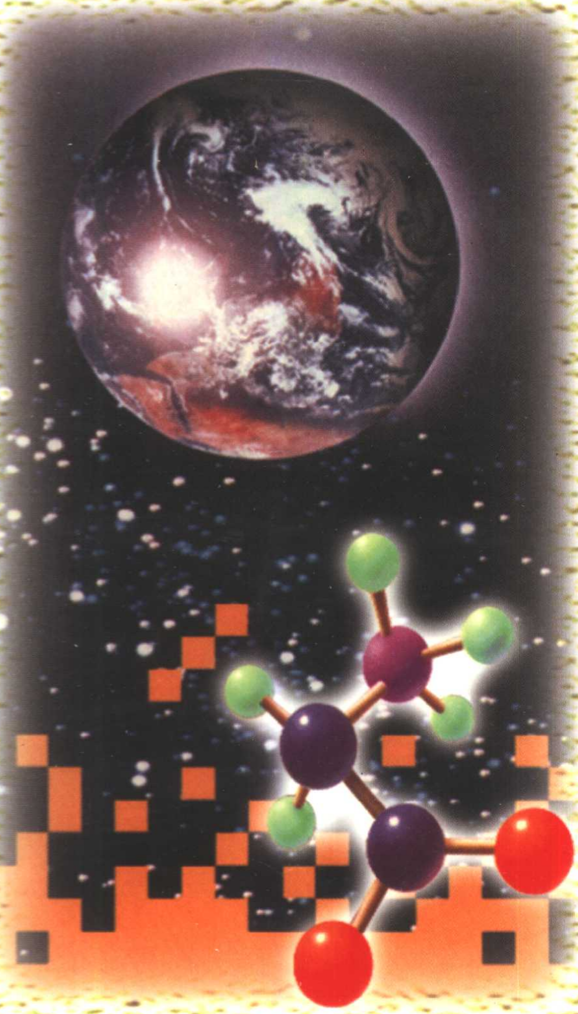
中国科学院研究生教学丛书



线性控制系统理论

——构造性方法

韩京清 许可康 著

科学出版社

中国科学院研究生教学丛书

线性控制系统理论——构造性方法

韩京清　许可康 著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一，是作者多年的研究成果总结.

书中主要介绍以有限步初等算法来完成命题证明和问题求解的新的线性控制系统理论——构造性方法. 该方法可以统一处理线性系统理论中的状态空间法和多项式矩阵法，不仅能使一些复杂的问题得以简化和算法化，而且能解决其他方法不能解决的一些问题.

主要内容包括：多项式矩阵与有理分式矩阵，线性控制系统，线性控制系统的结构性质，线性控制系统的标准型与实现问题，状态反馈系统，动态补偿器等.

本书可供大专院校自动控制专业的高年级学生、研究生、教师阅读，也可作为自动控制领域的工程技术人员、科研人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性控制系统理论——构造性方法/韩京清等著. -北京：科学出版社，2001

（中国科学院研究生教学丛书）

ISBN 7-03-008874-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①韩… ②许… Ⅲ. 线性系统（自动化）-构造性分析 Ⅳ. TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 53943 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2001 年 2 月第一次印刷 印张：13 3/4

印数：1—3 000 字数：307 000

定价：21.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

《中国科学院研究生教学丛书》序

在 21 世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了．相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用．

21 世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量．世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争．而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量．我国要想在 21 世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理，有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务．

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生．当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才．

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我

国研究生教育的首要任务.研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作.由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展.为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作,同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版.希望通过数年努力，出版一套面向21世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书.本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿.这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言，下自成蹊.”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

前　言

自 1960 年第一届国际自控联（IFAC）大会美国年青学者 R. E. Kalman 发表开创性的论文“On the General Theory of Control Systems”以来，关于状态空间方法的论文如雨后春笋般地涌现出来，并逐步建立起了新的“线性控制系统理论”. 在这个过程中，出现了不同学派，开辟了具有各种特色的研究领域. 在这些学派中，著名的有：以“（A，B）-不变子空间”的发现为起点用线性空间理论阐述线性控制系统理论基本问题的 Wonham 的“线性控制系统几何理论”研究；以确立“结构定理”为起点运用多项式矩阵代数工具发展起来的 Wolovich 的“线性控制系统理论多项式矩阵方法”；以“返回差阵”特殊性能来确立“逆 Nyquist 阵列法”，把单变量频率法推广到多变量系统而发展的 Rosenbrock 的“多变量频率法”。这些方法都是用有理函数阵的复平面零极点性质来阐述线性控制系统理论的基本问题的.

