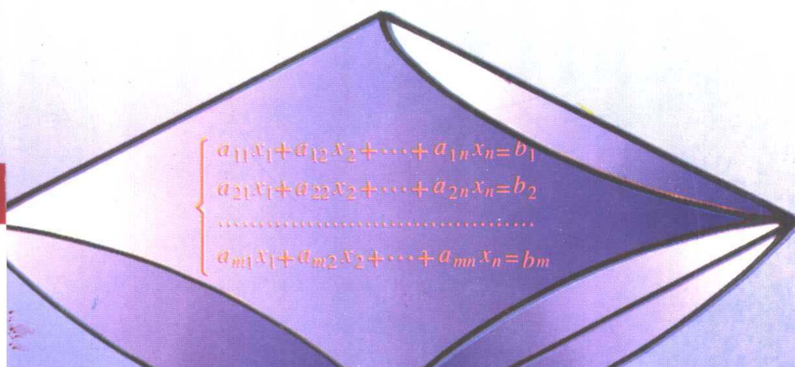
工科数学基地建设丛书

线性代数

杨纶标　庾镜波　谢乐军　编



华南理工大学出版社

工科数学基地建设丛书

（华南理工大学）

线性代数

杨纶标　庚镜波　谢乐军　编

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨纶标,庚镜波,谢乐军编.—广州:华南理工大学出版社,1999.2(2000.1重印)
(工科数学基地建设丛书)
ISBN 7-5623-1360-1

Ⅰ.线…
Ⅱ.①杨…②庚…③谢…
Ⅲ.线性代数
Ⅳ.O151

华南理工大学出版社出版发行
(广州五山　邮编510640)
责任编辑:陈怀芬
各地新华书店经销
广州市新光明印刷厂印装
*
1999年2月第1版　2000年1月第2次印刷
开本:850×1168　1/32　印张:8.75　字数:220千
印数:5001—10000
定价:14.50元

总　　序

在世纪交替之际，经济竞争日益激烈，人才与技术是保证在竞争中立于不败之地的关键。发达国家科学界已得出共识："数学科学对于经济竞争是必不可少的。数学是一种关键性的、普遍的、可实行的技术"（引自：数学科学·技术与经济竞争力，美国数学科学委员会报告）。在新形势下，大学数学教育工作者当奋力而为。国家教委（现为教育部——编者注）为了推动面向21世纪的大学教育改革，在一些有条件的大学建立了基础学科教学基地，其目的在于：为面向21世纪的教学改革，在有关高校先走一步，摸索经验，以资借鉴。华南理工大学应用数学系有幸被国家教委定为工科数学教学基地。我们深感这一任务光荣而艰巨。基地建设的任务与目标，国家教委都有明确的指示，具体实施方案则要求我们探索。改革要做的事情是多方面的，但是其中最基础性的工作之一，就是实施改革方案的教材建设。它是改革思想的具体体现。

面对当今的生产力发展水平，工科数学教材改革的原则是什么呢？我们认为必须考虑到下述几方面的需要。

一、对原有教学内容要作适当增删

原有的高等数学、工科数学及根据专业需要而开设的某些应用数学的选修课程，大都有国家教委颁布的"基本要求"作指导。这些基本要求是在当时历史条件下制定的，它基本反映了基础学科的继承性与当时教学体系的需要。但时至今日，随着计算机技术的日益普及，以及对学生应用数学知识，解决实际问题能力的

要求日益提高，原有教材的内容显然需要加以调整。如：对原有教材中较多依靠特殊技巧处理计算题的训练，由于有了性能很高的数学软件的出现，上述训练内容可适当减少，这种减少并不影响学生对数学基本概念的理解，还可腾出时间来让学生去学习更有用的数学知识。又如：在概率论与数理统计课程中，过去的重点放在概率论，而在实际中非常有用的数理统计内容所占比重较少，从培养学生解决实际问题能力出发，合理的安排应该与原安排相反，将重点放在数理统计的教学上。类似需要调整原有教学内容之处，还可以举出一些，这里不详加罗列。另外，对原有教学内容薄弱之处，我们认为应当适当加强。

