面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数导引

郭聿琦 岑嘉评 徐贵桐 编著

科学出版社

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数导引

郭聿琦　岑嘉评　徐贵桐　编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书是面向21世纪的高等代数课程教材，也是"高等教育面向21世纪教材内容和课程体系改革计划"的一项研究成果.

本书分上下两篇.上篇主要介绍矩阵代数、行列式、线性空间、对称双线性度量空间、Euclid空间等.下篇介绍线性变换、线性空间关于线性变换的一类直和分解、正交与对称变换、矩阵的相似标准形等内容.全书共九章，每章后设有相当的习题，各章节给出若干"注意"，基本上可供习题课使用.本书的主要特点是突出了"线性相关性"并贯穿全书；在理论的具体开发上，使用了许多独特的处理方法和技巧.

本书可供高等学校数学系各专业师生及相关的数学工作者使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数导引/郭聿琦，岑嘉评，徐贵桐编著.-北京：科学出版社，2001
(面向21世纪课程教材)
ISBN 7-03-009225-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①郭… ②岑… ③徐… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第06751号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
源海印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年5月第 一 版 开本：710×1000 1/16
2001年5月第一次印刷 印张：20
印数：1—4 000 字数：358 000

定价：26.00元

序　　言

郭聿琦教授是我的学生,香港中文大学数学系讲座教授岑嘉评博士是我和郭聿琦教授十余年来的学术研究合作者.我非常乐于为他们和徐贵桐教授共同编著的《线性代数导引》作此序言.

与通常教材相比,本教材删去了 U 空间(从而删去了 Hermite 型),加深了其他线性代数的核心内容,实现了知识传授中的"少而精".

在该教材内容的宏观组织上,作者设置了一条明线,加强了一条暗线.

明线是以两个较为具体的问题(线性方程组的一般理论问题,实二次型的主轴问题)的提出、分析、抽象、解决和引伸为线索将"线性代数"的基本内容组织成包括若干章节的上下两篇.上篇用前一问题组织"线性空间理论",并在前一问题的讨论中充分使用它,下篇用后一问题组织"线性变换理论",并在后一问题的讨论中充分使用它;而多项式则作为一个附录出现(以所涉及的"线性代数"的需要取舍它的内容).

暗线则是"线性相关性"这一"线性代数"的灵魂在教材中的明显贯穿,例如,"n 维 Euclid 空间中两两成钝角的一组向量至多含有 $n+1$ 个向量"的事实,用更直接的"线性相关性"的语言给出更深刻的陈述:"n 维 Euclid 空间中两两成钝角的 m 个向量中任意 $m-1$ 个都是线性无关的",等等.

在教材内容的具体阐述上,"几何观点"与"矩阵方法"并重且贯穿于教材的始终,用"几何"语言陈述的概念和事实总给出其矩阵表示,用矩阵语言陈述的概念和事实总给以"几何"解释,有时则反复交错使用二者,例如,二次型主轴的存在性及其求法的讨论;充分使用矩阵的分块运算(在"矩阵乘法结合律的证明"和"Cramer 法则的证明"中也使用了矩阵的分块运算,这在其他教材中未曾见过,扩大了使用矩阵分块运算的范围)和初等变换方法(用归纳法定义行列式等等,从而扩大了使用初等变换方法的范围);在不增加难度但增加深度的原则下,尽量揭示更为一般的原理以突出一些基本事实的本质(n 维复空间关于线性变换的根子空间分解和 Jordan 标准形都作为一般数域上更为一般的事实的推论而获得).在教材编写过程中作者遵循了由浅入深、由易到难、由具体到抽象,以及难点分散的原则,注重理论的背景和理论的应用,显示了抽象的必要和威力.

本教材从宏观框架到微观处理,处处凝聚着作者讲授"高等代数"多年来的心得体会,在理论开发上使用了许多独特的处理方法和技巧,不乏新颖之处.

总之,这一教材内容紧凑、系统性和节奏感都很强,能很好地实现知识传授中的能力培养和素质提高,是一本适用于高等院校数学系各专业“高等代数”课程的有特色的好教材.

