

统计估值方法

国防科技大学 张金槐

第七机械工业部七〇八所翻印

一九八〇年九月

前 言

这份材料为线性滤波专题讲座班的讲义。这次重印，作了适当修改。我们重点介绍离散系统最佳线性滤波方法。考虑到有关单位提出的需要，我们补充了曲线拟合方面的知识和讨论了最佳线性递推滤波的应用问题。

我们认为，虽然滤波理论在数学上是严谨的。但是，在应用中由于模型的建立以及随机量的统计特性等方面存在的问题，常常遇到不少需要解决的实际问题。这些问题，我们称之为滤波的实现问题。在这份材料中，比较地注意了这些问题，并用较大的篇幅讨论了实现问题。由于工程实际问题的复杂性，还有待于我们进行深入一步的工作。

本材料可作从事数据处理、飞行器试验结果统计分析等方面的工程技术人员参考。

在编写本材料过程中，我们得到七机部、四机部、国防科委有关单位、二炮等很多同志的支持和鼓励，提出了不少宝贵的意见，这里谨致谢意。

编 者 1980年4月于国防科大

目 录

| | |
|---------------------------------|-----|
| 第一章 观测数据的曲线拟合 | 1 |
| 引 | 1 |
| § 1 拟合模型 | 1 |
| § 2 无偏最小方差意义之下权序列 $\{W_T\}$ 的确定 | 3 |
| § 3 轨道参数的拟合 | 6 |
| § 4 截断误差问题 | 16 |
| § 5 多项式次数的统计识别 | 19 |
| 参考资料 | 24 |
| 第二章 线性模型参数估计的最小平方法 (L·S) 方法 | 25 |
| 引 | 25 |
| § 1 线性模型及其未知参数的最小平解 | 25 |
| § 2 用任意函数表示的曲线拟合, 正交多项式的运用 | 30 |
| § 3 最小平估计的性质 | 33 |
| § 4 递推最小平估计公式 | 35 |
| § 5 多维观测情况下的 L, S 递推公式 | 47 |
| 参考资料 | 53 |
| 第三章 卡尔曼滤波方法 | 55 |
| 引 | 55 |
| § 1 线性状态方程解的表示, 转移矩阵 | 58 |
| § 2 状态矢量的估计问题 | 76 |
| § 3 卡尔曼滤波的基本方程 | 79 |
| § 4 线性化滤波方法 | 93 |
| § 5 卡尔曼滤波与线性回归 | 107 |
| § 6 卡尔曼滤波与最小二乘方法 | 112 |
| 第四章 最佳线性滤波技术的实现问题 | 114 |
| § 1 前 言 | 114 |
| § 2 最佳线性递推滤波技术的回顾 | 114 |

| | | |
|---------|----------------------|-----|
| § 3 | 关于估值中的偏倚问题 | 118 |
| § 4 | 滤波模型和实际系统是否一致的统计鉴定 | 128 |
| § 5 | 示 例 | 133 |
| § 6 | 自适应滤波方法 | 140 |
| § 7 | 滤波中常遇到的一些其它有关问题及处置途径 | 154 |
| 结 语 | | 165 |
| 参 考 资 料 | | 167 |
| 第五章 | 最佳线性递推滤波的应用 | 170 |
| 前 言 | | 170 |
| § 1 | 在导航系统中的应用 | 171 |
| § 2 | 测轨问题 | 188 |
| § 3 | 导弹飞行试验后的结果分析 | 210 |
| 参 考 资 料 | | 223 |

第 一 章

观 测 数 据 的 曲 线 拟 合

引 对于观测所获得的数据进行曲线拟合，这是人们早就熟知且常用的方法。在专业实践中，数据拟合问题几乎随处都有。例如，在一类定轨问题中，我们常应用一段观测数据进行轨道运动参数的估计。比如说，为了给出飞行器在某时刻 t 的位置、速度和加速度值，常用靠近 t 的某一段观测数据进行处理，给出 t 时刻的轨道参数的估值，在该时间段，常可假定飞行器的轨迹（在坐标系 $O_E XYZ$ 中的 x 方向、 y 方向或 z 方向的轨迹）为时间 t 的多项式。这样做，在不少实际场合是容许的。

