中 国 科 学 院
测 量 与 地 球 物 理 研 究 所 编 辑

测量与地球物理集刊

第 二 号

科 学 出 版 社

中 国 科 学 院
测量与地球物理研究所編輯

测量与地球物理集刊

第 二 号

科 学 出 版 社
1965

启　　事

因中国科学院测量及地球物理研究所奉命自1965年3月1日起，改称中国科学院测量与地球物理研究所，故测量及地球物理集刊自第二号起改称测量与地球物理集刊.

测量与地球物理集刊編輯委員会

1965年4月

测量与地球物理集刊

第二号

中国科学院测量与地球物理研究所编辑

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街117号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1965年11月第一版　　开本：787×1092　1/16

1965年11月第一次印刷　　印张：7 1/4

印数：0001—1,150　　字数：162,000

统一书号：13031・2237

本社书号：3397・13—15

定价：1.20元

测量与地球物理集刊

第 二 号

目　　录

莫洛琴斯基的扰动位积分方程解

許 厚 澤

莫洛琴斯基在1945年[1]及1948年[2]的论文中，从格林公式出发，卓越地建立了确定地球地形表面上扰动位的积分方程:

$$T=\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{g-\gamma}{r}\sec\alpha\,dS+\frac{1}{2\pi}\int_S T\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}\sec\alpha-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\sec\alpha-2\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)\cos\alpha-\frac{1}{r}\Delta_2H\cos\alpha\right]dS, \tag{1}$$

式中T为扰动位，S为第一级近似地球表面，r为S面上流动点到待求点的距离，α为S面的倾角，$g-\gamma$为重力异常，H为正常高，∂v表示曲面$H=$常数的外法线单元长度，$\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)$及$\Delta_2H$为两个算子，定义为:

$$\bar{D}\left(\frac{1}{r},H\right)=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial_2}{\partial B}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial B}\right)+\frac{1}{\rho^2\cos^2B}\frac{\partial_2}{\partial L}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial L}\right),$$

$$\Delta_2H=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2H}{\partial B^2}+\frac{1}{\rho^2\cos^2B}\frac{\partial^2H}{\partial L^2}-\frac{\operatorname{tg}B}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial B},$$

而ρ为向径，$\frac{\partial_2}{\partial B}=\frac{\partial}{\partial B}+\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial B}$, $\frac{\partial_2}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}+\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial L}$.

此外，还阐明了所求方程的可解性和唯一性条件及其物理意义. 后来，考虑到这一方程求解的复杂性，莫洛琴斯基又利用一辅助函数——单层密度φ，组成单层密度的积分方程，并进而解出扰动位:

$$\left.\begin{aligned}2\pi\varphi\cos\alpha&=\Delta g+\frac{3}{2\rho_0}\int_S\frac{\varphi}{r}dS+\frac{1}{2\rho_0}\int\frac{\rho^2-\rho_0^2}{r^3}\varphi dS,\\T&=\int_S\frac{\varphi}{r}dS.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

莫洛琴斯基还证明了，公式(1)和(2)是等价的. 后经耶勒麦夫和尤尔金娜等人对他的理论作了大量的试验，证明了这一理论的正确性，从而成为近代大地重力学上重要的发展.

用单层密度数值解莫洛琴斯基的积分方程方法，经过莫洛琴斯基(1949, 1960)[3,4]一系列发展和努力，已经较为完善. 在理论方面，B. B. 布洛瓦尔近年来又加以发展[5,6]. 但是直接解方程(1)的方法目前还很少有讨论. 本文试图用莫洛琴斯基的小参数方法[4,126頁]求解(1)式.