许永华

2000.4.于复旦大学

前　　言

1994年，在为国家教委次年在云南大学设置“数理人才基地班”做准备时，我们编写了一本供该班使用的“高等代数讲义”（它以第一作者在兰州大学工作时为数学系“高等代数”课程编写的一本“线性代数”讲义为蓝本，这一讲义在兰州大学曾使用过数次）. 从1995年起，云南大学数学系有4位教师以它作为“高等代数”课程的教材连续使用过5次. 本书就是在这一讲义的多次使用并多次修改的基础上形成的，也是在全系师生，特别是在使用过这一讲义的张荣华博士和芮昌祥博士的推动下（据说，它能较好地实现知识传授中的数学能力的培养和数学素质的提高）完成的.

本教材从宏观框架到微观处理都作出了许多大胆的尝试，前者，由目录一目了然，后者，从内容的字里行间可以看出许多新的处理方法和技巧.

本教材适合作高等院校数学系“高等代数”课程的教材（供一学年使用）. 鉴于代数学的若干基本事项已置于作为附录的“整数，数域与多项式”里，使用本书时，应先讲这一附录；上下两篇开始处的引言都未必需要细讲，特别是其中的例子，基本上可以作为学生的自读材料.

作者在此谨向支持并鼓励本书出版的云南大学教务处处长杨家禾教授、数学系系主任杨华康教授、副系主任杨富春教授和李耀堂博士，向使用过它的初稿并提出若干修改建议的张荣华博士和芮昌祥博士，向仔细阅读过原稿并提出许多修改意见的陈建飞博士、孔祥智博士、在读博士生刘耀军、何勇、陈旭谨、访问学者张姗梅、在读硕士研究生王正攀和王转德，向对本书进行了深入细致的审查，提出了中肯的评价和修改意见的审核小组的孟道骥教授（南开大学）、尤承业教授（北京大学）、刘桂珍教授（山东大学）和曹之江教授（内蒙古大学），向签署意见推荐本书为“面向21世纪课程教材”的高校理科数学力学教学指导委员会主任、“面向21世纪数学类专业课程体系和教学内容改革”项目组组长姜伯驹院士（北京大学）表示诚挚的谢意.

第一作者也是江西师范大学兼职教授. 本书在撰写中得到江西师范大学数学与信息学院的大力支持与帮助，在此我们也向江西师范大学致谢。

限于作者的水平，本书的不妥之处在所难免，我们热忱欢迎使用者多多给予指正.

郭聿琦（云南大学，江西师范大学）
岑嘉评（香港中文大学）
徐贵桐（云南大学）

2000年3月于昆明

目　　录

上篇　线性方程组的一般理论问题

引　言　线性方程组的建立与消元解法 …… 1
§1　线性方程组的建立 …… 1
§2　消元法与增广矩阵上的某些初等变换 …… 5
§3　几点注记 …… 12
习题 …… 13
第一章　矩阵代数 …… 16
§1　矩阵代数 …… 16
§2　矩阵的初等变换与等价标准形 …… 22
§3　分块矩阵 …… 26
习题一 …… 33
第二章　一类特殊线性方程组的行列式法则（Cramer 法则） …… 37
§1　n 阶（方阵的）行列式 …… 37
§2　行列式的基本性质（特别地，方阵代数与行列式）及其应用 …… 41
§3　线性方程组的 Cramer 法则 …… 50
§4　行列式的展开式 …… 55
习题二 …… 57
第三章　线性方程组的一般理论 …… 62
§1　n 元向量的线性相关性与方程组的可解性 …… 62
§2　矩阵的秩与方程组的可解性 …… 67
§3　线性方程组的解的结构 …… 75
习题三 …… 86
第四章　线性空间与线性方程组 …… 92
§1　线性空间与其子空间 …… 92
§2　维数、基底、坐标与 Cramer 法则 …… 96
§3　坐标变换与 Cramer 法则 …… 102
§4　线性空间的同构与线性方程组理论的一个应用 …… 106
§5　线性方程组解集的几何结构 …… 109
习题四 …… 111

