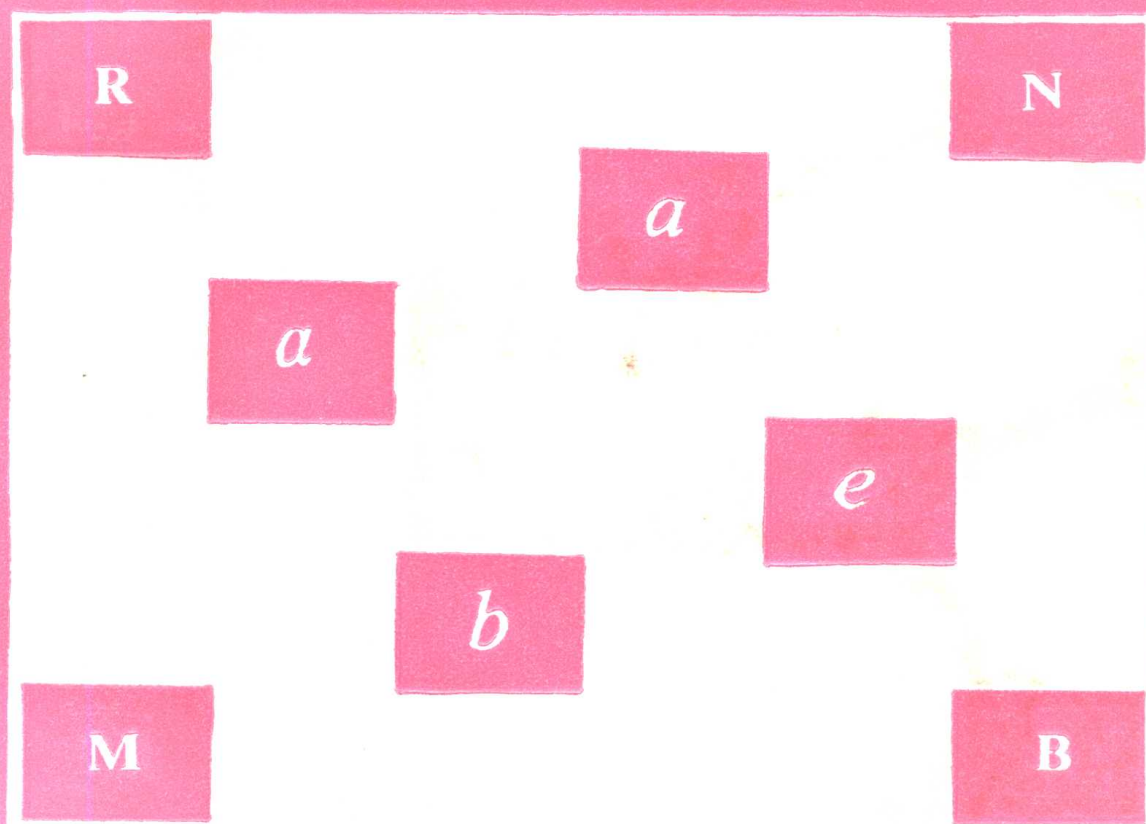


椭圆大地测量学

熊 介



解 放 军 出 版 社

椭圆大地测量学

熊 介 编 著

解放军出版社

内 容 简 介

本书详细叙述了椭球面上的测量计算。讨论了椭球面与地面、椭球面与投影平面、椭球面与大地水准面以及一种椭球面与另一种椭球面之间的关系。论述了地球椭球和大地坐标系的建立,介绍了空间直线大地网。本书内容比较充实,主要阐明几何大地测量学的基本原理,同时也注意与其他学科的联系。

本书可作为测绘专业师生的教学参考书,也可供有关科学技术人员参考。

地球大地测量学

熊 介 编著

解放军出版社出版

(北京平安里三号)