首先，对(1)式进行如下的变化. 由文献[4]91页，

$$\overline{D}\left(\frac{1}{r},H\right)=D\left(\frac{1}{r},H\right)+h_0\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial v}D(H,H)=D\left(\frac{1}{r},H\right)+\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial v}\operatorname{tg}\alpha,$$

并令 $dS\cos\alpha=d\sigma_1$，代入方程(1)得:

$$T=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r}\sec^2\alpha\,d\sigma_1+\frac{1}{2\pi}\int T\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}\sec^2\alpha-\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\sec^2\alpha-\right.$$

$$\left.-2D\left(\frac{1}{r},H\right)-2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{r}\Delta_2H\right]d\sigma_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,d\sigma_1+\frac{1}{2\pi}\int T\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}-\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}+\frac{1}{r\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\operatorname{tg}^2\alpha-2D\left(\frac{1}{r},H\right)-\frac{1}{r}\Delta_2H\right]d\sigma_1.\tag{3}$$

又由文献[4]的 86 页和 127 页知:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right],$$

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r_0^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right],$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial v}=\frac{\rho^2-\rho_0^2}{2\rho_0r^3}-\frac{1}{2\rho_0r}\doteq\frac{H-H_0}{r^3}-\frac{1}{2\rho_0r},$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial v}=-\frac{2}{\rho}\doteq-\frac{2}{\rho_0},$$

及文献[5]:

$$D\left(\frac{1}{r},H\right)=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\rho\,\partial\psi}\frac{\partial H}{\rho\,\partial\psi}=-\frac{\rho_0\sin\psi}{r^3}\frac{\partial H}{\rho\,\partial\psi}.$$

在上面一些公式中，$\Delta H=H-H_0$，并且略去了 $\frac{H}{\rho}$ 级量，因为所有推导仅及扁率级误差的精度。

以同一精度，我们可以用地球平均半径 R 代替 ρ_0，并且 $d\sigma_1=\left(\frac{\rho_0}{R}\right)^2d\sigma\cong d\sigma$，即代换成 $d\sigma_1$ 在半径为 R 的球上的投影，于是(3)式变为:

$$T=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right](1+\operatorname{tg}^2\alpha)d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int T\left\{\frac{H-H_0}{r_0^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]+\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{3}{2Rr_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]-\\
&-\frac{H-H_0}{r_0^3}\operatorname{tg}^2\alpha\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]+\\
&+\frac{5}{2Rr_0}\operatorname{tg}^2\alpha\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]-\\
&-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]-\\
&-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^4-\cdots\right]\Bigg\}d\sigma. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

然后，我们用文献 [4，126 页] 的方法，过渡到新边界 $\bar{S}$. 在任意点的向径与某参数 k 有关，即 $\bar{\rho}=R+kH,\ 0\leqslant k\leqslant 1$. 我们把与这曲面相关的各元素用顶上加一横表示，有

$$
\bar{H}=kH,\qquad \Delta_2\bar{H}=k\Delta_2 H,\qquad \Delta\bar{H}=k\Delta H,
$$
$$
\operatorname{tg}^2\bar{\alpha}=k^2\operatorname{tg}^2\alpha.
$$

并且当 $k\leqslant 1$ 时，存在收敛级数：

$$
\bar{T}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n T_n. \qquad (5)
$$

显然，当 $k=1$ 时，即为我们所需的解 T. 把上面各关系式代入(4)式，并比较同幂次 k 前的各系数，有：

$$
\left.
\begin{aligned}
T_0&=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r_0}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\frac{3}{2Rr_0}T_0 d\sigma,\\
T_1&=\frac{1}{2\pi}\int T_0\left\{\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right\}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int T_1\left\{\frac{3}{2Rr_0}\right\}d\sigma,\\
T_2&=\frac{1}{2\pi}\int\frac{g-\gamma}{r_0}\left[\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{r_0}\right)^2\right]d\sigma+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int T_0\left[-\frac{3(\Delta H)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\operatorname{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int T_1\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\frac{3}{2Rr_0}T_2 d\sigma,\\
T_3&=\frac{1}{2\pi}\int T_0\left[-\frac{3}{2}\frac{(\Delta H)^3}{r_0^5}+\frac{3R\sin\psi(\Delta H)^2}{r_0^5}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}+\frac{(\Delta H)^2}{2r_0^3}\Delta_2 H-\right.\\
&\quad\left.-\frac{H-H_0}{r_0^3}\operatorname{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int T_1\left[-\frac{3(\Delta H)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\operatorname{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int T_2\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int\frac{3}{2Rr_0}T_3 d\sigma,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right\} \qquad (6)
$$