20 世纪 70 年代，这些学派相继出版了其专著，作为培养有关专业研究生的基本参考材料而被广泛使用. 80 年代，作为研究生的专业基础教材，出版了像 Kailath 的“Linear Systems”，C. T. Chen（陈启宗）的“Linear System Theory and Design”等内容较综合性的书籍. 然而这些书对各自学派的不同方法基本上只作了并列的介绍，尚没有解开它们之间内在的自然统一性，因此写出的书，风格不统一，重复多，篇幅大.

20 世纪 80 年代，本书作者致力于线性控制系统理论的研究，发现了两类简单而基本的算法——初等坐标变换法”和“矩阵序列结构算法”能够统一处理线性控制系统理论中的“状态空间法”与“多项式矩阵法”，于是就独立地发展了以有限步这种初等算法来完成命题证明和问题求解的新的线性控制系统理论——构造性方法. 进一步，在理论上我们引入了“向量组的最小多项式阵”概念，把状态空间法与多项式阵法的理论基础均统一在向量空间上. 用这种方法来阐述线性控制系统理论的基本问题，所需的数学知识不深，易于理解和掌握，而且避免了重复，能够达到事半功倍的效果.

作为线性控制系统理论研究的一种工具——构造性方法，曾成为我们解决像干扰解耦、稳定解耦、块解耦、特征结构配置、求解多项式阵 Diophantine 方程，以及一般 Morgan 问题等一系列较难问题的有力工具. 比起别的处理方法，构造性方法所具有的最大特点就是方法简洁，算法清楚.

初等坐标变换法和矩阵序列结构算法这两类基本算法，一般来说，并不是计算机上编制数学运算程序的实用算法，而是组成构造性方法的理论算法. 当有些问题尚无稳定的好算法时，这些算法可用来编制计算机运算程序. 特别是关于多项式矩阵运算，国内外目前尚无公认的稳定算法，而矩阵序列结构算法是统一处理各种多项式矩阵运算的最可行的算法. 因此，它已成为由国家自然科学基金重大项目资助完成的“中国控制系统计算机辅助设计软件系统（CADCSC）”中的“多项式矩阵基础运算库”和“多项式矩阵方法子系统”的最根本的算法依据.

本书是在上述研究成果的基础上编写而成的，但它经历了近20年的历程. 1980年前后，我们编写了《线性控制系统理论》、《多变量控制系统理论（多项式矩阵代数方法与频率域方法）》两本讲义，曾先后在延边、广州、哈尔滨、沈阳、合肥、南京、郑州等地讲授过. 之后再把这两本讲义合并补充修改，写出了曾在国内广为流行的新的《线性控制系统理论》讲义. 自1982年起，我们曾给中国科技大学、上海交通大学、中国科学院研究生院、航天工业部502所等单位自动控制专业的研究生，开设“线性控制系统理论——构造性方法”专业基础课长达10年之久. 在这期间对讲义又几经补充修改，编写出研究生用讲义《线性控制系统理论——构造性方法》，一般讲授80学时. 不少研究生曾经以这个课为起点，定题目，完成了硕士论文，而他们的研究成果也为丰富、完善本书的内容作出了贡献.

本书由如下六章组成：第一章作为本书所需要的基本数学基础知识，介绍有关多项式矩阵与有理分式矩阵的内容. 这里将以多项式阵的数值表示和本书中的基本算法之一的矩阵序列结构算法及其在多项式阵和有理分式阵运算中的作用为主介绍有关内容. 这些内容在一般书籍中涉及不多，因此特辟一章予以介绍. 需要进一步了解有关内容的读者，可参阅《线性系统理论代数基础》（韩京清、何关钰、许可康，辽宁科技出版社，1985）一书. 第二章为线性控制系统描述，介绍状态空间、多项式阵、传递函数阵三种描述形式及系统的等价性、对偶关系式等问题. 第三章为线性控制系统的结构性质，介绍线性控制系统理论赖于发展的最基本性质（如能控性、能观性、抗干扰性等），以及与线性控制系统结构有关的性质及其判别条件. 第四章为标准型与实现问题. 这里将用构造性方法的一类基本算法——初等坐标变换法，把系统化成被称为多项式矩阵的相伴矩阵形式的标准型，介绍与之相对应的多项式分解形式传递函数阵和等价的系统的多项式阵描述. 这是沟通三种描述形式的关键. 另外还将介绍标准型与系统结构性质之间的关系及系统的实现问题. 第五章为系统的状态反馈，介绍像极点配置、特征结构配置、观测器、解耦、干扰解耦等问题. 第六章为动态补偿器设计，介绍用求解多项式阵Diophantine方程的方法来解决一系列动态补偿器的设计问题.

