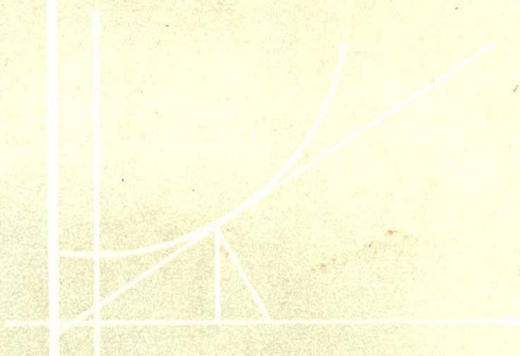
高等数学的
解题方法和技巧 ①

GAODENG
SHUXUE DE
JIETI
FANGFA
HE
JIQIAO

游 兆 永 编著



陕西科学技术出版社

高等数学的解题方法和技巧

（一）

游兆永　编著

陕西科学技术出版社

高等数学的解题方法和技巧

（一）

游 兆 永 编著

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.75 字数 139,000

1981年3月第1版 1985年1月第3次印刷

印数 89,001—122,000

统一书号：7202·22 定 价：0.91元

前　言

求解一个数学问题，要用到若干有关的数学概念、定理、公式。但是怎样运用这些概念、定理和公式来解题，却有许多方法和技巧。尤其是有些高等数学问题要用很巧妙的方法或很高的技巧才能解决。因此，要学好高等数学就必须掌握一定的解题方法和技巧，为此作者根据自己多年积累的资料，编写成《高等数学的解题方法和技巧》一书，通过解算例题介绍了微积分和线性代数方面的技巧；数值近似计算与数据处理的方法和技巧，工程问题近似方法的技巧，数学各分支的方法和技巧举例等。拟分册陆续出版。

本书系第一分册，主要讲述数学归纳法；不等式的证法，求极限的方法，无穷级数的求和法以及求行列式值的方法等方面的解题方法和技巧。各章选有典型习题，并附有答案、略解或提示。本书可供理工科大学及有关电视、业余、函授等高等院校师生学习，也可供科技人员及有志于自学高等数学的知识青年参考。

目　录

第三章 求极限的方法

第四章 无穷级数的求和法

第五章　求行列式值的方法

第一章　数学归纳法

§1　数学归纳法的基本形式

联系一个自然数（正整数）的命题常可用数学归纳法来证明。把联系自然数 n 的命题记为 $P(n)$，使用数学归纳法的最简单的步骤（数学归纳法的基本形式）是：

① 证明命题 $P(1)$，即证明命题 $P(n)$ 当 $n=1$ 时成立；

② 假设命题 $P(k)$ 成立，并由此推出命题 $P(k+1)$ 成立，即假设命题 $P(n)$ 当 $n=k$ 时成立，并由此推出命题 $P(n)$ 当 $n=k+1$ 时也成立。这一部分的推理，要求对任意正整数 k 均有效。

论证了上述两点以后，便证明了命题 $P(n)$ 当 n 为任意正整数时均成立。根据是：由①得命题 $P(1)$ 成立，在②中取 $k=1$，即由 $P(1)$ 成立可推出 $P(2)$ 成立，故命题 $P(2)$ 成立。再在②中取 $k=2$，即由 $P(2)$ 成立可推出 $P(3)$ 成立，故命题 $P(3)$ 成立。继续在②中取 $k=3，4，5，\cdots$ 便顺次得证命题 $P(4)，P(5)，P(6)，\cdots$ 成立。于是命题 $P(n)$ 当 n 为任意正整数时均成立。

例 1　证明自然数平方和公式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (1)$$

［**证**］　当 $n=1$ 时，上式成为

$$1^2=\frac{1}{6}\times1\times2\times3 \quad（显然成立）。$$

假设公式(1)当 $n=k$ 时成立，即设

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

上式左右端分别加上 $(k+1)^2$，左端成为

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

右端成为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{2k^2+7k+6\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\end{aligned}$$

按等式左右端加上同一个数，仍得等式，故

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\end{aligned}$$

即公式(1)当 $n=k+1$ 时也成立。两点证完，故公式(1)当 n 为任意正整数时均成立。[证完]

注 只论证①或只论证②都不能保证命题 $P(n)$ 对任意正整数 n 均成立。例如：

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+n^2\\&=(n-1)(n-2)\cdots(n-100)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

上式右端第一项是

$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ \cdots,\ n-99,\ n-100$$

的连乘积，这个连乘积当 $n=1, 2, \cdots, 100$ 时都等于 0 。由此，上式当 $n=1,2,\cdots,100$ 时都成立，但 n 用大于 100 的任意正整数代入时便不能成立。这个例子说明只论证①，甚至证明了命题 $P(1)$，$P(2)$，$\cdots$，$P(99)$，$P(100)$，仍不能肯定 $P(n)$ 对任意正整数 n 成立。再看下式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (2)$$

