U_2=(U_1+U_3)/2$，则扰动方程作如下形式：

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)+\beta\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=\frac{f_0}{\Delta p}w_2\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2}\right)+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=-\frac{f_0}{\Delta p}w_2\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_1-\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_3=\frac{\sigma\Delta p}{f_0}w_2
\end{aligned}
\tag{53}
$$

假设方程组(53)有下述波动解：

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= A_{\mathrm{I}}(y)e^{ik_{\mathrm{I}}(x-ct)}+A_{\mathrm{II}}(y)e^{ik_{\mathrm{II}}x}\\
\psi_3 &= B_{\mathrm{I}}(y)e^{ik_{\mathrm{I}}(x-ct)}+B_{\mathrm{II}}(y)e^{ik_{\mathrm{II}}x}\\
w_2 &= w_{\mathrm{I}}(y)e^{ik_{\mathrm{I}}(x-ct)}+w_{\mathrm{II}}(y)e^{ik_{\mathrm{II}}x}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

这里Ⅰ指示运行的行星波，Ⅱ指示驻止的行星波。A_{I}，A_{II}，B_{I}，B_{II}，w_{I}，w_{II}表示波动的振幅，都是y的函数。将(54)代入(53)式，经过一些代数运算后，得到

$$
\begin{aligned}
&A_{\mathrm{I}}''+\left(\frac{\beta}{U_1-c}-\frac{U_3-c}{U_1-c}\lambda^2-k_{\mathrm{I}}^2\right)A_{\mathrm{I}}=-\lambda^2 B_{\mathrm{I}}\\
&B_{\mathrm{I}}''+\left(\frac{\beta}{U_3-c}-\frac{U_1-c}{U_3-c}\lambda^2-k_{\mathrm{I}}^2\right)B_{\mathrm{I}}=-\lambda^2 A_{\mathrm{I}}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&A_{\mathrm{II}}''+\left(\frac{\beta}{U_1}-\frac{U_3}{U_1}\lambda^2-k_{\mathrm{II}}^2\right)A_{\mathrm{II}}=-\lambda^2 B_{\mathrm{II}}\\
&B_{\mathrm{II}}''+\left(\frac{\beta}{U_3}-\frac{U_1}{U_3}\lambda^2-k_{\mathrm{II}}^2\right)B_{\mathrm{I}}=-\lambda^2 A_{\mathrm{II}}
\end{aligned}
\tag{56}
$$