新华书店北京发行所发行

北京京辉印刷厂印刷

787×1092 毫米16开本 27印张 674千字

1988年3月第1版 1988年3月(北京)第1次印刷

印数1—3000

ISBN 7-5065-0285-2/P·2

定价: 6.40元

常用符号表

1. 关于椭球的符号

a——椭球长半径,

b——椭球短半径,

c——极点子午圈曲率半径,

α ——椭球扁率,

e——椭球第一偏心率,

e' ——椭球第二偏心率,

w——第一辅助函数, $w = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$,

v——第二辅助函数, $v = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B}$,

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$n = \frac{a - b}{a + b},$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B,$$

$$t = \operatorname{tg} B,$$

X、Y、Z——球心直角坐标,

$\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ 、 $\bar{Z}$ ——站心赤道直角坐标,

x、y、z——站心地平直角坐标,

L 、 ϕ ——经方向和纬方向角,

L——大地经度,

B——大地纬度,

u——归化纬度,

Φ ——球心纬度,

q——等量纬度,

ρ ——球心向经,

A——大地方位角,

S——大地线长度,

σ ——边长S所对的球心角,

H——大地高,

l——大地经差,

b——大地纬差,

a——大地方位角差,

$z_{\text{大}}$ ——大地天顶距,

M——子午圈曲率半径,

N——卯酉圈曲率半径,

$$(1) = \frac{\rho''}{M},$$

$$(2) = \frac{\rho''}{N},$$

R——平均曲率半径,

R_A ——任意方向法截线曲率半径,

r——平行圈半径,

X——子午线弧长,

m——大地线归化长

2. 关于大地水准面的符号

λ ——天文经度,

φ ——天文纬度,

α ——天文方位角,

d——基线量距长度,

D——物理测距长度,

ζ ——垂线偏差的子午圈分量,

η ——垂线偏差的卯酉圈分量,

ϵ ——垂线偏差在任意方向上的分量,

N——大地水准面差距,

ζ ——高程异常,

$H_{\text{正}}$ ——正高,

$H_{\text{正常}}$ ——正常高,

g_e, g_p ——赤道和极点的重力,

γ_e, γ_p ——赤道和极点的正常重力,

$z_{\text{天}}$ ——天文天顶距

3. 关于高斯投影的符号

x、y——平面直角坐标,

γ ——平面子午线收敛角,

δ ——方向改正,

m——投影长度比,

s——平面边长,

T——坐标方位角

4. 关于坐标变换的符号

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ——不同直角坐标系原点的坐标差(平移参数)

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ——欧拉角(旋转参数),

Δm ——尺度变化

目 录

常用符号表

第一部分 椭球面上的测量计算

第一章 地球椭球

- 1—1 测量和计算的基准面.....(3)
- 1—2 参考椭球.....(7)
- 1—3 椭球大地测量学简介.....(9)

第二章 基本坐标系

- 2—1 椭球的基本参数及其相互关系.....(11)
- 2—2 基本坐标系.....(12)
- 2—3 子午面直角坐标与大地纬度、归化纬度、球心纬度的关系.....(18)
- 2—4 大地纬度、归化纬度、球心纬度之间的关系.....(21)
- 2—5 由大地纬度、归化纬度、球心纬度和大地经度计算空间直角坐标.....(23)
- 2—6 由空间直角坐标计算大地坐标的迭代解法.....(25)
- 2—7 由空间直角坐标计算大地坐标的直接解法.....(27)
- 2—8 空间点大地纬度、大地高与球心纬度、向径的关系式.....(30)
- 2—9 站心地平直角坐标与站心赤道直角坐标的关系.....(33)
- 2—10 站心地平直角坐标与球心直角坐标的关系.....(35)
- 2—11 站心地平极坐标与站心地平直角坐标、站心赤道直角坐标的关系.....(36)
- 2—12 站心赤道极坐标与站心赤道直角坐标的关系.....(37)
- 2—13 空间直线的方向余弦.....(37)

第三章 法截线

- 3—1 法截线和斜截线.....(38)
- 3—2 任意方向法截线曲率半径.....(38)
- 3—3 子午圈和卯酉圈曲率半径.....(40)
- 3—4 利用弧素公式求M和N.....(42)
- 3—5 平均曲率半径.....(44)
- 3—6 用几何法推导平均曲率半径.....(46)
- 3—7 子午线弧长和平行圈弧长.....(48)
- 3—8 梯形图幅面积.....(53)
- 3—9 法截线弧素.....(55)
- 3—10 法截线的参数方程.....(55)
- 3—11 法截线与圆弧的关系.....(58)