二、在工科数学教学中，对重要概念的讲授应系统地训练数学建模的思维程序，还应增加独立的数学模型课程

从广义来说，所有的数学理论都是某种特定的数学模型。但由于数学科学强烈地依靠逻辑推理，自19世纪到20世纪这段时间，自德国数学家希尔伯特(Hilbert)的几何基础与法国数学家柯西(Cauchy)的形式化的数学分析理论问世之后，在数学界形成了一股主要靠逻辑推理与高度抽象化方法来发展数学的强大浪潮。这一过程使得数学科学取得了辉煌的、前所未有的成绩。它将工业革命初期人们为了解决实际问题所提出的一些朴素的数学思想加以完善，形成完整的数学理论，并因此也出现了不少新的数学理论，如非欧几何就是依靠逻辑推理方法而发现的。依靠逻辑推理发展数学，今天仍然具有强大的生命力，而且也是数学区别于其他科学的基本特征。但是，任何一门科学的特征都不可强调得过分，如果将逻辑推理手段放在数学方法唯一优先的地位，则不可避免地要带来消极影响，首先，它会带来数学思维的枯竭。近期以来，基础数学研究多以某些历史难题为线索，显得比较沉闷，新的理论出现较少；相反，应用数学的新思想、新方法则蓬勃发

展。其次，若仅用逻辑推理作为数学的主要手段进行数学教育，学生学了抽象的数学理论，往往不知如何去使用它来解决实际问题。这一缺陷已是世界各国普遍感到头痛的问题。最后，科学思维的源泉毕竟还是来自实践，逻辑推理方法并不见得总是成功的。非阿基米德几何的兴衰就是一例，由于它仅仅依靠逻辑推理，没有明确的应用背景，在数学的发展中遭到了淘汰。有些有名的数学问题，现在仍然吸引了一批知名数学家参加研究，虽然也是必要的，但在可见的将来，却难以期望它对社会经济的发展有直接的推动。数学模型课程，强调直接从实际问题中提出数学问题，然后选择恰当的数学方法加以解决，教学生善于从实际问题中提出数学问题。对于广大学习数学课程的学生来说，这也是提高其数学素质的重要途径，是培养学生用数学工具解决实际问题的桥梁。而且，在建立数学模型解决实际问题的过程中，同样可以加强对学生逻辑推理能力的训练。所以，在工科数学教育的始终，贯彻数学建模思想的训练，应是当今工科数学教材建设的一个重要方面。

三、增加数学实验，让现代计算机的高科技成果能及时溶于古老的数学科学中，大大提高数学解决实际问题的能力

现代计算机科学取得了举世瞩目的成就。大量的功能强大的数学软件的出现、计算机辅助教学（CAI）技术的发展，使得过去很多繁琐的数学计算变得轻而易举，很多抽象难懂的数学概念可以直观显示，很多一时还找不到恰当数学模型描述的复杂系统可通过计算机模拟，求得其满足应用需要的数值解。在计算机技术日益普及的新时代，若数学科学不抓住这一机遇，用最先进的技术手段武装自己，将会大大降低数学科学的作用与地位。在工科数学课中引入计算机技术，应当是编写新教材的指导思想之一。完成这一任务的恰当手段，就是在相关课程中增加数学实验，或在

需要的专业单独开设数学实验课。

根据上述三方面的设想，在工科数学基地的教材建设中，必须编写新的教材，如《经济数学模型》、《数学实验》、《市场调查与市场预测的数学方法》；同时，也要将传统的高等数学、工科数学各课程根据上述原则加以改造。这就要求我们编写与时代要求相适应的工科系列教材。我们希望通过这套教材的陆续出版，能对面向21世纪的数学教育改革做一些探索性的工作，同时，我们也热切希望国内的同行、专家参加并指导我们的编写工作。这套教材包括了我系参加此项工作的教师教学与教材研究成果，借此对各位辛勤工作的老师表示感谢。

华南理工大学应用数学系　汪国强

1997年12月20日

前　　言

为了适应培养21世纪新型人才，各高等院校都在积极进行教学改革，而我们近年来也在教务处和系领导的支持和帮助下，对线性代数教学进行了研究，取得了一些成果，结合多年的教学实践，编写了此书。

本书以“线性方程组”为主线，且贯穿用“矩阵的秩”研究问题的思想方法，并有如下特点：

(1) 突出重点和基本方法。例如，对于行列式，因为主要是计算问题，所以我们采用与“计算”一致的行列式的展开定义法，并对一般的展开法则的证明给出了一个较简明的方法；又如，在讨论向量组之间的线性关系时，本教材重点放在最大无关组，给出了关于最大无关组的一个定理，它不仅可方便求最大无关组，而且由它可容易地推出关于向量组之间的线性关系的一系列结论；再如，关于方程组解的结构问题，我们通过例子介绍它的方法，不着重讨论一般理论的证明，这样既掌握了方法，又减少了难点。