为了便于读者理解，我们在书中随各部分内容设有一定数量的例子，因此本书也可作为自习用教材.

在十多年的研究工作中得到了国内许多同行们的支持和帮助. 在本书出版之际，作者向他们表示衷心的谢意.

由于作者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

目　录

第一章　多项式矩阵与有理分式矩阵

在这一章，我们将讲述本书所要用到的多项式矩阵及有理分式矩阵的有关知识. 至于线性控制系统理论所要用到的线性空间等有关知识，这里不作介绍，需要了解这方面知识的读者可参阅一般的《线性代数》教科书. 在线性控制系统理论中经常用到的多项式矩阵及有理分式矩阵，一般书籍中涉及不多，远远满足不了学习本课程的要求. 因此，我们在建立和完善线性控制系统理论的“构造性方法”的过程中，对作为基础知识的多项式矩阵及有理分式矩阵理论增添了不少新的内容. 学好这一章对理解掌握本书内容很有意义，为此，特辟单独一章予以介绍. 欲了解掌握更多更完整的内容，可参阅辽宁科技出版社于1985年出版的由我们与上海交大何关钰编著的《线性系统理论代数基础》中的第四章.

1.1　多　项　式

1.1.1　多项式

设 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 是 $n+1$ 个实数，又设 s 是一个抽象符号，则关系式

$$p(s) = a_n + a_{n-1}s + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n \tag{1.1.1}$$

称之为关于 s 的一个*实系数多项式*. 实系数多项式全体记为 $\mathbf{R}[s]$. 按矩阵乘法，上式也可写成

$$p(s) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^n \\ s^{n-1} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & \cdots & s^{n-1} & s^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \\ s^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^n & s^{n-1} & \cdots & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{1.1.2}$$

我们把向量 $[a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0]$（或其转置）称做按升幂展开的*系数向量*，而 $[a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n]$（或其转置）称做按降幂展开的*系数向量*.

若 $a_0 \neq 0$，则称 a_0 为 $p(s)$ 的*首项系数*，n 称做 $p(s)$ 的*次数*，记为 $\partial p(s) = n$. 若 $a_0 = 1$，则称 $p(s)$ 为*首一多项式*.

如果 $a_0 \neq 0$，且 $a_0 \neq 1$，那么 $p(s)$ 可以*首一化*，即记

$$a_i' = a_i / a_0, \qquad i = 0, 1, \cdots, n,$$

$$p'(s) = a_n' + a_{n-1}'s + \cdots + a_1' s^{n-1} + s^n,$$

这个 $p'(s)$就是首一多项式.

当然,展开式(1.1.2)也可以扩展成

$$p(s)=[0 \ \cdots \ 0 \ a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{n-1} \ a_n]\begin{bmatrix} s^{n+m} \\ \vdots \\ s^{n+1} \\ s^n \\ s^{n-1} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=[1 \ s \ \cdots \ s^{n-1} \ s^n \ s^{n+1} \ \cdots \ s^{n+m}]\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

但是其次数仍然是 n,不能算成 $n+m$.

1.1.2 多项式运算

我们将用表达式(1.1.2)实现多项式的四则运算.