关于曲线拟合，有不少问题是需要讨论的。例如，那种认为观测点数愈密愈好，拟合的曲线，其次数越高越好、用于数据处理的时间段愈长愈好的看法是不全面的。又如，在整段时间的观测数据的基础上，作多项式拟合也是大有讲究的。例如，在导弹的自由飞行段，我们可以用一条二次曲线作为弹道的逼近轨迹，然而如果将这条二次曲线应用于整段弹道，即用于制导段、后效段和再入飞行段，那么，显然是不合理的。因此，随着各种不同实际问题的客观规律和对它们的不同要求，我们应该采用不同的曲线拟合方法。

这里，我们将给出目前常被应用的“限定记忆正交多项式拟合方法”。这个方法，对于观测点个数的选择、多项式的次数、采样频率（数据率）都有考究；在计算过程中运用正交多项式，因此给计算工作带来不少方便。因此在不少实际工程问题例如预警雷达的目标参数估计，飞行器的实时跟踪等常常被应用。

§ 1 拟合模型

这里，我们考虑经典模型。假定在 t 时刻的观测数据 $Z(t)$ 可以分解为如下形式：

$$Z(t) = P(t) + \varepsilon(t), \quad (1.1)$$

其中 $P(t)$ 为 m 次多项式， $\varepsilon(t)$ 假定为平稳噪声，且

$$E\{\varepsilon(t)\} = 0, \quad (1.2)$$

$$E\{\xi(t_i)\xi(t_j)\} = \sigma^2 \rho(t_i - t_j), \quad (1.3)$$

$\rho(t_i - t_j)$ 是噪声过程在 t_i 及 t_j 两个时刻的标准化相关函数 ($\rho(0) = 1$), σ^2 为噪声方差。

此外, 假设观测数据的步长为 h , 且在时刻 t_1, \dots, t_N 进行观测, 即是说, $t_k - t_{k-1} = \Delta t$ 为常量。令

$$\frac{t_i - t_0}{\Delta t} = i,$$

以 i 作为时间度量的单位时, t_1, \dots, t_N 就对应于 $i = 1, 2, \dots, N$ 。此时, 在 t_i 时刻的观测值可记作

$$Z(i) = P(i) + \xi(i), \quad (1.4)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

我们知道, 一个任意的多项式总可以表示成若干个正交多项式之和, 于是 $P(i)$ 可表示为

$$P(i) = \sum_{k=0}^m a_k p_k(i), \quad (1.5)$$

其中 $p_k(i)$ 为关于 i 的 k 次多项式, 且 $\{p_k(i)\}$ ($k = 0, 1, \dots, m$) 为正交函数序列, 即是说, 它满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N p_j(i) p_l(i) = 0, & j \neq l, \\ \sum_{i=1}^N p_k^2(i) \triangleq S(k, N) \neq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

我们的问题是: 通过 N 个观测值 Z_1, \dots, Z_N , 去确定出 $AP(t)$ 在某种最佳指标之下的估计。这里 A 是施行于 P 的某种运算, 例如 $A = \frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots$ 或积分变换等等。常将 $AP(t)$ 的估计用下列形式表示:

$$y_t = \sum_{r=0}^{N-1} W_r Z_{N-r} = \sum_{r=1}^N W_{N-r} Z_r, \quad (1.7)$$

其中 $\{W_r\}$, $r = 0, \dots, N-1$, 为权系数序列, y_t 表示在 t 时刻的 $AP(t)$ 的估计。我们知道, (1.7) 式是数字滤波器输出的一般表示方法。该滤波器输出为观测的线性函数, 常称为线性数字滤波器。因此关键的问题是去估计权序列 $\{W_r\}$, $r = 0, \dots, N-1$ 。

上述那种将观测分解为多项式加平稳噪声的模型是工程实践中最长见的一种拟合模型。不过，我们从一开始就必须指出：这是一种理想化了的模型。其一，观测中的有效信号不一定总是多项式的形式。于是用多项式表示，不过是一种近似，因此它和真实信号之间会产生系统性的偏差（下面称之为方法误差或者截断误差）；其二，观测如果具有系统性误差，此时 $E\{\xi(t)\} \neq 0$ ，此时所作的曲线拟合，同样将引入系统性偏差；其三， $\xi(t)$ 的平稳性是必须进行检证的，如果 $\xi(t)$ 不是平稳的，那么又必须引入其他的模型。