第五章 对称双线性度量空间与线性方程组 …… 116
§1 线性空间上的线性和双线性函数 …… 116
§2 对称双线性度量空间与线性方程组可解的几何解释 …… 121
§3 Euclid 空间 …… 125
§4 向量到子空间的距离与线性方程组的最小二乘法 …… 133
习题五 …… 138

下篇 实二次型的主轴问题

引 言 二次型主轴问题的几何原型 …… 143
§1 二次型的一般问题 …… 144
§2 从二次曲线讲起——实二次型主轴问题的几何原型 …… 146
习题 …… 153
第六章 线性空间上的线性变换 …… 154
§1 线性变换及其运算和矩阵表示 …… 154
§2 不变子空间，特征根与特征向量 …… 164
§3 特征多项式与最小多项式 …… 169
习题六 …… 182
第七章 线性空间关于线性变换的一类直和分解 …… 190
§1 线性变换的象与核 …… 190
§2 线性空间关于线性变换的一类直和分解 …… 195
习题七 …… 199
第八章 Euclid 空间上的两类线性变换与二次型主轴问题 …… 200
§1 正交变换与对称变换 …… 200
§2 二次型的主轴问题 …… 206
§3 一个应用（将一对实二次型同时化简为平方和） …… 213
§4 二次型的一般问题 …… 219
习题八 …… 237
第九章 引伸—— 一般矩阵的（相似）标准形 …… 241
§1 λ矩阵及其等价标准形 …… 241
§2 λ矩阵的行列式因子，不变因子和初等因子 …… 248
§3 矩阵的相似与其特征矩阵的等价 …… 252
§4 矩阵的不变因子与 Frobenius（有理）标准形 …… 255
§5 矩阵的初等因子与 Jacobson（特例为 Jordan）标准形 …… 258
习题九 …… 264

附录　整数，数域与多项式
§1　集合，映射与运算 …… 268
§2　整数 …… 273
§3　数域 …… 278
§4　多项式与多项式函数 …… 279
§5　带余除法和余数定理 …… 283
§6　最大公因式与最小公倍式 …… 285
§7　因式分解与重因式 …… 291
§8　C，R 和 Q 上的多项式 …… 297
习题 …… 303
参考文献 …… 310

上篇　线性方程组的一般理论问题

引言　线性方程组的建立与消元解法

线性方程组也叫做一次方程组，是读者并不陌生的数学概念和数学对象.早在初等数学中，我们就讨论过一元一次方程和二元一次方程组，它们是线性方程组的两种最简单的情形.随着人类社会实践和科学实验的不断发展，我们面对着的是讨论含有更多(几十个，几百个，乃至上千个)未知量的线性方程组的求解问题.我国古代出现于秦汉之际的重要数学著作《九章算术》的方程章就曾详细讨论过线性方程组的解法，为“线性代数”铺下了第一块基石.

线性方程组的求解问题是线性代数计算方法的课题.讨论线性方程组的一般理论问题，从中找出规律性的东西，以建立尔后讨论其求解问题的基础，则是线性代数的课题了.

在以这一课题的提出、分析和理论的建立为线索组织起来的内容中，有矩阵代数、行列式、n 元向量、矩阵的秩、线性空间、双线性度量空间(Euclid 空间)等线性代数的若干最基本的概念.在这一课题的讨论中，顺便获得的这个知识面是进一步学习线性代数的基础，特别地，它为讨论下一课题所必需.

另外，这里开发线性方程组一般理论的方法(下一课题的讨论也一样)是线性代数的典型方法(以变量的可逆线性代换为手段去揭示讨论对象的表现形式与内在特性的联系).为实现知识积累过程中的能力形成，希望读者在学习时很好地体会这一点.