设有两个多项式

$$p(s)=a_n+a_{n-1}s+\cdots+a_1s^{n-1}+a_0s^n,$$

$$q(s)=b_m+b_{m-1}s+\cdots+b_1s^{m-1}+b_0s^m,$$

假定 $n\geqslant m$,这时

$$p(s)\pm q(s)$$

的系数向量为

$$[a_n \ a_{n-1} \ \cdots \ a_m \ a_{m-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0]\pm[b_m \ b_{m-1} \ \cdots \ b_1 \ b_0 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

设 a 是任意实数,则多项式 $ap(s)$的系数向量为

$$[aa_n \ aa_{n-1} \ \cdots \ aa_1 \ aa_0].$$

两个多项式 $p(s)$, $q(s)$的乘积的系数向量可按如下方式确定:由于 $sp(s)$, $s^2p(s)$, $s^3p(s)$,…的系数向量分别为

$$[0 \ a_n \ a_{n-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0],$$

$$[0 \ 0 \ a_n \ a_{n-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0],$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ a_n \ a_{n-1} \ \cdots \ a_1 \ a_0],$$

$$\vdots$$

因此多项式 $p(s)q(s)$可表成:

$$[a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0]\begin{bmatrix}1\\ s\\ s^2\\ \vdots\\ s^n\end{bmatrix}q(s) = [a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0]\begin{bmatrix}q(s)\\ sq(s)\\ s^2q(s)\\ \vdots\\ s^nq(s)\end{bmatrix}$$

$$= [a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0]\begin{bmatrix}b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & & \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \\ & & & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ s\\ s^2\\ \vdots\\ s^{n+m}\end{bmatrix},$$

这样，多项式 $p(s)$，$q(s)$的乘积的系数向量为

$$= [a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0]\begin{bmatrix}b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & & \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \\ & & & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0\end{bmatrix}$$

$$= [b_m \quad b_{m-1} \quad \cdots \quad b_1 \quad b_0]\begin{bmatrix}a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & & \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0\end{bmatrix}. \tag{1.1.3}$$

关于多项式除法，有如下带余除法定理：

设有 n 次多项式 $p(s)$，m 次非零多项式 $q(s)$，$n\geqslant m$，这时必存在惟一一组多项式 $r(s)$ 及 $d(s)$，满足

$$p(s) = d(s)q(s) + r(s), \qquad \partial r(s) < \partial q(s), \tag{1.1.4}$$

这时，$d(s)$称做 $q(s)$除 $p(s)$的商式，$r(s)$称做余式. 我们所熟悉的多项式除法，若用系数向量来实现，可归结为如下算法：

(1) 把两个多项式的系数向量排成如下：

$$\begin{matrix}a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & & \end{matrix}$$

(2) 用第二行消去第一行，使第一行第一位数变成 0，并记下消去因子 $d_0=a_0/b_0$；

(3) 然后，去掉第一行第一位的 0，并把第一行向左移一位.

第(2)，(3)步算法执行 $n-m+1$ 次，依次记下所用过的消去因子

$$[d_0 \quad d_1 \quad \cdots \quad d_{n-m-1} \quad d_{n-m}]$$

和第一行所剩的系数

$$[r_0 \quad r_1 \quad \cdots \quad r_{m-2} \quad r_{m-1}],$$

那么这两个向量就是所求的商式和余式的系数向量.

1.1.3 多项式的公因子

设 $p(s)\in\mathbf{R}[s]$. 若存在 $q(s),d(s)\in\mathbf{R}[s]$,且满足

$$p(s)=d(s)q(s),$$

则说 $p(s)$被 $d(s)$除尽,简记为 $d(s)\mid p(s)$,而 $d(s)$称为 $p(s)$的一个因子.

设 $p_1(s),p_2(s),\cdots,p_r(s)\in\mathbf{R}[s]$. 若存在 $d(s)\in\mathbf{R}[s]$,且满足

$$d(s)\mid p_1(s),d(s)\mid p_2(s),\cdots,d(s)\mid p_r(s),$$

则称 $d(s)$为 $p_1(s),p_2(s),\cdots,p_r(s)$的一个公因子. 进一步,若对任意另一公因子 $d'(s)$都有

$$d'(s)\mid d(s),$$

则称 $d(s)$为 $p_1(s),p_2(s),\cdots,p_r(s)$的**最大公因子**.

关于两个多项式的最大公因子,有如下定理成立:

定理 1.1.1 最大公因子存在定理.