(2) 条理清楚，便于掌握。例如，关于向量的线性相关性的结论，很多且难度也大，本书将这许多结论归为三类：一类是关于向量的线性表示方面的，它们可由非齐次方程组是否有解来推得，直观明了；另一类是向量的线性相关与线性无关问题，结合齐次方程组来讨论，并将线性相关与线性无关的判定定理对比地放在一起，容易理解和掌握；还有一类是向量组之间的线性关系的结论。这样，按描述的对象进行分类，不仅条理清楚，而且各类推导思路明确。

(3) 深入浅出，便于理解。例如，本书着重强调用矩阵的秩判断方程组的解的方法，应用于推导向量的线性表示、线性相关、向量组等价和最大无关组等有关结论，使难懂的线性相关性理论变得简明；另外，对新概念，尽可能采用简明的例子引出，使概念直观易于理解。

(4) 注重例题和习题的选择匹配，以帮助读者正确理解概念和掌握运算方法，同时尽量选择原教材的例题和习题，方便教师使用。书后附有补充题，供学生复习用。

(5) 联系实际。本教材在投入产出、预测、生产利润计算、综合评判及线性规划等方面均有涉及。有的虽然简单，但有一定的代表性。例如，书中介绍预测职工轮训的方法，在专业人才结构和城市人口以及其它问题的预测方面，均有广泛的应用。关于线性规划，因为它有广泛的应用，作为工科学生有必要对它有所了解，故本书简单介绍了它的概念、性质和解法。

本书第一、二、三、四、八章及补充题由杨纶标编写，第五、六章由庾镜波编写，第七章由谢乐军编写。此外，谢乐军、郝志峰等老师在结合计算机应用方面做了许多工作，待总结后编入本书。

在编写过程中，曾广泛听取了系领导和各任课老师的意见，参考了许多线性代数教材，尤其是杨茂信等老师编写的《线性代数》，得到不少启发和帮助，在此一并表示衷心感谢。

由于学识水平所限，不妥和谬误之处在所难免，恳请教师和读者批评指正。

编　者

1998 年 10 月

目　录

第一章　行列式…………………………………………………………（1）
§1.1　二、三阶行列式………………………………………………（1）
§1.2　n阶行列式　………………………………………………（5）
§1.3　n阶行列式的性质 …………………………………………（13）
习题一 ………………………………………………………………（22）
第二章　矩阵 ………………………………………………………（26）
§2.1　矩阵的概念……………………………………………………（26）
§2.2　矩阵的运算……………………………………………………（29）
§2.3　逆矩阵…………………………………………………………（40）
§2.4　分块矩阵………………………………………………………（45）
§2.5　矩阵的秩与初等变换…………………………………………（52）
习题二 ………………………………………………………………（61）
第三章　线性方程组 ………………………………………………（66）
§3.1　方程组的初等变换……………………………………………（66）
§3.2　线性方程组的解法……………………………………………（69）
§3.3　线性方程组解的讨论…………………………………………（71）
习题三 ………………………………………………………………（77）
第四章　n维向量与向量空间 ……………………………………（80）
§4.1　n维向量及其线性运算 ……………………………………（80）
§4.2　线性表示与线性组合…………………………………………（83）
§4.3　线性相关与线性无关…………………………………………（87）
§4.4　最大无关组与等价向量组……………………………………（93）

§4.5　线性方程组解的结构……………………………（99）
§4.6　向量空间 ……………………………………（109）
习题四……………………………………………（125）
第五章　特征值与特征向量……………………………（130）
§5.1　方阵的特征值与特征向量 ……………………（130）
§5.2　相似矩阵与矩阵对角化条件 …………………（134）
§5.3　实对称矩阵的对角化 …………………………（138）
习题五……………………………………………（142）
第六章　二次型…………………………………………（145）
§6.1　二次型及其矩阵表示式 ………………………（145）
§6.2　用正交变换化二次型为标准形 ………………（148）
§6.3　用配方法化二次型为标准形 …………………（151）
§6.4　正定二次型 ……………………………………（153）
习题六……………………………………………（156）
第七章　线性空间与线性变换…………………………（158）
§7.1　线性空间的概念与性质 ………………………（158）
§7.2　线性空间的基、维数与向量的坐标……………（162）
§7.3　线性变换 ………………………………………（173）
§7.4　线性变换的矩阵 ………………………………（178）
习题七……………………………………………（189）
第八章　线性规划………………………………………（193）
§8.1　线性规划问题的数学模型 ……………………（193）
§8.2　线性规划问题的解法 …………………………（202）
§8.3　对偶线性规划问题 ……………………………（219）
习题八……………………………………………（223）
附录一　习题答案或解题提示…………………………（227）
附录二　补充题及其答案或解题提示…………………（247）
参考书目 …………………………………………（267）

第一章　行 列 式

在线性代数中，行列式是不可缺少的工具，它在后面各章如矩阵、方程组、向量的线性相关性、特征值和二次型中均有重要的应用. 为此，先介绍行列式.