容易看出，以上积分方程的形式为：

$$
2\pi T_n-\frac{3}{2R}\int\frac{T_n}{r_0}d\sigma=K_n, \qquad (7)
$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
K_0 &= \int \frac{g-\gamma}{r_0}\,d\sigma,\\
K_1 &= \int T_0\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma,\\
K_2 &= \int \frac{g-\gamma}{r_0}\left[\mathrm{tg}^2\alpha-\frac{1}{2}\frac{(H-H_0)^2}{r_0^2}\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_0\left[-\frac{3(H-H_0)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\mathrm{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_1\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma,\\
K_3 &= \int T_0\left[-\frac{3}{2}\frac{(H-H_0)^3}{r_0^5}+\frac{3R\sin\psi(H-H_0)^2}{r_0^5}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}+\right.\\
&\quad\left.+\frac{(H-H_0)^2}{2r_0^3}\Delta_2 H-\frac{H-H_0}{r_0^3}\mathrm{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_1\left[-\frac{3(H-H_0)^2}{4Rr_0^3}+\frac{5}{2Rr_0}\mathrm{tg}^2\alpha\right]d\sigma+\\
&\quad+\int T_2\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma.
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

方程(7)的一般解为:

$$T_n=\frac{K_n}{2\pi}+\frac{3}{(4\pi R)^2}\int K_n[S(\psi)-1]d\sigma,\qquad(9)$$

最后得:

$$T=\sum_0^\infty T_n,$$

其中 $S(\psi)$ 为斯托克司函数. 显然,对于 T_0 有:

$$T_0=\frac{1}{4\pi R}\int(g-\gamma)[S(\psi)-1]d\sigma,\qquad(10)$$

这就是著名的斯托克司公式.

根据研究,在实际应用时,取至一级近似即够了,即

$$\left.\begin{aligned}
T &= T_0+T_1,\\
T_0 &= \frac{1}{4\pi R}\int\Delta g[S(\psi)-1]d\sigma,\\
T_1 &= \frac{K_1}{2\pi}+\frac{3}{(4\pi R)^2}\int K_1[S(\psi)-1]d\sigma,\\
K_1 &= \int T_0\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\cdot\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\sigma.
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

公式(11)为工作公式. 可以看出,为了求出 T,必须进行三次面积分,且要用到地形的梯度,因此工作量較解(2)式繁重. 但可作为很好的校核,而且地面的倾角和曲率的影响基本上可以直接顾及.

在具体计算中，$\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}$ 为在流动点上，沿着被研点到流动点方向的地表面倾斜．$\Delta_2 H$ 值可先把流动点附近高程展为级数：

$$H = H_0 + A\Delta B + B\Delta L + \frac{C}{2}\Delta B^2 + \frac{D}{2}\Delta L^2 + E\Delta B\Delta L,$$

ΔB，ΔL 为经纬度差，然后按下式：

$$\begin{aligned}\Delta_2 H &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H}{\partial B^2} + \frac{1}{\rho^2\cos^2 B}\frac{\partial^2 H}{\partial L^2} - \frac{\operatorname{tg} B}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial B}\\ &= \frac{C}{R^2} + \frac{D}{R^2\cos B} - \frac{A\operatorname{tg} B}{R^2}\end{aligned} \tag{12}$$

计算．

最后，把扰动位 T 换算为高度异常．按布隆斯公式：

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}.$$

并把 $d\sigma$ 化成以单位球面元 $d\omega$ 为变元，$d\sigma = R^2 d\omega$，则有

$$\left.\begin{aligned}&\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \cdots,\\ &\zeta_0 = \frac{R}{4\pi\gamma}\int \Delta g[S(\psi) - 1]d\omega,\\ &\zeta_1 = \frac{R^2}{2\pi}K_1' + \frac{3R^2}{16\pi^2}\int K_1'[S(\psi) - 1]d\omega,\\ &K_1' = \int \zeta_0\left[\frac{H - H_0}{r_0^3} - \frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi} - \frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\omega,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