3—12	法截线与切线的关系	(61)
3—13	法截线的弦长和俯角	(63)
3—14	相对法截线	(63)
3—15	相对法截线的夹角和幅宽	(64)
第四章 大地线		
4—1	大地线的定义和意义	(67)
4—2	一般曲线坐标系中的大地线微分方程	(69)
4—3	大地坐标系中的大地线微分方程	(70)
4—4	大地极坐标系中的大地线微分方程	(73)
4—5	空间直角坐标系中的大地线微分方程	(75)
4—6	按最短线定义的大地线微分方程	(75)
4—7	大地线的克莱劳方程	(77)
4—8	大地线的曲率和挠率	(80)
4—9	大地线的参数方程	(82)
4—10	大地线的归化长	(84)
4—11	大地线与法截线的夹角	(86)
4—12	大地线与法截线长度的比较	(88)
4—13	大地线与法截线、平行圈的相关位置	(89)
4—14	大地线的行程	(90)
第五章 三角形解算		
5—1	椭球面三角形的正弦定理	(91)
5—2	椭球面三角形与球面三角形对应角的关系	(94)
5—3	椭球面三角形与球面三角形对应边的关系	(96)
5—4	解算球面三角形的附加数法	(97)
5—5	解算球面三角形的勒让德定理	(98)
5—6	勒让德定理的其他证明方法	(100)
5—7	球面角超	(103)
5—8	扩展的附加数法	(104)
5—9	扩展的勒让德定理	(105)
5—10	按附加数法解算测边三角形	(106)
5—11	按勒让德定理解算测边三角形	(107)
第六章 大地问题解算		
6—1	一般说明	(109)
6—2	球面大地问题解算	(111)
6—3	勒让德级数	(112)
6—4	高斯平均引数大地问题正解公式	(115)
6—5	高斯平均引数大地问题反解公式	(119)
6—6	按龙格——库塔方法解大地线微分方程	(121)
6—7	按分段累加法解大地线微分方程	(123)

6—8	贝塞尔大地问题解算的原理	(124)
6—9	贝塞尔大地问题正解计算	(129)
6—10	贝塞尔大地问题反解计算	(131)
6—11	按贝塞尔公式近似解算大地问题	(132)
6—12	导航使用的大地线长近似计算公式	(135)
6—13	贝塞尔公式的直接解法——陈俊勇公式	(137)
6—14	贝塞尔微分方程的其他解法	(141)
6—15	保持纬度不变的大地投影——张志新公式	(145)
6—16	椭球面对球面的正形投影	(147)
6—17	应用椭球面对球面的正形投影解算大地问题（一）——高斯平均引数公 式的另一推导方法	(150)
6—18	应用椭球面对球面的正形投影解算大地问题（二）——博林公式	(152)
6—19	应用椭球面对球面的等距离投影解算大地问题——巴乌曼公式	(156)
6—20	应用椭球面对平面的正形投影（高斯投影）解算大地问题——许厚泽方 法	(160)
6—21	长距离大地问题反解的特殊情形	(162)
6—22	简短的评述	(164)
第七章 大地问题微分公式		
7—1	微分公式的分类和应用	(166)
7—2	大地问题反解微分公式	(167)
7—3	大地问题正解微分公式	(171)
7—4	大地问题正反解微分公式的关系	(176)
7—5	球级近似的大地问题微分公式	(177)
7—6	常系数大地问题微分公式	(180)
第八章 交会计算		
8—1	球面测角交会计算	(183)
8—2	椭球面测角交会计算	(184)
8—3	球面测边交会计算	(186)
8—4	椭球面测边交会计算	(186)
8—5	球面双曲线交会计算	(188)
8—6	椭球面双曲线交会计算	(189)

第二部分 椭球面同其他曲面的关系

第九章 地面观测元素归算到椭球面上——椭球面与地面的关系		
9—1	归算的意义和要求	(193)
9—2	天文经度、纬度和天文站心空间极坐标	(194)
9—3	垂线偏差公式和拉普拉斯方程	(196)
9—4	水平观测方向的垂线偏差改正	(200)
9—5	观测天顶距的归算	(200)