§1.1　二、三阶行列式

用消元法不难求得两个未知数的一次方程组(称为二元线性方程组)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \tag{1.2}$$

这个解由方程的系数和常数项表示. 对于任意一个二元线性方程组，只要 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，便可由(1.2)式求得它的解. 为了便于记忆引入行列式的概念.

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

称记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二阶行列式.它的横排叫行,竖排叫列,其中$a_{11}$、$a_{12}$,$a_{21}$,$a_{22}$叫做元素,每个元素第一下标表示行数,第二下标表示列数.

二阶行列式的代数和,符合如下的对角线规则:实线联结的两个元素的乘积,减去虚线联结的两个元素的乘积,等于二阶行列式的值,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

这种做法叫做按对角线展开.

例 1 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$,问:(1)$\lambda$ 为何值时,$D=0$;(2)λ 为何值时,$D\neq 0$.

解
$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda$$

如果 $\lambda^2-3\lambda=0$,则 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$.

所以(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时,$D=0$.

(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时,$D\neq 0$.

将行列式用到方程组,则称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为方程组的系数行列式.若其值 $D\neq 0$ 时,则方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中,D_1 是 D 的第 1 列换为常数项后的行列式,而 D_2 是 D 的第 2 列换为常数项后的行列式,x_1 和 x_2 的分母都是系数行列式.

例 2 用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 3x_1-2x_2=0 \end{cases}$$

解 由系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13(\neq 0)$$

知方程组有解.又因

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

所以得到方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{13}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{13}$$

类似地,研究三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

的解,可引入三阶行列式的定义,称

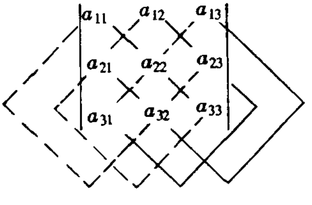
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式,它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

这个和式共有 6 项,其中有 3 项前面带正号,另 3 项带负号,每一项都是 3 个元素的乘积,这 3 个元素取自不同行不同列.

三阶行列式也有对角线展开规则(如图示):



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

这个和式中,实线联结的 3 个元素的乘积取正号,虚线联结的 3 个元素的乘积取负号.

例如,用行列式定义计算

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot5+ 3\cdot3\cdot4-2\cdot2\cdot4-2\cdot3\cdot1-3\cdot1\cdot5= 2+20+36-16-6-15=21$$

类似于二元线性方程组,用消元法解三元线性方程组(1.3)得到的解,当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,也可以用行列式表示,且有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中 D_j 是 D 的第 j 列换为常数项后的行列式.

例 3 解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=1 \\ \quad 3x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

解 先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)+(-12)+0-2-0-(-9)=-8$$

由 $D\neq0$ 知方程组有惟一解. 再计算 D_1,D_2,D_3,用对角线展开规

则，得

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\1 & 3 & 2\\0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-8,\qquad D_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 2\\3 & 0 & -1\end{vmatrix}=8$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\0 & 3 & 1\\3 & 1 & 0\end{vmatrix}=-16$$

根据(1.4)式，得到方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=2$$

请注意，行列式按对角线展开法，只适用于二、三阶行列式．关于更高阶行列式的计算问题，在下节讨论．

§1.2 n 阶行列式

设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，将其排列如下：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

称 D 为 n 阶行列式或记为 D_n，它表示一个数．a_{ij}叫做行列式的元素，其中第一个下标“i”表示第 i 行，第二个下标“j”表示第 j 列，即 a_{ij}表示第 i 行第 j 列上的元素，而 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为主对角线上的元素．

为了确定行列式的值，先给出余子式和代数余子式的概念．

在 n 阶行列式中，划去 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按照原来的顺序，排成一个 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij}的**余子式**，记

为 M_{ij}. 而

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij}的**代数余子式**.

例如，设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

a_{23}的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

例 4 求行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

的代数余子式 A_{13}和 A_{23}.

解 按代数余子式的规定

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$+(18+20-2-1+48-15)=68$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$-(36+0-10-2-0-75)=51$$

不难发现，代数余子式只与 a_{ij}位置有关，而与 a_{ij}的大小无关.