§1　线性方程组的建立

就自然现象的本来面目而言，变量之间的非线性依赖是绝对的，线性依赖是相对的，纯粹的线性依赖是几乎不存在的.但是，对于许多现象，当忽略若干次要因素，理想化一点的时候，线性依赖的简单法则在不同程度上会很好地符合实际情况.因此，在研究变动的非线性依赖时，“线性化”就成了一个重要的方法，这就是:在一定条件下曲线可以转化为直线，说得具体一

点，任意“光滑”函数(即关于每一变量都有连续偏微商的函数)，当独立变量变化很小时，接近于某一线性函数.事实上，一可微函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的增量，除了差一高阶无穷小，等于它的全微分

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n,$$

它是独立变量增量$\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$的线性齐次函数.于是，线性函数(线性方程)以及线性函数组(线性方程组)作为客观事物的数学模型就提出来了.电子计算机的出现和发展解决了原来难于求解的含大量未知量的线性方程组的问题，促进了线性代数方法的广泛应用和发展.

我们从几个简单的例子来看看线性方程组的建立.

例 1 (物资调运问题)　有3个生产同一产品的工厂A_1,A_2和A_3，其年产量分别为40(吨)，20(吨)和10(吨)，该产品每年有两个用户B_1和B_2，其用量分别为45(吨)和25(吨)，由各产地A_i到各用户B_j的距离C_{ij}(公里)如下表所示($i=1,2,3,j=1,2$).各厂的产品如何调配才能使运费最少?

	A_1	A_2	A_3
B_1	45	58	92
B_2	58	72	36

为了解决这个问题，我们假设各厂调运到各用户的产品数量分别如下表所示.

	A_1	A_2	A_3
B_1	x_1	x_2	x_3
B_2	x_4	x_5	x_6

那么，容易看出，3个厂的总产量与两个用户的总用量刚好相等，所以对产地来说产品应全部调出，因之有

$$x_1+x_4=40, \tag{1}$$

$$x_2+x_5=20, \tag{2}$$

$$x_3+x_6=10. \tag{3}$$

同时对用户来说调来的产品刚好是所需要的，因之又有

$$x_1+x_2+x_3=45, \tag{4}$$

$$x_4+x_5+x_6=25. \tag{5}$$

从(1)到(5)就是$x_1,\cdots,x_6$应满足的一些条件.

我们再来看如何刻画运费.我们知道，在道路情况相同的情况下运费与

距离成正比.因此把 x_1(吨)的货物由 A_1 运到 B_1 的运费为 $45x_1$ 的倍数，而把 x_4(吨)的货物由 A_1 运到 B_2 的运费为 $58x_4$ 的同一倍数，…….因此，它们的和

$$S = 45x_1 + 58x_2 + 92x_3 + 58x_4 + 72x_5 + 36x_6 \tag{6}$$

就可以用来刻画运费.

于是，我们的问题是:如何选择非负数 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 使之满足(1)～(5)而使和数 S 最小，也就是说要求出方程组(1)～(5)的一个非负解，使 S 最小，这就是物资调运问题的数学模型.

这样，物资调运问题就化成了数学问题.而这个问题的解决，首先依赖于我们对方程(1)～(5)的研究.在方程(1)～(5)中，每一项都含有一个未知量(计算到次数).和初等数学一样，这类方程我们称之为线性方程.几个线性方程联立在一起，称之为线性方程组.因此我们说方程(1)～(5)构成了一个有 6 个未知数 5 个方程的线性方程组.

例 2 假定给了图 1 所示的一个电路，各支路阻抗分别为:$z_1=1, z_2=9, z_3=2, z_4=9, z_5=6$，电源电势为 $E=100$.求各支路的电流.

这是一个电工学中的问题.

为了解决这个问题，我们首先假设各支路的电流为 $i_1, i_2, \cdots, i_5$(如图 1 所示).那么，根据电工学的定律:在各节点上，流入该节点的电流总和等于流出该节点的电流总和.因此有