假设上式当 $n=k$ 时成立，即设

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=1+\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

把上式左右端加上 $(k+1)^2$，按例 1 的论证，得

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&\quad=1+\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\end{aligned}$$

即 (2) 式当 $n=k+1$ 时也成立。若用 $n=1$ 代入 (2)，则

$$1^2=1+\frac{1}{6}\times1\times2\times3$$

上式成为 **1=2**，显然不成立，即命题 $P(1)$ 不成立。由此，虽然能从 $P(k)$ 成立推出 $P(k+1)$ 成立，但 (2) 式对任意正整数 n 都不成立。

上述数学归纳法的基本形式可稍为推广如下：若对于某个整数 s 论证了

① 命题 $P(s)$ 成立；

② 对任意不小于 s 的整数 k（即 $k\geqslant s$），假设命题 $P(k)$ 成立，都能推出 $P(k+1)$ 成立。

则命题$P(n)$对任意不小于s的整数n均成立。

例 2　若p为大于-1并且不等于0的任意数，正整数$n\geqslant 2$，证明

$$(1+p)^n>1+np. \tag{3}$$

[**证**]　由于(3)式是严格的大于，当$n=1$时，(3)式不成立。当$n=2$时

$$(1+p)^2=1+2p+p^2>1+2p$$

（由$p\neq 0$，得$p^2>0$）。假设（3）式当$n=k$时成立：

$$(1+p)^k>1+kp$$

上式左右端乘上$1+p$，由$p>-1$，故$1+p>0$，乘后的不等号方向不变：

$$(1+p)^{k+1}>(1+kp)(1+p)$$
$$=1+(k+1)p+kp^2>1+(k+1)p$$

即(3)式当$n=k+1$时也成立，故得证(3)式当$n\geqslant 2$时成立。[证完]

例 3　用天平称重量，若砝码只能放在一边，证明：用$1,2,4,\cdots,2^{n-1}$克的砝码，可以称出$1,2,3,\cdots,2^n-1$克的重量。

[**证**]　当$n=1$时，命题成为用1克的砝码，称1克的重量，显然成立。设用$1,2,4,\cdots,2^{k-1}$克的砝码，可以称出$1,2,3,\cdots,2^k-1$克的重量。现在还有一只2^k克的砝码，显然可以称出2^k克的重量，又在用$1,2,4,\cdots,2^{k-1}$克的砝码称重量时，添上2^k克的砝码，便可称出

2^k+1，2^k+2，2^k+3，…，2^k+2^k-1（即$2^{k+1}-1$）克的重量，于是用$1,2,4,\cdots,2^k$克的砝码可以称出$1,2,3,\cdots,2^{k+1}-1$克的重量。[证完]

§ 2　由 P(k—1) 与 P(k) 推出 P(k+1)

有时为了推出命题 $P(k+1)$，除用 $P(k)$ 外，还要用 $P(k-1)$ 或 $P(k-2)$，…。于是数学归纳法有如下的形式：

① 证明 $P(1)$ 与 $P(2)$；

② 假设 $P(k-1)$ 与 $P(k)$ 成立，并由此推出 $P(k+1)$ 成立，这里的推导对任意正整数 $k\geqslant 2$ 均有效。

则命题 $P(n)$ 对任意正整数 n 都成立。

注　由于论证 $P(k+1)$ 成立时，要用到 $P(k-1)$ 与 $P(k)$ 这两个命题成立，故开始时要求 $P(1)$ 与 $P(2)$ 成立。如只有 $P(1)$ 成立，则不能得到 $P(n)$（对任意正整数 n）成立。

例 4　设有 $r=\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$，其中 a 为某一正整数，证明 $r^{2n}+r^{-2n}-2$ 对任意正整数 n 都是正整数并且是 4 的倍数。

［**证**］

$$r^{-1}=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}。$$

$$\therefore\quad r^2+r^{-2}-2=(r-r^{-1})^2=(2\sqrt{a})^2=4a。$$

即 $r^2+r^{-2}-2$ 是 4 的倍数，命题 $P(1)$ 成立。

$$r^4+r^{-4}-2=(r^2+r^{-2})^2-4=(4a+2)^2-4=16a^2+16a,$$

也是 4 的倍数，命题 $P(2)$ 也成立。

用归纳假设：

$$r^{2(k-1)}+r^{-2(k-1)}-2,\quad r^{2k}+r^{-2k}-2$$

都是 4 的倍数，分别记为 4α，4β（其中 α，β 为正整数，且

$\beta>\alpha$)。则

$$\begin{aligned}&\gamma^{2(k+1)}+\gamma^{-2(k+1)}-2\\&=(\gamma^2+\gamma^{-2})(\gamma^{2k}+\gamma^{-2k})-(\gamma^{2(k-1)}+\gamma^{-2(k-1)}-2)-4\\&=(4\alpha+2)(4\beta+2)-4\alpha-4\\&=16\alpha\beta+8\alpha+8\beta-4\alpha,\end{aligned}$$