9—6	利用旋转矩阵推导归算公式	(201)
9—7	广义垂线偏差公式和拉普拉斯方程	(204)
9—8	水平观测方向的标高差改正	(207)
9—9	法截线方向的截面差改正	(208)
9—10	水平观测方向归算的三项改正	(209)
9—11	基线的归算	(209)
9—12	空间直线归算——普通公式	(211)
9—13	空间直线归算——精密公式	(213)
9—14	垂线偏差和大地水准面差距的必要精度	(215)
9—15	平展法与投影法的大地水准面差距、垂线偏差的差异——莫洛金斯基改正	(217)
9—16	平展法大地坐标的改正	(219)
第十章 椭球面元素归算到平面上——椭球面与平面的关系		
10—1	地图投影的概念	(221)
10—2	地图投影的变形	(222)
10—3	地图投影的分类	(228)
10—4	等量坐标	(230)
10—5	兰勃特正形圆锥投影	(231)
10—6	墨卡托正形投影	(233)
10—7	椭球面到平面的正形投影	(236)
10—8	高斯——克吕格正形投影	(239)
10—9	高斯坐标与等量坐标的关系	(242)
10—10	高斯投影正算公式	(245)
10—11	高斯投影反算公式	(249)
10—12	平面子午线收敛角	(253)
10—13	高斯投影的长度比及长度变形	(256)
10—14	距离改正	(259)
10—15	方向改正	(261)
10—16	天文方位角化算为坐标方位角	(27)
10—17	高斯投影的分带	(272)
10—18	高斯坐标的邻带换算	(274)
10—19	高斯投影和透视投影、横墨卡托投影的比较	(281)
10—20	高斯投影的改良	(288)
第十一章 垂线偏差和大地水准面差距——椭球面与大地水准面的关系		
11—1	概述	(292)
11—2	天文纬度、经度归算到大地水准面上	(293)
11—3	天文大地垂线偏差	(294)
11—4	利用重力垂线偏差内插天文大地垂线偏差	(295)
11—5	地形垂线偏差	(296)

11—6	地形均衡垂线偏差	(300)
11—7	利用观测天顶距计算垂线偏差	(302)
11—8	垂线偏差和大地水准面差距之差的正负号	(304)
11—9	大地水准面差距的计算——天文大地水准	(305)
11—10	天文重力水准	(307)
11—11	利用观测天顶距计算大地水准面差距	(307)
11—12	利用电磁波测距计算大地水准面差距	(308)
11—13	利用卫星多普勒观测计算大地水准面差距	(309)
11—14	利用卫星测高推求大地水准面差距	(309)
11—15	天文大地方法同重力方法的比较	(310)
第十二章 椭球变换——不同椭球面之间的关系		
12—1	椭球变换的意义和作用	(311)
12—2	广义空间直角坐标变换公式	(311)
12—3	广义大地坐标微分公式	(313)
12—4	球级近似的大地坐标微分公式	(318)
12—5	变换大地坐标的两种途径	(321)
12—6	不同大地坐标系的换算——大地坐标微分公式应用之一	(321)
12—7	弧度测量方程——大地坐标微分公式应用之二	(323)
12—8	边长和方位角变换	(325)
12—9	大地水准面差距图的变换	(326)
12—10	欧拉角	(326)

第三部分 地球椭球和大地坐标系的建立

第十三章 局部坐标系

13—1	建立大地坐标系的基本原理	(331)
13—2	参考椭球的定位和定向	(332)
13—3	大地原点天文观测误差的影响	(336)
13—4	大地原点和大地测量起算数据	(337)
13—5	地极和起始子午线	(339)
13—6	1954年北京坐标系	(342)
13—7	1980年国家大地坐标系	(342)
13—8	苏联1942年坐标系	(345)
13—9	世界主要局部坐标系汇集	(347)

第十四章 地心坐标系

14—1	参考椭球、正常椭球和地球扁球	(348)
14—2	正常椭球的基本参数	(350)
14—3	平均椭球	(351)
14—4	全球密合椭球中心与地心的关系	(355)
14—5	应用全球大地水准面建立地心坐标系	(357)

