本书适用于本科·大专·专升本·自考及考研复习

最新
高等数学复习指导

(线性代数)

北京大学数学科学学院　罗爱兵　主编
清华大学数学系副主任　韩云瑞　主审

重点难点指导
解题方法点睛
专项技巧一览
精选例题详解

海洋出版社

新世纪高等学校教材配套辅导丛书

最新高等数学复习指导

（线性代数）

（适用于本科、大专、专升本、自考及考研复习）

北京大学数学科学学院　罗爱兵　**主编**
清华大学数学系副主任　韩云瑞　**主审**
赵修坤　吴娟香　罗爱兵　**编著**

海洋出版社

2000 年·北京

图书在版编目(CIP)数据

最新高等数学复习指导/罗爱兵主编 . - 北京:海洋出版社,2000

ISBN 7-5027-5070-3

Ⅰ.最… Ⅱ.罗… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 69812 号

海洋出版社 出版发行

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

三河市欣欣印刷有限责任公司印刷 新华书店经销

2000 年 11 月第 1 版 2000 年 11 月北京第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:35

字数:1200 千字 印数:0001~3000 册

全套(共 3 册)定价:40.00 元

前　言

在新世纪的曙光初现之际，为配合高等学校各科的教学与学生的复习、备考，我们**清华大学、北京大学**部分教学经验丰富的老师经过精心策划和编写，联合推出了这套《新世纪高等学校教材配套辅导丛书》。本书就是根据教育部颁发的高等学校数学教学大纲及指定教材编写的《最新高等数学复习指导》(线性代数)，由**清华大学数学系教授、系副主任　韩云瑞**任主审，**北京大学数学科学学院　罗爱兵**任主编。

线性代数是各类理工科院校一门重要的理论基础课，它不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对学生其它能力的培养起着重要作用。如何更好地指导学生学习这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，以及帮助学生有效地备考，成为我们共同关注的问题。本书的目的也就在于此：为广大教师提供一本好的参考书，为广大学生提供一位好的辅导老师 。

一、本书为高等学校**大学本科、大专、专升本**等各类在校学生线性代数课程的同步辅导教程，亦可作为参加**自学考试、考研**前的复习用书。

二、本书每章中均归纳、罗列出了教学大纲中对本章的**目的与要求**，并且把全章内容列成**本章内容总框图**，使读者一目了然，能对每一章的要点进行系统掌握。

三、本书每一章节中不仅涵括了**基本内容**，更为独特的是我们为读者提供了学习中的**重难点及易犯错误分析**，并对常考知识点进行了总结与指导，以帮助学生在学习过程中少走弯路，从而举一反三地掌握这门课程。

四、本书精心选择例题，按类编排，并对各种解题思路和方法进行了详细的分析、总结和归纳，用**例题解析及技巧点睛**的形式进行重点讲解，以整体提高学生的解题水平。

五、作为此课程的**同步辅导教程**，本书为读者精选了大量有针对性的**同步自测题**。所有习题难度由低到高，解析由浅入深，注意照顾到不同水平层次的学生。

六、作为此课程的**备考指要**，本书最后编选了近年来的考研真题，汇成**考研试题库**并加以解析，还精心组编了若干套**综合模拟题及解析**，使读者对硕士研究生入学考试中有关线性代数试题的形式、难度有一定了解，也便于立志考研的读者有针对性地进行复习和备考。

本书编写阵容强大，编写组织工作认真细致。参加编著的人员还有：华北工学院数学系教师赵修坤(四、九、十章)、吴娟香(六、七、八章)。

由于水平有限，且编写和出版时间仓促，所以尽管我们精益求精，书中难免仍存在不妥或需商榷之处，恳请读者指教并提出宝贵意见。

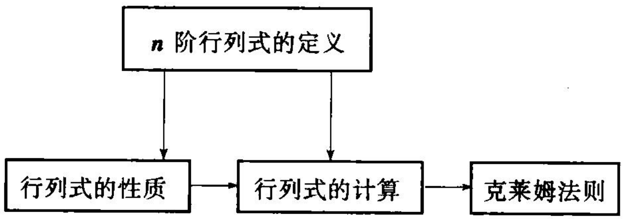
编　　者

2000 年 11 月

目　录

第 1 章　行列式

本章内容总框图



目的与要求

1. 理解 n 阶行列式的定义，掌握行列式的性质．
2. 熟练掌握行列式的计算方法．
3. 掌握克莱姆法则．

1.1　n 阶行列式的定义及性质

基 本 内 容

1. 排列和逆序

(1) 排列

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个数组$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$称为一个 n **元排**