设 $p_0(s),p_1(s)\in\mathbf{R}[s],\partial p_1(s)\geqslant\partial p_0(s)$,不全为 0,则必有最大公因子 $d(s)$,且存在两个多项式 $x(s),y(s)$,满足

$$x(s)p_0(s)+y(s)p_1(s)=d(s),\qquad \partial y(s)<\partial p_0(s),\partial x(s)<\partial p_1(s).$$

证明 由辗转相除法得

$$\begin{aligned}
&p_0(s)=q_1(s)p_1(s)+p_2(s), &&\partial p_2(s)<\partial p_1(s);\\
&p_1(s)=q_2(s)p_2(s)+p_3(s), &&\partial p_3(s)<\partial p_2(s);\\
&\qquad\vdots\\
&p_{m-2}(s)=q_{m-1}(s)p_{m-1}(s)+p_m(s), &&\partial p_m(s)<\partial p_{m-1}(s);\\
&p_{m-1}(s)=q_m(s)p_m(s).
\end{aligned}$$

这时,$p_m(s)$就是 $p_0(s),p_1(s)$的最大公因子 $d(s)$. 事实上,从上面最后一式往上推就能得到

$$p_m(s)\mid p_{m-1}(s),p_m(s)\mid p_{m-2}(s),\cdots,p_m(s)\mid p_1(s),p_m(s)\mid p_0(s),$$

因此,$p_m(s)$是 $p_1(s),p_0(s)$的公因子. 今设 $d'(s)$是 $p_1(s),p_0(s)$的另一公因子,则从上面第一式开始往下就能推得

$$d'(s)\mid p_2(s),d'(s)\mid p_3(s),\cdots,d'(s)\mid p_{m-1}(s),d'(s)\mid p_m(s),$$

即 $d'(s)$为 $p_m(s)$的因子,所以 $p_m(s)$为 $p_0(s),p_1(s)$的最大公因子.

另一方面,从上面第一式起,依次把 $p_2(s),p_3(s),\cdots,p_{m-1}(s),p_m(s)$表示为

$$\begin{aligned}
&p_2(s)=p_0(s)-q_1(s)p_1(s),\\
&p_3(s)=-q_2(s)p_0(s)+(1+q_2(s)q_1(s))p_1(s),\\
&p_4(s)=(1+q_3(s)q_2(s))p_0(s)-(q_1(s)+q_3(s)+q_3(s)q_2(s)q_1(s))p_1(s),\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

就能得

$$d(s)=p_m(s)=x(s)p_0(s)+y(s)p_1(s),$$

且 $y(s)$的次数为乘积 $q_{m-1}(s)\cdots q_2(s)q_1(s)$的次数,而 $x(s)$的次数为乘积 $q_{m-1}(s)\cdots q_2(s)$的次数,所以就有

$$\partial y(s) < \partial p_0(s),\ \partial x(s) < \partial p_1(s).$$ ■

对多个多项式的最大公因子，有

定理 1.1.2 设 $p_1(s), p_2(s), \cdots, p_r(s) \in \mathbf{R}[s]$，不全为 0，则必有最大公因子 $d(s)$，且存在 r 个多项式 $x_1(s), x_2(s), \cdots, x_r(s)$，满足

$$d(s) = x_1(s)p_1(s) + x_2(s)p_2(s) + \cdots + x_r(s)p_r(s). \tag{1.1.5}$$

下面给出利用多项式系数向量实现上述辗转相除过程的算法.

设两个多项式 $p(s), q(s)$ $(\partial p(s)=n, \partial q(s)=m)$ 的系数向量为

$$[a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n], \qquad [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{m-1} \quad b_m].$$

(1) 构造如下矩阵：

$$\begin{array}{r|ccccc} n & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ m & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m, \end{array}$$

在此，把次数 n, m 称做每行的头位整型数，其余部分为系数部分，而 a_0, b_0 称做每行的第一位数；

(2) 若某一头位整型数为负，停止运算，否则转(3)；

(3) 若某一行的第一位数为 0，则去掉此 0，并把此行其它数向左平移一位，从该行头位整型数减 1，直到每行第一位数均成非 0；

(4) 用头位整型数小的那一行去消去另一行，使其第一位数变成 0，然后转到(2).

当此算法结束时，头位整型数为非负者即为公因子的次数，而对应行的系数为公因子的系数向量.