14—6	应用天文大地水准面与重力大地水准面高差建立地心坐标系	(359)
14—7	应用天文大地和天文重力资料建立地心坐标系	(360)
14—8	应用卫星测量资料建立地心坐标	(362)
14—9	DX-1 地心坐标系	(365)
14—10	世界主要局部坐标系的地心坐标转换参数	(366)
14—11	地心坐标系与局部坐标系的比较	(366)
第十五章 弧度测量的回顾和展望		
15—1	早期的弧度测量思想	(368)
15—2	我国古代的弧度测量	(368)
15—3	地球椭球理论的建立	(372)
15—4	物理大地测量学的兴起和发展	(374)
15—5	近代的弧度测量	(376)
15—6	现代的弧度测量	(378)
15—7	三轴椭球	(381)
15—8	未来的弧度测量展望	(382)

第四部分 空间直线大地网

第十六章 空间直线大地网

16—1	概述	(387)
16—2	顶点在椭球面上的弦线三角形解算	(388)
16—3	直线三角形解算	(389)
16—4	空间直线与椭球面弦线的关系	(390)
16—5	空间大地问题正解	(392)
16—6	空间大地问题反解	(393)
16—7	霍泰因方程	(394)
16—8	空间大地问题微分公式	(395)
16—9	三维大地测量原理	(398)
16—10	三维大地网平差	(400)

附 录

一、地球的几何数据	(402)
二、几种代表椭球的球	(402)
三、旋转矩阵和反向矩阵	(403)
四、正弦、余弦的指数函数化为倍角函数	(406)
五、拉格朗日共轭级数	(407)
六、按平均引数展开的台劳级数	(408)
七、高斯数值积分公式	(409)
八、常用量的导数和展开式	(409)
九、级数回求公式	(413)
十、国际大地测量协会 (IAG) 推荐的地球模型	(413)

参考文献

第 一 部 分

椭球面上的测量计算

第一章 地球椭球

1-1 测量和计算的基准面

一、测量的基准面——水准面

测量是在地球重力场中进行的。在地球惯性系统内，地球上一点受到地球引力 $\vec{F}$ 和惯性离心力 $\vec{E}$ 的作用。它们的合力是重力 $\vec{G}$ 。重力方向线叫做铅垂线，或简称垂线。液体的静止表面叫做水准面。水准面是物理表面。同一水准面上的重力位相等。因此，水准面也叫重力等位面，水准面上任一点的垂线都同这个面正交。

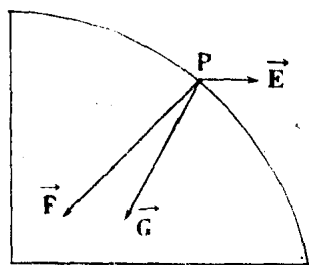


图 1-1 重力方向

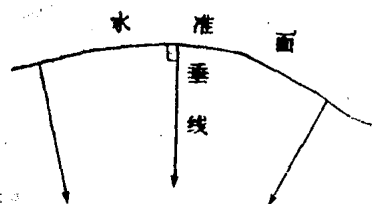


图 1-2 水准面和垂线

地球自然表面是测量的依托面，但不是整置测量仪器的基准面。大自然给测量工作提供了重要的基准面和基准线。我们知道，野外测量工作，首先应调整仪器水准气泡居中。此时，气泡中央的切线水平，它是水准面的切线；同时，仪器垂直轴垂直，它与垂线一致。水准面和垂线是野外观测的基准面和基准线。

严格地讲，与水准面正交的线并不是直线，而是稍微弯曲的线，叫做重力线，简称力线。一点的垂线方向是力线在该点的切线方向。由于地球内部物质分布不均匀和地球表面起伏的影响，各点垂线方向的变化很不规则，进而引起水准面形状的不规则。垂线方向不一定指向地心（地球质量中心），也不一定同地球自转轴相交，而所有的力线都应交于地心。