垂线偏差的计算公式也很容易由上式引出，例如，子午方向的垂线分偏差可写成：

$$\xi = -\frac{\partial\zeta(H, B, L)}{R\,\partial B} = -\frac{\partial\zeta(B, L)}{R\,\partial B} - \left(\frac{g - \gamma}{\gamma} + \frac{2T}{\gamma R}\right)\frac{\partial H}{R\,\partial B}. \tag{14}$$

同样，引进 $\bar{S}$ 面，并用小参数展开可得：

$$\left.\begin{aligned}&\xi = \xi_0 + \xi_1 + \cdots\cdots\cdots,\\ &\xi_0 = -\frac{\partial\zeta_0}{R\,\partial B},\\ &\xi_1 = -\frac{\partial\zeta_1}{R\,\partial B} - \left(\frac{g - \gamma}{\gamma} + \frac{2\zeta_0}{R}\right)\frac{\partial H}{R\,\partial B},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

把(13)式取微分，并代入(15)式后，可得计算垂线偏差的实用公式(到一次近似止)如下：

$$\begin{aligned}&\xi_0 = -\frac{1}{4\pi\gamma}\int \Delta g\frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A\,d\omega,\\ &\xi_1 = -\frac{R^2}{2\pi}\int \zeta_0\left[-\frac{3(H - H_0)}{r_0^4} + \frac{6R\sin\psi}{r_0^4}\frac{\partial H}{R\,\partial\psi} + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{\Delta_2 H}{r_0^2}\right]\cos\frac{\psi}{2}\cos A\,d\omega - \frac{3R}{16\pi^2}\int K_1'\frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A\,d\omega -\end{aligned} \tag{16}$$

$$
-\left(\frac{g-\gamma}{\gamma}+\frac{2\zeta_0}{R}\right)\frac{\partial H_0}{R\,\partial B},
$$

$$
K_1'=\int\zeta_0\left[\frac{H-H_0}{r_0^3}-\frac{2R\sin\psi}{r_0^3}\,\frac{\partial H}{R\,\partial\psi}-\frac{\Delta_2 H}{r_0}\right]d\omega,
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
$$

对于 η 可得同样公式，只需将其中的 $\cos A$ 换成 $\sin A$ 即可。由以上可以看出，计算垂线偏差的工作量比高度异常更为繁重。

参 考 文 献

[1] Молоденский, М. С., Основные вопросы геодезической гравиметрии, Труды ЦНИИГАиК, вып. 42, 1945.

[2] Молоденский, М. С., Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности земли, *Известия АН СССР, Серия географическая и геофическая*, № 3, 1948.

[3] Молоденский, М. С., Приближенный способ решения уравнения, определяющего фигуру квазигеоида, Труды ЦНИИГАиК, вып. 68, 1949.

[4] Молоденский, М. С., Еремеев, В. Ф., Юркина, М. И., Метод изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли, Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.

[5] Бровар, В. В., Решение некоторых внешних краевых задач для земной поверхности, *Известия высших учебных заведений, Геодезия и Аэрофотосъема*, 1963, № 1.

[6] Бровар, В. В., О решения краевой задачи Молоденского, *Известия высших учебных заведений, Геодезия и Аэрофотосъема*, 1963, № 4.

用球函数法解算重力测量的基本微分方程*

駱 鳴 津

在莫洛金斯基理论以前的大地重力学中，是以大地水准面上的边界条件方程为基础来解算扰动位的. 这就遇到了很复杂的调整和归算问题，目前还不能完满地解决. 而莫洛金斯基避开了这些问题，提出了以地球表面为边界的边界条件方程，这时边界条件方程中的边界函数是能实际测出来的. 这样就从根本上解决了持续达一百年之久的理论难题.

边界条件方程在大地重力学中通常称为重力测量的基本微分方程. 莫洛金斯基的重力测量基本微分方程是莫洛金斯基理论的基础. 解算这一方程可用不同方法，莫洛金斯基、布洛瓦尔、尤尔金娜等都曾提出了一些方法，他们大都采用单层位、双层位等形式来表示地球的扰动位，列出单层密度（或双层密度）为积分变量的积分方程. 由此解出单层密度，再求出扰动位，而不是直接由重力测量的基本微分方程来求定扰动位. 莫洛金斯基理论不但在理论证明上非常严谨，而且进行了大量的試験.