归根结底，模型问题是解决工程实际问题的前提，如果上述情况不被满足，一个另外的方法就是应用 Kalman 滤波方法。但是我们指出，Kalman 滤波也还有模型误差问题。由于多项式模型在解算上的方便，而不实际工程问题又近似于这个模型，如果能对模型中的系统性偏差进行估计或补偿，那么，我们开头提出的模型仍具有应用上一定的普遍意义。

§ 2 无偏最小方差意义之下权序列 $\{W_r\}$ 的确定

在下面的讨论中，为了清晰起见，引入向量表示。为此，记

$$P(i) = a^T p(i), \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m]^T, \\ p(i) &= [p_0(i) \ p_1(i) \ \dots \ p_m(i)]^T, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Q(i) = AP(i) = \begin{pmatrix} A p_0(i) \\ A p_1(i) \\ \vdots \\ A p_m(i) \end{pmatrix}.$$

此时，在 $t = N + \alpha$ 时的理想输出 $AP(t) \Big|_{t=N+\alpha}$ 可表示为

$$\begin{aligned} AP(t) \Big|_{t=N+\alpha} &= A a^T p(i) \Big|_{i=N+\alpha} \\ &= a^T Q(N+\alpha), \end{aligned} \quad (2.3)$$

而实际的输出 (估计) 为

$$y(N+\alpha) = \sum_{i=1}^N W_{N-i} \cdot Z_i \quad (2.4)$$

$$= \sum_{i=1}^N W_{N-i} (p(i) + \varepsilon(i))$$

$$= \sum_{i=1}^N W_{N-i} \cdot a^T p(i) + \sum_{i=1}^N W_{N-i} \varepsilon_i$$

$$= a^T (PW) + \sum_{i=1}^N W_{N-i} \cdot \varepsilon_i, \quad (2.5)$$

此处

$$W = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{N-1}]^T,$$

$$P = \begin{bmatrix} p_0(N) & p_0(N-1) & \dots & p_0(1) \\ p_1(N) & p_1(N-1) & \dots & p_1(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_m(N) & p_m(N-1) & \dots & p_m(1) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

而估值误差为

$$\Delta = y(t) - AP(t) = a^T PW - a^T Q + \sum_{i=1}^N W_{N-i} \varepsilon_i,$$

于是

$$E(\Delta) = a^T PW - a^T Q + 0,$$

为使 $Y(t)$ 为 $AP(t)$ 的无偏估计, 必须 $E(\Delta) = 0$, 于是

$$Q = PW.$$

或

$$Q^T = W^T P^T \quad (2.7)$$

因此, 为了给出 W 的无偏估计, 必须满足上述 $m+1$ 个约束方程。于是, 我们可在 (2.7) 的约束下, 确定出使

$$D(\Delta) = \text{Min}$$

的 W 的估计。

为此, 记观测向量为

$$Z = [Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_N], \quad (2.8)$$

记

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \dots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = [\rho(i-j)] = [\rho_{i-j}],$$

则 $\text{Var } \mathcal{E} = E \{ \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^T \} = \sigma^2 R,$

其中

$$\mathcal{E} = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N \}^T$$

因此 $D \{ \Delta \} = \sigma^2 W^T R W.$ (2.9)

我们用 Lagrange 乘子法确定 W 的条件估值。引入 λ 乘子:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

记

$$S^2 = \sigma^2 W^T R W + 2 \{ Q^T - W^T P^T \} \lambda,$$

将上式关于 W 求偏导数, 且令它为 0, 则得

$$2 \sigma^2 R W - 2 P^T \lambda = 0,$$

即

$$\sigma^2 R W = P^T \lambda$$

假定 R 是非奇异的, 则

$$W = \frac{1}{\sigma^2} R^{-1} P^T \lambda. \quad (2.11)$$

再注意到约束 (2.7), 将上式代入 (2.7), 则

$$\begin{aligned} Q &= P W = P \cdot \frac{1}{\sigma^2} R^{-1} P^T \lambda \\ &= \frac{1}{\sigma^2} P R^{-1} P^T \lambda, \end{aligned}$$