通过不同高度的测站点各有自己的水准面。在所有水准面中，特别重要的是大地水准面。

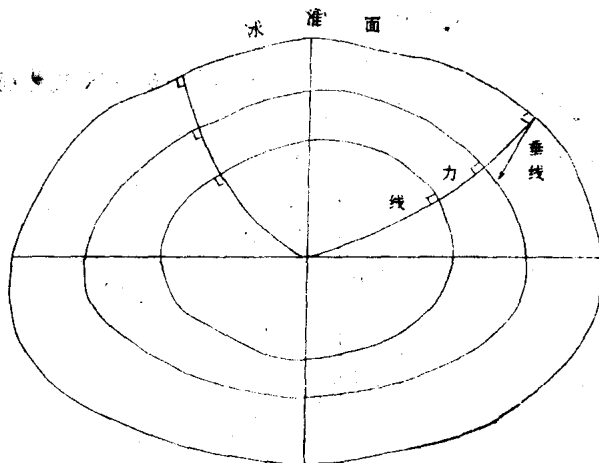


图 1-3 垂线和力线

按照通常的说法，大地水准面是平均海面（视为水准面）及其在全球大陆的延伸的水

准面。它是连续的、闭合的曲面。它具有水准面的全部特性。理论上讲，全球只有一个大地水准面。大地水准面这个名称，是李斯廷（Li sting）1873年首先提出的。

大地水准面包围的形体叫做大地体。因为地球外表大部分（百分之七十一）是由相互联结的海洋所包围，而大陆高出海洋的平均高度约为800米，大致是地球半径的万分之一。也就是说，大地体很接近于地球。此外，它又具有长期的稳定性。因此，采用大地体来代表地球是自然的、合理的。在大地测量学中，大地水准面还作为高程的起算面。它是研究地球自然表面形状的参考面。地面点高出大地水准面的高程，叫做海拔高或正高，记作 $H_{正}$ 。通过水准测量可以精确测定点的海拔高。

为了确定平均海面，需要设立验潮站。长期观测海面，取其平均位置作为该验潮站的平均海面。我国采用青岛验潮站1950—1956年验潮结果，叫做1956年黄海平均海面*。

为了明确地表示平均海面的位置，需要在验潮站附近建立水准原点。通过精密联测，求出水准原点的高程。青岛水准原点高出黄海平均海面72.289米，图1-4。

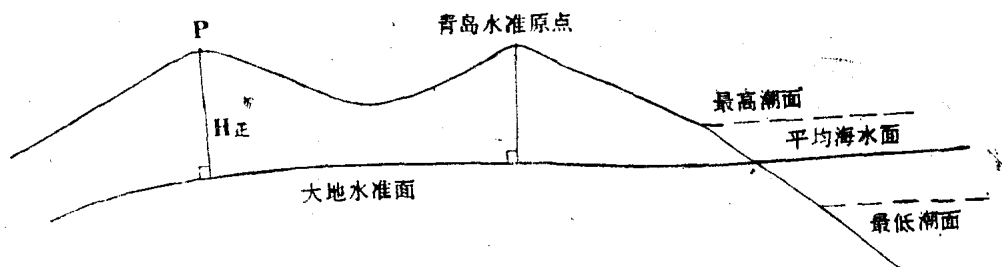


图 1-4 平均海水面和水准原点

其实，由于许多因素（例如温度、湿度、气压、含盐量以及其他原因）的影响，平均海面并不是等位面。它相对于等位面来讲，是有起伏的。这种起伏叫海面地形，或叫海水面倾斜。在全球范围内，这种起伏约为1—2米。例如，巴拿马运河区太平洋海面比大西洋海