本文試图从莫洛金斯基的重力测量微分方程出发，以球函数为工具，直接解出扰动位. 由于重力测量基本微分方程的精度所限，公式仅导至扁率级[1].

一、求球面上的函数值

从边界条件方程出发来求定外空间（或表面）任一点的函数值，我们称之为解外部边界问题，只要此函数在外空间是调和与正则的，则其解就是唯一的和有界的. 在我们的问题中是：在已知表面 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$（此处指的是地球第一次近似地形表面）上，给出了边界函数 $f(\vartheta, \lambda)$（此处指重力异常 $\Delta g = g - \gamma$），求定空间任一点的扰动位函数 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$. 由于 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ 是空间的单值函数，并满足调和正则条件，因此是有解的. 上述符号中，ϑ, λ 为空间各点的地心球面坐标，分别为极距和经差，ρ 为空间各点的向径，ρ_N 是 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面上各点的向径. 因为 $S(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 面的形状已知，故 ρ_N 是 ϑ, λ 的已知函数，也可以写成 $\rho_N(\vartheta, \lambda)$. 又设 ρ_0 为球的半径，ρ_k 为空间待定 $T(\rho_k, \vartheta, \lambda)$ 的点的向径.

---

* 本文系由方俊导师指导，并在许厚泽、李瑞浩、刘衡宇等同志的具体帮助下完成的，作者在此致以衷心的感谢.

1) 在地球形状理论中，基本微分方程的完整形式应为：

$$-\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}\frac{T}{\gamma} = \Delta g,$$

而

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = -\gamma\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) + 2\omega = -\frac{2\gamma}{\rho}(1 + \alpha^2\cos^2 B) + 2\omega^2,$$

式中 M, N 为主曲率半径，ω 为地球自转角速度，ρ 为平均曲率半径.

实际上 (1) 式采用了 $\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = -\frac{2\gamma}{\rho}$，而略去了 α^2 级的项，故公式 (1) 的精度仅达扁率级.

其次，由莫洛金斯基导出的扁率平方级公式 (III-3-39) 和 (III-3-41) 与扁率级公式 (III-2-12) 和 (III-2-13) 比较（参见文献[1]），可以看出，它们之间达扁率级.

重力测量的基本微分方程可写为:

$$\left[\alpha T(\rho, \vartheta, \lambda)+\beta \frac{\partial T(\rho, \vartheta, \lambda)}{\partial \rho}\right]_{\rho=\rho_N(\vartheta, \lambda)}=f(\vartheta, \lambda), \tag{1}$$

式中

$$\alpha=-\frac{2}{\rho_N}, \quad \beta=-1, \quad f(\vartheta, \lambda)=g-\gamma.$$

从球函数定理可知,空间调和正则函数 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$ 可由球面上的 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 单值的确定,其关系如下:

$$T(\rho, \vartheta, \lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda), \qquad \rho_0<\rho, \tag{2}$$

式中 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 为 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的第 i 阶球面函数. 根据球函数定理写成:

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda), \tag{3}$$

$$T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)=\frac{2i+1}{4\pi}\int T(\rho_0, \vartheta', \lambda') P_i(\cos\psi) d\omega', \tag{4}$$

式中 ψ 是由待算点 (ϑ, λ) (在此点上待求定 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的值)到流动点 (ϑ', λ') (此点是积分单元面积所在之处)之间的角距[1].

(4) 式中的 $P_i(\cos\psi)$ 根据球函数的加法定理可写成:

$$P_i(\cos\psi)=P_i(\cos\vartheta) P_i(\cos\vartheta')+2 \sum_{k=1}^{i} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \cos k(\lambda'-\lambda) P_i^k(\vartheta) P_i^k(\vartheta'),$$

$d\omega'$ 为单位球(球的半径为 1)上单元面积,

$$d\omega'=\sin\vartheta' d\vartheta' d\lambda'. \tag{5}$$

在(4)式积分方程中, ϑ', λ' 是积分变量, $P_i(\cos\psi)$ 是积分核, $T(\rho_0, \vartheta', \lambda')$ 是被积函数. 从式中看出,如欲求第 i 阶球面函数 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$, 只需将球面上的 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 变量改为积分变量 ϑ', λ', 并代入积分方程 (4) 中作被积函数即可. 由于积分核 $P_i(\cos\psi)$ 是 ϑ, λ, ϑ', λ' 的函数,故积分后仍为 ϑ, λ 的函数,而与等式左端一致,这一性质在下面推导中还会遇到的.