$$i_1 = i_2 + i_3, \tag{7}$$
$$i_3 = i_4 + i_5. \tag{8}$$

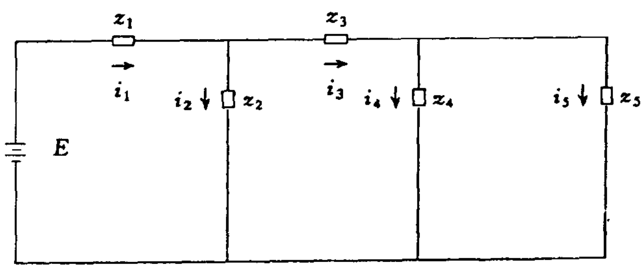

图 1

又根据电工学的定律:循行一闭合回路时，在循行过程中各电位升的总和等于各电位降的总和.因此又有

$$E = i_1z_1 + i_2z_2, \quad 或 \quad 100 = i_1 + 9i_2, \tag{9}$$
$$i_2z_2 = i_3z_3 + i_4z_4, \quad 或 \quad 9i_2 = 2i_3 + 9i_4, \tag{10}$$
$$i_4z_4 = i_5z_5, \quad 或 \quad 9i_4 = 6i_5. \tag{11}$$

于是，要求出各支路电流，就需要求解由(7)到(11)组成的线性方程组．这一有 5 个未知数、5 个方程的线性方程组就是上面电工学问题的数学模型．这样，这个电工学问题又化成了线性方程组问题．

例 3　数域 P 上的一个四次多项式

$$f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \tag{12}$$

其系数不知，但知道 $f(x)$ 在 5 个点的值：

$$\begin{aligned} f(-3) &= 48, \\ f(-1) &= -10, \\ f(0) &= -3, \\ f(1) &= 4, \\ f(2) &= 23. \end{aligned} \tag{13}$$

要确定这一个多项式．

这是一个所谓的多项式插值问题．类似的问题在数学中经常碰到．

现在我们来解例 3．(13)即为

$$\begin{aligned} 81a_0-27a_1+9a_2-3a_3+a_4 &= 48, \\ a_0-a_1+a_2-a_3+a_4 &= -10, \\ a_4 &= -3, \\ a_0+a_1+a_2+a_3+a_4 &= 4, \\ 16a_0+8a_1+4a_2+2a_3+a_4 &= 23. \end{aligned}$$

这样就得到了以 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 为未知数的上述 5 个方程组成的线性方程组．

这样的例子还有很多．

总之，我们看到了，有不少实际问题可以化成线性方程组的问题．这些方程组包含的未知数不只一两个，而是更多．为了解决这些问题，过去所学的关于一元一次方程和二元一次方程组的知识已经不够用了．这里我们需要讨论一般的有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组，而且 m 不一定等于 n．

怎样从实际问题中提出线性方程组这样的数学问题呢？我们没有一个一成不变的公式，必须根据实际问题的特殊性，具体情况具体分析．但原则上可分为两步：(i)根据问题的需要，将要寻找的量作为未知量用文字表示出来，并确定对未知量提供原因和制约的已知量；(ii)将已知量与未知量的内在联系表现为一组线性方程．这样，所得到的线性方程组就成为实际问题里已知量与未知量所共居的统一体的数学模型了．为了很好地化实际问题为数学问题，我们不仅要懂数学，还要对实际问题有深入的了解，了解实际问题中所出现的自然现象的内在规律．例如在例 2 中，如果不了解电工学的定律，

就无法列出方程式;同时，还要认真分析实际问题，有时已知条件不很明显，需要我们细致地分析才能知道,如例1中的方程(1)～(5)，它们都是由我们发现总产量同总消耗量相等这一事实才列出来的.

今后，为讨论方便，我们一般地用 x 表示未知数;用不同的脚标区别不同的未知数(如例1中，我们用 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 表示了6个未知数).一般地，一个问题中出现了 n 个未知数，我们就用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来表示它们，这时如果方程有 m 个，我们的线性方程组就写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{$*_1$}$$

或者简写成

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \\ i=1,2,\cdots,m, \end{cases}$$

这里左端的 a_{ij} 是已知数，它是第 i 个方程中第 j 个未知数 x_j 的系数，$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$;$b_i$ 也是已知数，它是第 i 个方程的常数项，$i=1,2,\cdots,m$.如果($*_1$)的所有系数和常数项都属于同一个数域 P，那么我们称($*_1$)为数域 P 上的线性方程组的标准形式.前面的3个具体的线性方程组都可以写成($*_1$)的形式.