故为正整数并且是 4 的倍数。[证完]

例 5 设有数列 a_n 定义如下：

$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1+1=2$，$a_4=2+1=3$，

$a_5=3+2=5$，……

$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$n=2$，3，4，…。

[称为斐波那契(Fibonacci)数列]。证明通项 a_n 为

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{4}$$

[证] $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1$，

由于

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

故有

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1。$$

即命题 $P(1)$ 与 $P(2)$ 成立。用归纳假设：

$$a_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right],$$

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right],$$

则

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_{k-1}+a_k\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{5}\right)^{k-1}\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right],\end{aligned}$$

即命题$P(k+1)$成立。[证完]

注 上述数列a_n的前n项和有如下的公式：

$$\begin{aligned}S_n&\equiv a_1+a_2+\cdots+a_n\\&=a_{n+2}-1\end{aligned}\tag{5}$$

事实上，当$n=1$时，$S_1=a_1=1$，$a_3-1=2-1=1$，即$P(1)$成立，亦即公式(5)当$n=1$时成立。用归纳假设：

$$S_k=a_{k+2}-1,$$

得

$$
\begin{aligned}
S_{k+1}&=S_k+a_{k+1}\\
&=a_{k+2}-1+a_{k+1}\\
&=a_{k+3}-1,
\end{aligned}
$$

即(5)式对 $n=k+1$ 时成立，故得证。

§3 倒推归纳法

若能从命题 $P(k+1)$推出 $P(k)$(不是从命题 $P(k)$ 推出 $P(k+1)$)，其中 k 为任意正整数时推导均有效。这时如果对某一个正整数M有命题$P(M)$ 成立，则命题$P(n)$ 当 n 为不超过M的任意正整数时都成立。事实上，取 $k=M-1$，则由 $P(M)$ 成立，可得 $P(M-1)$ 成立 。再取 $k=M-2$，则由 $P(M-1)$成立，可得 $P(M-2)$成立。顺次倒推，可证 $P(n)$ 当正整数 $n\leqslant M$ 时都成立。

为了证明命题 $P(n)$ 对任意正整数 n 都成立，可用如下形式的倒推归纳法：

① 假设命题 $P(k+1)$成立，并由此推出$P(k)$成立，所用的推导对任意正整数都有效；

② 证明命题 $P(m)$对无穷多个正整数 m 成立。

用以上两点，可证 $P(n)$ 对任意正整数 n 都成立。事实上，若 n 为任意一个正整数，暂时固定 n，由②，可以有一个正整数M，并且$M\geqslant n$，使 $P(M)$成立。再用①倒推，经过有限步可从 $P(M)$顺次倒推出

$$P(M-1),P(M-2),\cdots,P(n+1),P(n)$$

成立，即得证。

在②中的无穷多个正整数m可以有各种不同的取法，但使 $P(m)$成立的正整数 m 必需是无穷多个，以保证对于任意

一个正整数 n，在这样的无穷多个正整数 m 中有大于（或等于）n 的正整数。例如 m 可取为 2 的连续乘幂：

$$2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^i,\ \cdots。$$

这时，②的实质就是证明

$$P(2),P(4),\cdots,P(2^i),\cdots。$$

把上述命题看成联系正整数 i（即 $i=1,2,\cdots$）的命题，记为 $Q(i)$。于是命题 $Q(i)$ 的证明又可以对 i 用归纳法。

例 6 证明 n 个（n 为任意正整数）非负实数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

的几何平均值不超过它们的算术平均值：

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n) \tag{6}$$

［证］ 为了避免上下标层次过多，对于 $n=2^i$ 的情形，有时把 a_n 记为 $a(2^i)$。

首先证明(6)式对形如 $n=2^i$ 的正整数 n 成立，这可以对 i 用归纳法。当 $i=1$ 时，(6)式成为：

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2)$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(a_1+a_2)-\sqrt{a_1a_2}\\&=\frac{1}{2}[(\sqrt{a_1})^2-2\sqrt{a_1a_2}+(\sqrt{a_2})^2]\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant0,\end{aligned}$$

故(6)式当 $n=2^1=2$ 时成立。设(6)式对 $n=2^i$ 个非负实数成立：