列．n 元排列共有 $n!$ 个．

(2) 逆序和逆序数

在一个排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中，若 $i_t > i_s$，则称这两个数组成一个**逆序**．

一个排列中逆序的总数称为此排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$．若 τ 为奇数，则称$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$为**奇排列**；若 τ 为偶数，则称此排列为**偶排列**．

(3) 对换

排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中，交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次**对换**．对换改变排列的奇偶性．

任意一个 n 元排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$经过若干次对换可变为$(1, 2, \cdots, n)$样的自然顺序排列，且所作的对换次数与排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$有相同的奇偶性．

2. n 阶行列式的定义

(1)“排列逆序”定义

定义　n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{1j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个全排列，$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数．这里 $\sum$ 表示对所有 n 元全排列求和，故是 $n!$ 项的代数和．

(2)“递推”定义

定义　一阶行列式 $A = |a_{11}| = a_{11}$，设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则定义 n 阶行列式 D 为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1i} M_{1i}$$

$$= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} M_{1n}$$

其中，M_{ij} 称为 a_{ij} 的余子式，表示划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列所剩下的

$n-1$ 阶行列式.

3.行列式的性质

性质1 行列式与它的转置行列式值相等,即 $D=D^T$.

性质2 行列式的第 i 行($1\leqslant i\leqslant n$)各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式的记号之外.

推论1 若行列式的某行元素全为零,则该行列式的值为零.

性质3 如果行列式中某一行的所有元素均为两项之和,则该行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的此行的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质4 两行列换,行列式仅改变符号.

推论2 若行列式的两行相等,则行列式值为零.

推论3 若行列式两行成比例,则行列式值为零.

性质5 若把行列式的某一行乘以一个常数加到另一行上去,则行列式值不变.

性质6 行列式按任一行(列)展开

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或 $$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式．

性质7 行列式按某 k 行(列)($1 < k \leqslant n-1$)展开——拉普拉斯定理

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

其中 $t = C_n^k$，而 $N_i(i = 1,2,\cdots,t)$ 为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式；A_i 为 N_i 的对应代数余子式．

4.特殊行列式值

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & {x_3}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

(4) 拉普拉斯定理的两个特殊情形

$$
(\text{i})\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}
$$

$$
(\text{ii})\ \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}
= (-1)^{nm} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}
$$

重难点及易犯错误分析

【例 1】计算行列式

$$
D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)
$$

错误解法 将第1,2行均乘以(-1)加到第3行上,并且同时把第1行及第3行乘以(-1)后加到第2行上,于是得

$$
D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ -2x & 0 & -2y \\ 0 & -2y & -2x \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots(2)
$$

分析 本解法的错误在于没有在完成上一步的基础上来做下一步，而是全从原来的行列式出发，结果本应将(2)式右端的第3行乘以(-1)加到(1)式右端的第2行上，却把(1)式右端的第3行乘以(-1)加到第2行上，形成了(2)中的第2行．为了避免这样的错误发生，在计算不是十分熟练的情况下，最好把步骤写细一些，每一步都在前一步的基础上完成．

正确解法 〔法一〕将第2,3行均加到第1行，然后提取公因子$2(x+y)$，于是得

$$
\begin{aligned}
D &= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} \\
&= 2(x+y)(-x^2+xy-y^2) \\
&= -2(x^3+y^3)
\end{aligned}
$$

〔法二〕将第1,2行乘以(-1)均加到第3行上，然后按第1列展开：

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ 0 & -2y & -2x \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} x+y & x \\ -2y & -2x \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & x+y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} \\
&= -2x\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & x \end{vmatrix} + 2y\begin{vmatrix} 0 & y \\ y & x \end{vmatrix} \\
&= -2(x^3+y^3)
\end{aligned}
$$