§2 消元法与增广矩阵上的某些初等变换

由上面的讨论，我们知道，线性方程组是体现了某些客观已知量与未知量的内在联系的一种数学模型，这样的模型一旦建立起来，接下来就是如何解线性方程组了.

在初等数学中，关于二元、三元线性方程组，有一个叫做“消元法”的求解方法.例如，关于下面的由两个未知数两个方程组成的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 & (14) \\ \dfrac{3}{2}x_1-x_2=0, & (15) \end{cases}$$

先用2乘(15)，得到上方程组的一个同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 1 & (14) \\ 3x_1 - 2x_2 = 0, & (16) \end{cases}$$

再将(14)的 -3 倍加到(16)上，又得到一新的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 & (14) \\ \quad -5x_2 = -3, & (17) \end{cases}$$

解消去了 x_1(即使得 x_1 的系数为零)的一元线性方程(17)，得 $x_2=\frac{3}{5}$；将其代入(14)得 $x_1=\frac{2}{5}$. 这样就解出了原线性方程组.

关于任意自然数 n 和 m，上面的解题方法对于 n 个未知数 m 个方程的方程组$(*_1)$有普遍的意义，这就是，对线性方程组$(*_1)$的方程施行某些变换，逐步地得到一系列同解方程组，使某些未知数在较多的方程中消去，将求解方程组归结到求解一系列一元线性方程，而后者是我们熟知的. 这一消元法本质上是通过线性方程的某些变形去揭示方程组中未知量对已知量的依赖的过程，最终将未知量表现为已知量的显函数.

在正式介绍求解线性方程组的消元法之前，我们必须明确“线性方程组的解”、“解线性方程组”、“同解方程组”等概念，并把“消元法”精确化，弄清它的依据.

定义 1　在数域 P 上的线性方程组$(*_1)$中，若以 P 中的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分别取代未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得$(*_1)$的各式都成立(成为恒等式)，则称 P 上的 n 元有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

为$(*_1)$的一个解. 解方程组$(*_1)$就是求出$(*_1)$的所有解. 没有解的方程组称为无解方程组.

依这一定义，关于可以视为任意数域 P 上的由(14)和(15)组成的方程组，P 上的二元有序数组$\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right)$确为它的一个解(验证即知)；而且上面的讨论指出这个解是它的惟一解. 因此我们找出了它的所有解，即解出了它.

定义 2　下面的线性方程组是一与$(*_1)$含同样多未知数的线性方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = d_i \\ i = 1,2,\cdots,l. \end{cases} \qquad (*_2)$$

若$(*_1)$的解也是$(*_2)$的解，反之亦然，则称$(*_1)$与$(*_2)$等价或同解.

定义 3　令 A,B 为 P 上线性方程组$(*_1)$的两个方程，$s,t\in P$. 称$(*_1)$的下述 3 种变换为$(*_1)$的三种初等变换：

(1) 以 sA(s 乘 A 的两边所得到的方程)取代 A，$s\neq 0$;

(2) 以 $A+tB$(A 的两边对应加 tB 的两边所得的方程)取代 A，$A\neq B$；

(3) 交换 A、B 的位置.

定理 4 对($*_1$)施行一次任意一种初等变换，所得的方程组($*_2$)与($*_1$)同解.因此，对($*_1$)逐次施行一系列初等变换，最终得到的方程组仍与($*_1$)同解.

证明 容易知道，上述三种初等变换都是可逆的，即若对($*_1$)施行一种初等变换得($*_2$)，则对($*_2$)可施行同一种类的初等变换得($*_1$).例如，若用 $A+tB$ 取代 A 由($*_1$)得($*_2$)，则在($*_2$)中用 $(A+tB)+(-t)B$ 取代 $A+tB$ 便由($*_2$)得($*_1$).