这个算法可按如下方式推广到 r 个多项式情形：

设 $p_1(s), p_2(s), \cdots, p_r(s)$ 的系数向量为

$$[a_{i0} \quad a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in-1} \quad a_{in}], \qquad i = 1, \cdots, r.$$

(1) 构造如下矩阵：

$$\begin{array}{r|ccccc} n & a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ n & a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ n & a_{r0} & a_{r1} & \cdots & a_{rn-1} & a_{rn} \end{array}$$

(2) 若 $r-1$ 个行的头位整型数均为负，则停止运算；否则转(3)；

(3) 若某一行的第一位数为 0，则去掉此 0，把此行其它数向左平移一位，从该行头位整型数减 1，直至每行第一位数均成非 0 或某些行的头位整型数为负；

(4) 用头位整型数小的那些行的组合消去头位整型数大的那些行，使其第一位数变成 0，然后转到(2).

当此算法结束时，头位整型数为非负者即为公因子的次数，而对应行的系数为公因子的系数向量.

1.1.4 多项式的互质性

若 $p_1(s), p_2(s), \cdots, p_r(s) \in \mathbf{R}[s]$ 的最大公因子为非零常数，则称 $p_1(s), p_2(s), \cdots, p_r(s)$ 为*互质多项式*.

对两个多项式的互质性，由定理 1.1.1 可得如下定理：

定理 1.1.3 $p(s),r(s)\in\mathbf{R}[s]$互质的充分必要条件为，存在满足

$$\partial y(s) < \partial p(s),\ \partial x(s) < \partial r(s)$$

的 $x(s),y(s)\in\mathbf{R}[s]$，使下式成立：

$$x(s)p(s) + y(s)r(s) = 1. \tag{1.1.6}$$

对多个多项式有如下定理：

定理 1.1.4 $p_1(s),p_2(s),\cdots,p_r(s)\in\mathbf{R}[s]$互质的充分必要条件为，存在 r 个多项式 $x_1(s),x_2(s),\cdots,x_r(s)$，满足

$$x_1(s)p_1(s) + x_2(s)p_2(s) + \cdots + x_r(s)p_r(s) = 1. \tag{1.1.7}$$

用 $p(s),q(s)$的系数向量来判断其互质性，有如下结式定理：

定理 1.1.5 设 $p(s),r(s)\in\mathbf{R}[s]$，其中 $p(s)$为首一多项式，$\partial p(s)=n,\partial r(s)<\partial p(s)$，其系数向量分别为$[a_n\ \ a_{n-1}\ \ \cdots\ \ a_1\ \ 1]$，$[c_n\ \ c_{n-1}\ \ \cdots\ \ c_1]$，则 $p(s),r(s)$互质的充分必要条件为矩阵(结式矩阵)

$$M_{p,r} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \vdots & & & & & & \\ 0 & & & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 & 0 & & 0 \\ & & \vdots & & & & & & \\ 0 & & & 0 & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\ \vdots\\a\end{array}}\right\} n\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\ \vdots\\a\end{array}}\right\} n\text{行} \end{array} \tag{1.1.8}$$

的秩为 $2n$.

证明 假说 $M_{p,r}$不满秩，则存在 $2n$ 维非 0 向量

$$[x\ \ y] = [x_n\ \ x_{n-1}\ \ \cdots\ \ x_1\ \ y_n\ \ y_{n-1}\ \ \cdots\ \ y_1]$$

满足

$$[x\ \ y]M_{p,r} = 0.$$

记

$$x(s) = x_n + x_{n-1}s + \cdots + x_1 s^{n-1},$$
$$y(s) = y_n + y_{n-1}s + \cdots + y_1 s^{n-1},$$

则由乘法公式，有

$$x(s)p(s) + y(s)r(s) = 0.$$

于是，$p(s)=-r(s)y(s)/x(s)$. 这里不妨假定 $x(s),y(s)$互质(否则去掉公因子，上式仍成立). 这时必有 $x(s)|r(s)$，从而 $d(s)=r(s)/x(s)$是一个多项式. 显然，

$$-p(s)/y(s) = r(s)/x(s) = d(s),$$

因此 $d(s)$是 $p(s),r(s)$的公因子. 另一方面，由于 $\partial p(s)=n,\partial y(s)<n$，故 $\partial d(s)\geqslant 1$. 因此，$p(s),r(s)$有非常数公因子 $d(s)$，多项式 $p(s),r(s)$不互质.

反之，设 $M_{p,r}$满秩. 这时，方程

$$[x\ \ y]M_{p,r} = [1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$$

有解，于是由乘法公式就得