或者

$$\lambda = \sigma^2 (P R^{-1} P^T)^{-1} Q.$$

因此

$$W = R^{-1} P^T (P R^{-1} P^T)^{-1} Q. \quad (2.12)$$

且此时估值误差 Δ 的最小方差为

$$\begin{aligned} D \{ \Delta \} &= \sigma^2 W^T R W \\ &= \sigma^2 Q^T (P R^{-1} P^T)^{-1} P R^{-1} \cdot R \cdot R^{-1} \\ &\quad \cdot P^T (P R^{-1} P^T)^{-1} Q \\ &= \sigma^2 Q^T (P R^{-1} P^T)^{-1} Q. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.12) 是 W 的无偏最小偏差估计之下的一般结果。这里可以看到, 并没有必要假定 \mathcal{E} 为平稳观测噪声向量。平稳性的假定不过说明了 R 具有特定的表达形式而已。

(2.12) 的一个特殊情况是 \mathcal{E} 为白噪声向量, 此时 $R = I$, 于是

$$\begin{aligned} W &= \sigma^{-2} P^T (P \sigma^{-2} P^T)^{-1} Q \\ &= P^T (P^T)^{-1} P^T Q = P^T Q, \end{aligned} \quad (2.14)$$

而 $D(\Delta) = \sigma^2 Q^T Q$. (2.15)

§ 3 轨道参数的拟合

在 § 1 的模型之下, 如果取

$$A = \frac{d^L}{dt^L},$$

则由观测向量 Z 确定出的 $y_t \Big|_{t=N+\alpha} = \sum_{i=1}^N W_{N-i} Z_i$ 即为轨道(运动)参数的无偏最小方差估计, 如果 $L=0$, 它为 t 时刻的位置拟合; $L=1$ 即获得速度拟合; $L=2$ 为加速度拟合。为此, 我们给出在这种特殊情况下的 W 的估值公式。

我们假定观测向量 \mathcal{E} 为白噪声向量, 此时 $R = \sigma^2 I$, 这里 I 为 $N \times N$ 单位矩阵。此外, 为了计算上的方便, 取正交序列 $\{p_j(t)\}$ 为标准化正交序列, 且记它为 $\{p_j^*(t)\}$ 此时

$$p_j^*(t) = \frac{p_j(t)}{\sqrt{s(j, N)}},$$

$$P^* = \begin{bmatrix} p_0^*(N) & p_0^*(N-1) & \cdots & p_0^*(1) \\ p_1^*(N) & p_1^*(N-1) & \cdots & p_1^*(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m^*(N) & p_m^*(N-1) & \cdots & p_m^*(1) \end{bmatrix}; \quad (3.1)$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} Q_0^* \\ Q_1^* \\ \vdots \\ Q_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A p_0^*(t) \\ A p_1^*(t) \\ \vdots \\ A p_m^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0^{*(L)}((N+\alpha)h) \\ p_1^{*(L)}((N+\alpha)h) \\ \vdots \\ p_m^{*(L)}((N+\alpha)h) \end{bmatrix}$$

此时在 (2.12), (2.13) 中, 将 P^* 及 Q^* 代替 P, Q 时仍然成立, 在 $R = \sigma^2 I$ 的情况下,

$$W = P^{*T} Q^*,$$

在步长 $h = 1$ 的情况下, W 的分量为

$$\begin{aligned} W_r &= \sum_{j=0}^m P_j^* (N-r) Q_j^* \\ &= \sum_{j=0}^m P_j^* (N-r) P_j^{*(L)} (N+\alpha), \quad r=0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

注意到 (3.1), 则有

$$W_r = \sum_{j=L}^m \frac{P_j (N-r) P_j^{(L)} (N+\alpha)}{S(j, N)}, \quad r=0, 1, \dots, N-1.$$

上式也可改写为

$$W_{N-i} = \sum_{j=L}^m \frac{P_j(i) P_j^{(L)} (N+\alpha)}{S(j, N)}, \quad i=1, \dots, N. \quad (3.2)$$

此时 $AP(t) = \frac{d^L}{dt^L} P(t)$ 在 $t = N + \alpha$ 时的最小方差估计为

$$\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)} = \sum_{i=1}^N W_{N-i} \cdot Z_i. \quad (3.3)$$