我们再回到公式 (2). 可以看出,如果能求出第 i 阶球面函数 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 时,就能求出空间的扰动位 $T(\rho, \vartheta, \lambda)$. 因此利用重力测量的基本微分方程 (1), 来求定 $T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 就成为问题的关键.

将 (2) 式代入 (1) 式中得:

$$\left[\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)+\beta \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho_0^{i+1}}{\rho^{i+1}} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)\right]_{\rho=\rho_N(\vartheta, \lambda)}=f(\vartheta, \lambda),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[\alpha \rho_N(\vartheta, \lambda)-\beta(i+1)\right] \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_N(\vartheta, \lambda)}\right)^{i+2} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda)=f(\vartheta, \lambda).$$

令 $Q_i=\alpha \rho_N(\vartheta, \lambda)-\beta(i+1)$ (在大地重力学中 $Q_i=i-1$),则上式可写成:

---

1) 由球面三角形得:

$$\cos\psi=\cos\vartheta \cos\vartheta'+\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\lambda-\lambda').$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(\vartheta, \lambda)}\right)^{i+2} T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda). \tag{6}$$

令

$$H(\vartheta, \lambda) = \rho_N(\vartheta, \lambda) - \rho_0,$$

则

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_N(\vartheta, \lambda)}\right)^{i+2} = 1 - (i+2)\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0},$$

上式只取到 $\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}$ 级，而略去高阶各项，因为这些高阶项均在扁率平方级以上[1]. 将(2)式代入(6)式中，得：

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_0} Q_i T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) - \frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0^2} \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(i+2)T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda). \tag{7}$$

(7)式两端均为 ϑ, λ 的函数，故可根据(4)式的定理展为同阶的球函数. 为了与(7)式中原有的阶号 i 区别起见，在此用 n 来表示新展开的球函数的阶号. 它仍是 $0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, 等正整数. 第 n 阶球面函数可写为：

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_0} Q_i T_i(\rho_0, \vartheta', \lambda') - \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} Q_i(i+2)T_i(\rho_0, \vartheta', \lambda')\right] \times$$
$$\times P_n(\cos\psi)d\omega' = \frac{2n+1}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')P_n(\cos\psi)d\omega' = f_n(\vartheta, \lambda). \tag{8}$$

等式左端第一项，根据球函数正交性定理可写成：

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\sum_{i=0}^{\infty} Q_i T_i(\rho_0, \vartheta', \lambda')\right] P_n(\cos\psi)d\omega' = \frac{1}{\rho_0} Q_n T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda).$$

因此(8)式可写成：

$$\frac{1}{\rho_0} Q_n T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) - \frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0^2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)Q_i T_i(\rho_0, \vartheta', \lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega',$$

移项后得：

$$Q_n T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \rho_0 f_n(\vartheta, \lambda) +$$
$$+ \frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)Q_i T_i(\rho_0, \vartheta', \lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega'. \tag{9}$$

我们用逐渐趋近法来解算积分方程(9)，首先令：

$$Q_n T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) \approx \rho_0 f_n(\vartheta, \lambda).$$

如用 i 来表示阶号，实质不变，即

$$Q_i T_i(\rho_0, \vartheta, \lambda) \approx \rho_0 f_i(\vartheta, \lambda). \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式右端第二项得：

$$Q_n T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \rho_0 f_n(\vartheta, \lambda) +$$
$$+ \frac{2n+1}{4\pi Q_n}\int\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)\rho_0 f_i(\vartheta', \lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega',$$

两端同除 Q_n，则得：

1) 因为地球半径为 6000 公里，地形起伏最大处为 10 公里，则 $\frac{H}{\rho_0}$ 的数量级为扁率级，$\left(\frac{H}{\rho_0}\right)^2$ 为扁率平方级.

$$T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) +$$

$$+ \frac{2n+1}{4\pi Q_n} \int \left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) \rho_0 f_i) \vartheta', \lambda') \right] P_n(\cos\psi) d\omega'. \tag{11}$$

由于公式只导至扁率级，故无需再作趋近，公式 (11) 即我们所需要的解. 如对(11)式两端求和,可得球面上的 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$, 此值仅具有数学上的意义,相当于在保持外空间的扰动位函数不变时,将地面上的 $T(\rho_N, \vartheta, \lambda)$ 解析延展到球面上.