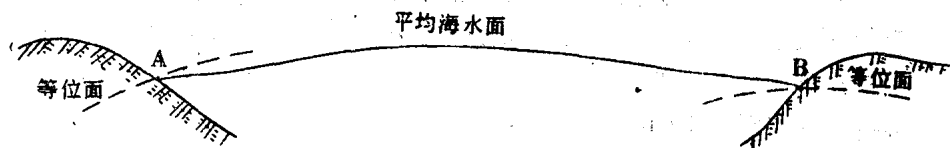


图 1-5 平均海水面与等位面

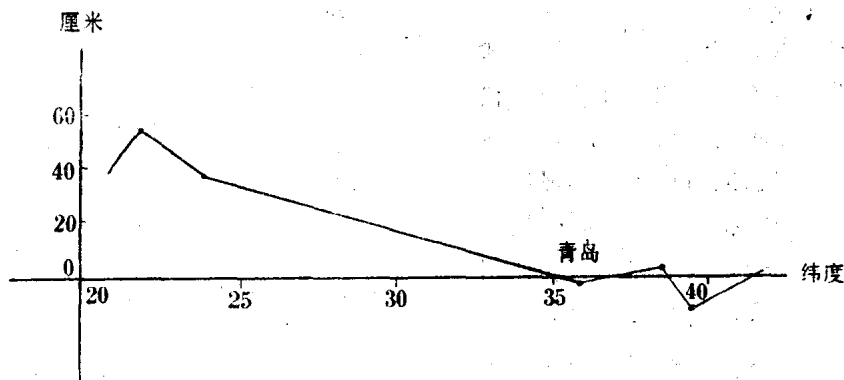


图 1-6 我国东部沿海海水面倾斜

*1985年，我国采用青岛验潮站1952—1979年的潮汐观测资料，确定了“1985国家高程基准”。这个基准比原基准下降39mm，对已测基本比例尺地形图没有影响。

水面高出 62 厘米^[75]，苏伊士运河南端海水面比北端高出 30 厘米。我国东部地区沿海，也存在明显的海水面倾斜。如果以青岛验潮站（纬度为 36° ）确定的平均海水面为基准，其他验潮站确定的平均海水面起伏如图 1-6^[148]。由图可见，我国沿海海水面南高北低，相差约为 60 厘米。因此，若以此平均海水面为基准，在福建沿海，海水可以淹没一些高程为正值的地带。

由于平均海水面不是等位面，依据它来定义大地水准面是不准确的。因此，有人提出用通过高程起算点的重力水准面来定义大地水准面。

由此可知，虽然在一个点上可以精密地确定平均海水面，但是由于海面地形的影响，不能确定一个全球统一的等位面。事实上，各个国家或地区采用的作为高程基准的“大地水准面”是不一致的，它们之间的差异可能有 1—2 米。关于大地水准面的严密定义可参考[148, 245]。

在大地测量的高程计算系统中，有时采用似大地水准面。似大地水准面是计算正常高 $H_{\text{正常}}$ 的基准面。它不是水准面，当然也不具备水准面的性质。但是，似大地水准面与大地水准面相当接近，在海洋地区两者重合，在大陆平原地区两者相差数厘米，在高山地区相差 2—3 米，图 1-7。在研究全球地球形状时，一般不采用似大地水准面。

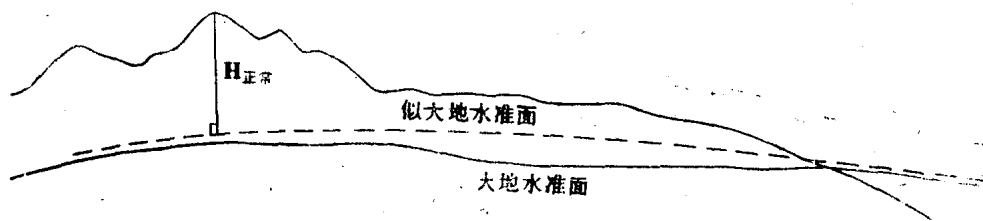


图 1-7 似大地水准面和大地水准面

二、计算的基准面——椭球面

大地测量学的基本任务之一就是精密测定地面点的位置。但是，传统大地测量的野外观测只能获得角度、长度、高差等元素，并不能直接得到点的坐标；为了求得点的坐标，还要经过一个复杂的计算过程。

进行计算，首先要解决在哪个面上计算的问题，即确定计算基准面。计算基准面必须是数学曲面，在它上面能够建立起各元素之间的数学关系。

地球自然表面十分复杂，不能作为计算基准面，这是不言而喻的。大地水准面虽然比地球自然表面平滑得多，但是它的形状仍不规则。它不是数学曲面，不能作为计算基准面。

再来考虑平面和球面。它们都是简单的数学曲面。在很小的范围内，可以用平面代表水准面（即水平面），这意味着各点垂线被视作相互平行。在稍大的范围内，或者当精度要求不太高时，可以用球面代表水准面，这意味着各点垂线被视作球面的半径，它们相交于球心。但是，在广大范围内，平面和球面都不能精确地代表大地水准面。在它们上面推算的元素，同大地水准面上的相应元素有显著的差别；范围越大，差别越大。因此，它们也不能作为大地测量计算的基准面。