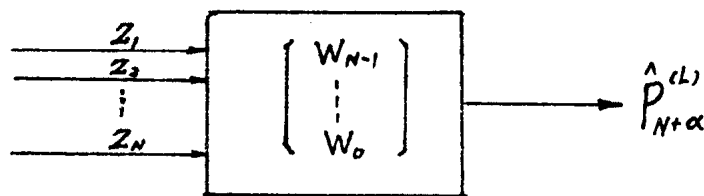


图 1 数字滤波示意图

而估计的方差为

$$D[\Delta] = D[\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^N (W_{N-i})^2 \quad (3.4)$$

(3.3) 式表示: 当获得了观测数据 Z_1, Z_2, \dots, Z_N 后, $P(t)$ 的 L 阶导数的估值可由观测数据的“加权和”表示, 它相当于一个滤波器, 输入量为 Z_1, \dots, Z_N , 输出量即为 $\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)}$ 。这里, α 是可以预先指定的某个数, 例如

(1) 如果取 $\alpha = 0$, 则 $\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)} = \hat{P}_N^{(L)}$ 表示在最后一个观测时间 t_N 的 L 阶导数的估值, 这就是人们常说的微分滤波问题;

(2) 如果 $\alpha = -i$, $i = 1, 2, \dots, N$, 则称 $\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)} = \hat{P}_{N-i}^{(L)}$ 为 L 阶导数的平滑问题或简称微分平滑问题;

(3) 如果 $\alpha > 0$, 则 $\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)}$ 为 L 阶导数的预测 (预报) 问题。

在实践中, 最常被应用的是 $L = 1$ 或 2 的情况。

考察 (3.3) 式中的权系数 W_{N-i} , 由 (3.2) 式可知, 它与多项式的次数 m 、微分的阶数 L 、采样点的个数 N 以及 α 的位置有关。当 m, L, N 和 α 为给定的情况下, W_{N-i} 是完全确定的量。

在应用中, 常常只取固定个数的观测值进行滤波计算。例如, 当新来了一个数据以后, 就把最老的一个数据去掉, 此时仍用 N 个数据的滤波公式, 权系数 W_{N-i} 完全不用重新计算, 而 (3.3) 式变为

$$\hat{P}_{N+1}^{(L)} = \sum_{i=1}^N W_{N-i} \cdot Z_{i+1} \quad (3.5)$$

在具体计算中, 权系数 W_{N-1}, \dots, W_0 可以预先计算好且存贮起来, 当 N 个观测数据循序地输入时, 只需把权系数和相应的观测序列相乘相加, 即可获得各不同时刻的滤波估值。如图 2 所示。这种方法称为“滑动和”

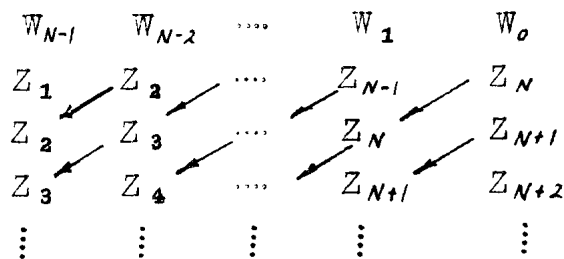


图 2 滑动和滤波图示

方法或“移动窗”方法。这是数字滤波最基本的方法。

下面, 我们在观测为等精度的情况下, 对于上述滑动和方法再作一些必要的解释。

将 $P(t)$ 的 L 阶导数估值的方差 $\sigma_{\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)}}^2$ 除以测量误差的方差 σ^2 , 且记此比值为 δ^2 , 于是

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= \sigma_{\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)}} / \sigma^2 = \sum_{i=1}^N (W_{N,i})^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=L}^m \frac{P_k(i) P_k^{(L)}(N+\alpha)}{S(K,N)} \right\}^2 \\
&= \sum_{k=L}^m \sum_{i=1}^N \frac{P_k^2(i) [P_k^{(L)}(N+\alpha)]^2}{S^2(K,N)} \\
&= \sum_{k=L}^m \frac{S(K,N) [P_k^{(L)}(N+\alpha)]^2}{S^2(K,N)} \\
&= \sum_{k=L}^m \frac{[P_k^{(L)}(N+\alpha)]^2}{S(K,N)} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