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) f_i(\vartheta, \lambda) \right]_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} f(\vartheta, \lambda) \right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} \left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} i f_i(\vartheta, \lambda) \right]_n. \tag{12}$$

此即球面上函数 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的级数形式,其积分形式也很容易导出. 利用(4)式的原理,可将(11)式中的 $f_i(\vartheta', \lambda')$, $f_n(\vartheta, \lambda)$ 写成:

$$\begin{aligned} f_i(\vartheta', \lambda') &= \frac{2i+1}{4\pi} \int f(\vartheta'', \lambda'') P_i(\cos\psi') d\omega'', \\ f_n(\vartheta, \lambda) &= \frac{2n+1}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\omega', \end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$d\omega'' = \sin\vartheta'' d\vartheta'' d\lambda'',$$

ϑ'', λ'' 是积分变量, (ϑ'', λ'') 是 $d\omega''$ 所在的流动点. ψ' 是固定点 (ϑ', λ') [在此点上待定 $f_i(\vartheta', \lambda')$] 到流动点 (ϑ'', λ'') 之间的角距[1]. 将(13)式代入(11)式中,得:

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0}{Q_n} \frac{2n+1}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Q_n} \frac{2n+1}{4\pi} \int \left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) \rho_0 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2i+1}{4\pi} \int f(\vartheta'', \lambda'') P_i(\cos\psi') d\omega'' \right] P_n(\cos\psi) d\omega',$$

上式中 i, n 与积分变量 ϑ, λ, ϑ', λ' 无关,故可移到积分号之内,即

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi} \int f(\vartheta', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

1) $\cos\psi' = \cos\vartheta' \cos\vartheta'' + \sin\vartheta' \sin\vartheta'' \cos(\lambda' - \lambda'')$.

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times\left[\int f(\vartheta'',\lambda'')\sum_{i=0}^{\infty}(i+2)(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''\right]d\omega'.$$

将等式右端第二项拆为两项得：

$$T(\rho_0,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times\int f(\vartheta'',\lambda'')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'.$$

考虑到公式的收敛性，可作如下的改造：

$$T(\rho_0,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times\int[f(\vartheta'',\lambda'')-f(\vartheta',\lambda')]\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'.$$

因

$$\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''=$$

$$=f(\vartheta',\lambda')\int\sum_{i=0}^{\infty}i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''=0,$$

故

$$T(\rho_0,\vartheta,\lambda)=\frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{2\rho_0}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}f(\vartheta',\lambda')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P(\cos\psi)d\omega'+$$

$$+\frac{\rho_0}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta',\lambda')}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n}P_n(\cos\psi)\times$$

$$\times \int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')] \sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''d\omega'.$$

令

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) = S(\psi),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi') = R(\psi'),$$

则

$$T(\rho_0, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' + \frac{2\rho_0}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} f(\vartheta', \lambda')S(\psi)d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{16\pi^2}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} S(\psi)\int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')]R(\psi')d\omega''d\omega' \qquad (12a)$$

此即本节应求定的公式的积分形式[1].