因此，我们只须证明，当($*_1$)经由一种初等变换得($*_2$)时，($*_1$)的解也是($*_2$)的解.我们仍以第二种初等变换为例作一证明.令 $C=A+tB$.于是，除($*_1$)的 A 和($*_2$)的 C，($*_1$)与($*_2$)所含的其他方程是完全一样的，而由($*_1$)的任一解适合 A 、B 知，($*_1$)的任一解适合 C，因此($*_1$)的解都是($*_2$)的解.

消元法就是对原方程组逐次进行一系列初等变换，使得所获得的同解方程组里某些未知数被“充分地”消去，以暴露原方程组的解.下面，我们将讨论消元法，而且是在线性方程组($*_1$)的一个简化的形式上进行.

定义 5 关于任意自然数 s 和 t，数域 P 中的 st 个数

$$c_{ij}, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,t$$

排成的一个 s 行 t 列的数表

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{st} \end{bmatrix}$$

称为 P 上的一个 s 行 t 列(或 $s\times t$)矩阵.它也简记为

$$(c_{ij})_{s\times t} \text{ 或 } (c_{ij}),$$

c_{ij} 称为这一矩阵的 (i,j) 元素，$i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,t$.当 $s=t$ 时，$s\times s$ 矩阵也称为 s 阶方阵，$(c_{ij})_{s\times s}$ 有时也记为 $(c_{ij})_s$.

定义 6 相对于线性方程组($*_1$)，我们称下面的两个矩阵分别为($*_1$)的增广矩阵和系数矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (*_1)'$$

和$(a_{ij})_{m\times n}$.它们分别是$(*_1)$的已知量(系数和常数项)的总体和$(*_1)$的系数的总体，都是由$(*_1)$中抽出来，但保持它们的“上下左右”的顺序构成的.

$(*_1)$的性质在其增广矩阵上得到充分反映，后者是前者的抽象，完全能代表前者.

相应于定义3，我们有

定义7　称数域P上$m\times n$矩阵的下述变换为矩阵的初等变换：

(1) k乘矩阵的第l行(列)，记为$[l(k)](\{l(k)\}), k\in P, k\neq 0, l=1,2,\cdots,m\ (l=1,2,\cdots,n)$；

(2) 将矩阵的第s行(列)的k倍加到第t行(列)上，记为$[t+s(k)](\{t+s(k)\}), k\in P, s,t=1,2,\cdots,m\ (s,t=1,2,\cdots,n), s\neq t$($[t+s(-k)](\{t+s(-k)\})$也写作$[t-s(k)](\{t-s(k)\})$)；

(3) 交换矩阵的第s，t行(列)，记为$[s,t](\{s,t\}), s,t=1,2,\cdots,m\ (s,t=1,2,\cdots,n)$.

注意8　(i)对矩阵施行一个(1)，再施行一个(2)，我们也合起来表示为$[t(k_1)+s(k_2)](\{t(k_1)+s(k_2)\})$.显然，(1)，(2)也都是它的特例.相应的注意也可对定义3作出.(ii)行(列)的初等变换(3)可以经由反复施以另二种行(列)的初等变换实现.(iii)反复施以行(列)的初等变换(2)可以实现交换两行(列)，其中一行(列)变号.

联系定义3与定义7，对$(*_1)$施行一个初等变换，相当于对其增广矩阵施行一个相应的行的初等变换，消元法化简$(*_1)$相当于用行的初等变换化简其增广矩阵$(*_1)'$，就一线性方程组的增广矩阵来这样实现消元法，当然是方便的，而且能建立起一种便于陈述的方法.《九章算术》的方程章就是这样解线性方程组的.

这样解线性方程组时，为了陈述的方便和表达的醒目，除了行的三种初等变换，我们也对增广矩阵的前n列施行初等变换(3)，这相当于对方程组施行整体上的未知数(连同系数)的颠倒顺序，重新排列.

注意9　当最终将$(*_1)$的增广矩阵$(*_1)'$的前n列$1,2,\cdots,n$排成$i_1,i_2,\cdots,i_n$时，原方程组的一个解

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

在最终的同解方程组中是作为解

$$(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n})$$

的面目出现的.

定理10　通过行的三种初等变换和前n列的初等变换(3)，线性方程组$(*_1)$的增广矩阵