【例2】计算

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}
$$

错误解法 将第1行乘以3逐次减去第2,3,…,n行，降阶后再用第一行减去各行，得

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 0 & 7 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 6 & 6 & \cdots & 9-n \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 7 & 6 & \cdots & 6 \\ 6 & 6 & \cdots & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 6 & 6 & \cdots & 9-n \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(2)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(3)
$$

$$
= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}
$$

$$
= -6(n-3)!
$$

分析　这一解法的错误在于将行列式的性质应用得不对."将第1行乘以3逐次减去第2,…,n行"的实质是"将第2,…,n行均乘以-1,然后再将第1行乘以3逐次加到第2,3,…,n行",这样所得到的(1)式的右端已经与D_n相差一个符号$(-1)^{n-1}$.从(2)式到(3)式的运算中犯了同样的错误,于是(2)式与(3)式之间又相差一个符号$(-1)^{n-2}$.两次错误造成最后的结果不是D_n,而是

$$
(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}D_n = -6(n-3)!
$$

于是可知　　$D_n = 6(n-3)!$

正确解法　〔法一〕第$1,2,\cdots,n-1$列依次减去第n列,得

$$
D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3-n & 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & n \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)
$$

再直接应用n阶行列式的定义,则

$$
D_n = (-1)^{\tau(1\,2\,n\,4\,5\cdots n-1\,3)} \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 \cdots (3-n)
$$

$$=(-1)^{n-3+n-4}\cdot(-1)^{3}6(n-3)!$$

$$=6(n-3)!$$

〔法二〕由〔法一〕中的(1)式,将第3列与第 n 列对换,再按第3行展开,得

$$D_n=(-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot 3\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(3-n)$$

$$=6(n-3)!$$

〔法三〕由〔法一〕中的(1)式按第3行展开,得

$$D_n=3\cdot(-1)^{3+n}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4\\ 3-n & 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(2)$$

再按第3列展开,得

$$D_n=3\cdot(-1)^{3+n}\cdot(-1)^{n-1+3}\cdot(3-n)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-4)$$

$$=6(n-3)!$$

〔法四〕由〔法三〕中的(2)式取前2行,根据拉普拉斯展开定理

$$D_n=3\cdot(-1)^{3+n}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4\\ 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n\end{vmatrix}$$

$$=6\cdot(-1)^{3+n}\cdot(3-n)\cdot(-1)^{n-3+1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-4)$$

$$=6(n-3)!$$

【例3】计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

错误解法 〔法一〕第 n 列乘以 $(-\frac{1}{a})$ 加到第 1 列上，则得

$$D=\begin{vmatrix} a-\frac{1}{a} & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a-\frac{1}{a})a^{n-1}=a^n-a^{n-2}$$

〔法二〕按第 1 行展开，则有

$$D=a^n+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}a^{n-2}$$

分析 〔法一〕中忽略了 $a=0$ 的情况，此法只适用于 $a\neq0$ 的情况；〔法二〕在按第 1 行展开过程中有错误，即(1)式右端第 2 项应为

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=-a^{n-2}$$

于是 $D=a^n-a^{n-2}$

正确解法 〔法一〕将第 n 行乘以 $(-a)$ 加到第 1 行上，得

$$D=\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&1-a^2\\0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix}0&0&\cdots&1-a^2\\a&0&\cdots&0\\0&a&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot(1-a^2)\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot a^{n-2}$$

$$=-(1-a^2)\cdot a^{n-2}=a^n-a^{n-2}$$

〔法二〕将第 n 行依次与上一行对换，经过 $n-2$ 次对换成为第2行，再将第 n 列依次与前一列对换，经过 $n-2$ 次对换成为第2列，于是选取第1，2行，按拉普拉斯定理展开

$$D=(-1)^{n-2}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\begin{vmatrix}a&1&0&\cdots&0\\1&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a&1\\1&a\end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\cdot a^{n-2}$$

$$=(a^2-1)a^{n-2}=a^n-a^{n-2}$$

〔法三〕当 $a=0$ 时，$D=0$；当 $a\neq0$ 时，第1行乘以$\left(-\dfrac{1}{a}\right)$加到第 n 行上，得

$$D=\begin{vmatrix}a&&&1\\&a&&\\&&\ddots&\\0&&&a-\dfrac{1}{a}\end{vmatrix}$$

$$=a^{n-1}\left(a-\frac{1}{a}\right)=a^n-a^{n-2}$$