二、求外空間一点的函数值

设外空间一点的坐标为 $(\rho_k, \vartheta, \lambda)$，$\rho_k$ 为该点的向径，ϑ, λ，为该点的球面坐标，根据 (2) 式此点的函数值应为:

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}} T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda), \qquad \rho_k > \rho_0, \qquad (14)$$

$T_n(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 在上节 (11) 式中已经导出，代入 (14) 式中，并按上节类似的办法推导，可得 $T(\rho_k, \vartheta, \lambda)$ 的级数形式的公式及积分形式的公式. 其级数形式如下:

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}}\frac{\rho_0}{Q_n} f_n(\vartheta, \lambda) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}}\frac{2\rho_0}{Q_n}\left[f(\vartheta, \lambda)\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}\right]_n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_0^{n+1}}{\rho_k^{n+1}}\frac{\rho_0}{Q_n}\left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty} if_i(\vartheta, \lambda)\right]_n. \qquad (15)$$

因

$$\left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0} f(\vartheta, \lambda)\right]_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} f(\vartheta', \lambda')P_n(\cos\psi)d\omega',$$

$$\left[\frac{H(\vartheta, \lambda)}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty} if_i(\vartheta, \lambda)\right]_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int\left[\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\sum_{i=0}^{\infty} if_i(\vartheta', \lambda')\right]P_n(\cos\psi)d\omega' =$$

$$= \frac{2n+1}{4\pi}\int\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}\left[\frac{1}{4\pi}\int f(\vartheta'', \lambda'')\sum_{i=0}^{\infty} i(2i+1)P_i(\cos\psi')d\omega''\right] \times$$

$$\times P_n(\cos\psi)d\omega' = \frac{1}{16\pi^2}\int\frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0}(2n+1)P_n(\cos\psi) \times$$

$$\times \int f(\vartheta'', \lambda'')R(\psi')d\omega''d\omega'.$$

将上列关系代入(15)式中，立即可得积分形式的公式:

1) 用(12)式表示球面上 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的积分形式的公式；用 (12a) 式表示 $T(\rho_0, \vartheta, \lambda)$ 的级数形式的公式.

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0^2}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

$$+ \frac{2\rho_0^2}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0^2}{16\pi^2}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) \times$$

$$\times \int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')] R(\psi') d\omega'' d\omega'. \tag{16}$$

令

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho_k^{n+1}} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) = S(\rho_k, \psi),$$

$$\rho_0^2 d\omega' = d\sigma', \qquad \rho_0^2 d\omega'' = d\sigma'',$$

则

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') S(\rho_k, \psi) d\sigma' + \frac{2}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} S(\rho_k, \psi) d\sigma' +$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} S(\rho_k, \psi) \int [f(\vartheta'', \lambda'') - f(\vartheta', \lambda')] R(\psi') d\omega'' d\omega'. \tag{15a}$$

由公式(15)和(15a)已能求出空间一点的扰动位函数[1]，但有其不便之处，即由于积分核 $S(\rho_k, \psi)$ 是 ρ_k 的函数，当待算点 $(\rho_k, \vartheta, \lambda)$ 的高程改变(此处即向径 ρ_k 的改变)时，则 $S(\rho_k, \psi)$ 就会随之改变，如用模板进行数值积分时，就需制各种不同高程的模板，使计算较为繁杂。同时，我们也有条件对公式(15)和(15a)作进一步的改化，因为无须将完整的 $\left(\frac{\rho_0}{\rho_k}\right)^{n+1}$ 值置于仅达扁率级的公式中，而可展成级数的形式。

令

$$H_0 = \rho_k - \rho_0,$$

即有

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_k}\right)^{n+1} = 1 - (n+1)\frac{H_0}{\rho_0} \qquad \text{(仅取至扁率级)},$$

代入(16)中，略去扁率平方级以上的各项，得：

$$T(\rho_k, \vartheta, \lambda) = \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') S(\psi) d\omega' + \frac{2\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} S(\psi) d\omega' -$$

$$- \frac{\rho_0}{4\pi}\int f(\vartheta', \lambda') \frac{H_0}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{Q_n} P_n(\cos\psi) d\omega' +$$

$$+ \frac{\rho_0}{4\pi}\int \frac{H(\vartheta', \lambda')}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{Q_n} P_n(\cos\psi) \sum_{i=0}^{\infty} i f_i(\vartheta', \lambda') d\omega'. \tag{17}$$

将上式右端第三项拆为两项，使

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{Q_n} P_n(\cos\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n-1+2)(2n+1)}{n-1} P_n(\cos\psi) =$$

---

1) 用(15a)式来表示空间扰动位函数含积分核 $S(\rho_k, \psi)$ 时的积分形式的公式，用(15)式来表示相应的级数形式的公式。