综上所述，测量需要计算，而计算必须在数学表面上进行，这个表面应当同大地水准面相当接近。

经过长期的实践，人们逐渐认识到适当选择的旋转椭球面符合上述要求，可以作为测量

计算的基准面。

尽管大地水准面有不规则的起伏,但是,从整体上看,这种起伏并不十分显著。理论和实践都已证明,大地水准面接近于南北稍扁的旋转椭球面。十七世纪以来,许多测量结果表明,这个旋转椭球的长半径约为6400公里,极扁率约为1:300。

如果用椭球面代表大地水准面,这就意味着各点的垂线被看作是椭球面的法线。

大地水准面是形状不规则的物理表面,旋转椭球面是形状规则的数学表面。形象地(当然是粗略地)说,如果将大地体比作土豆,那末椭球就可以比作鸡蛋了。

近年来精密的研究结果表明,大地水准面同适当确定的椭球面相比较,在北极处约凸出10米,在南极处约凹进30米,如图1-8。为了醒目起见,在图1-8以及图1-9中,大地水准面与椭球面的差距放大了一万倍^[46]。

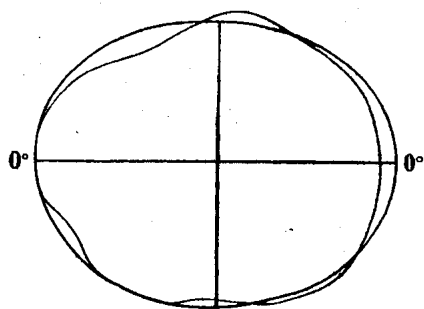


图 1-8 大地水准面在子午面方向的截线($L=90^\circ$)

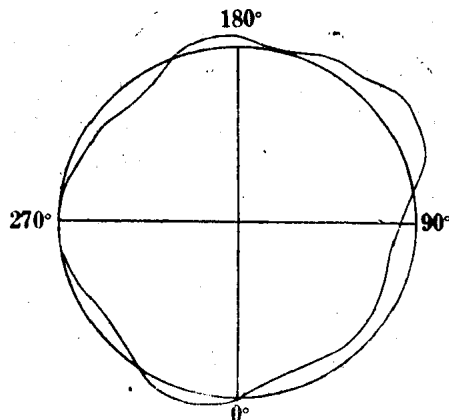


图 1-9 大地水准面在赤道方向的截线

有些文献据此说明地球是“梨形”的。其实,地球的赤道半径比极半径约大21公里;从整体上看,仍然应当认为大地水准面接近于椭球面。地球梨形说是不准确的^[120]。

大地水准面在赤道方向的截线不是正圆,而更接近于椭圆。根据1979年国际大地测量协会(IAG)的推荐值,赤道椭圆的扁率为1:90 000。这个数值极其微小,仅是极扁率的三百分之一。赤道椭圆的长轴位于西经 15° 。

曾经有人考虑用三轴椭球来表示大地体。这样将会给测量计算带来更大的不便,而收益是极其微小的。现代测量结果表明,如果适当地确定旋转椭球的长半径和极扁率,并且把它同大地体适当地结合起来,那末它同大地体在高度上的差异(即大地水准面差距,也叫起伏,用 N 表示)的均方值约为50米,最大值约为100米。也就是说,用旋转椭球面代替大

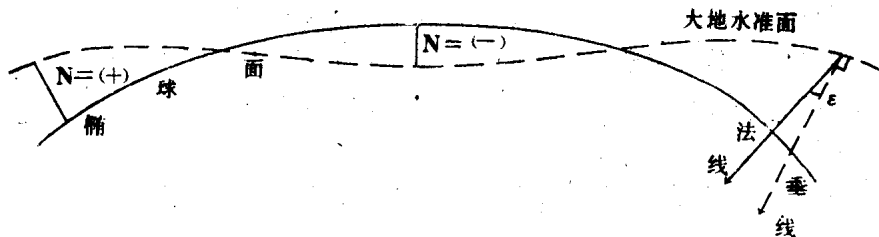


图 1-10 大地水准面差距和垂线偏差