因此， δ^2 为 N ， α ， L ， m 的函数，记为 $\delta^2(N, \alpha, L, m)$ 。称 δ^2 为滤波或平滑的效率。它从随机误差方面说明了估值 $\hat{P}_{N+\alpha}^{(L)}$ 的方差对测量值方差之比的量级。如果 δ^2 较小，则说明滤波或平滑从消除随机性误差方面效果是较好的。当 $\alpha = 0$ 时， \hat{P}_N 及 \hat{P}_N'' 的 δ 的函数图形如图 3 和图 4 所示。

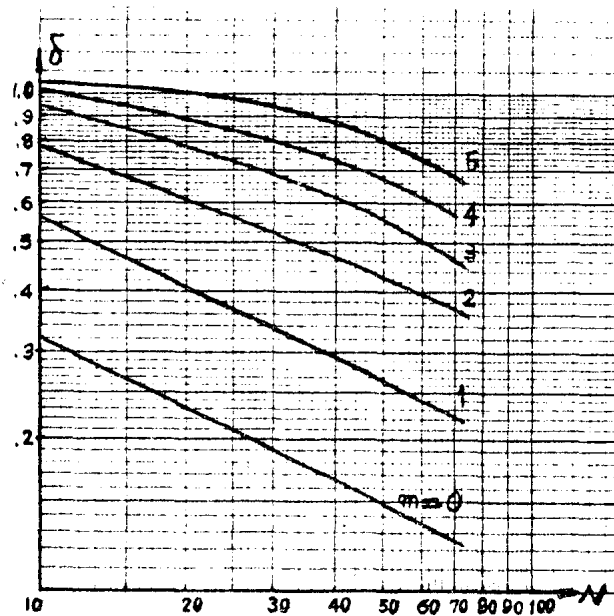


图 3 $\alpha = 0$ 、 $L = 0$ 时滤波的效率曲线图示

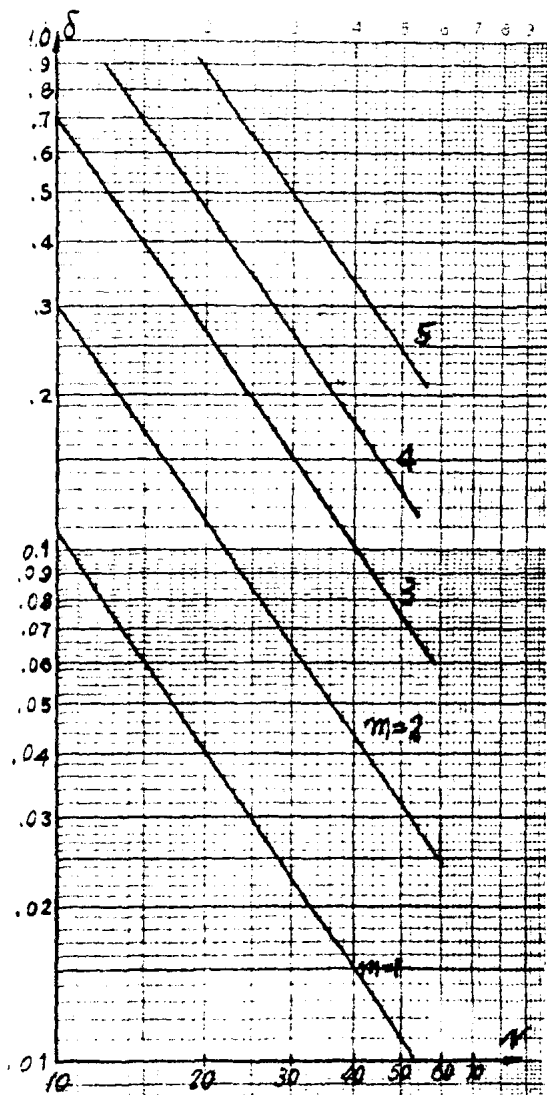


图4 $\alpha = 0, L = 1$ 时微分滤波效率曲线图示

由上述图形可以看出：当采样点 N 增加而拟合多项式次数 m 不变时，将使 δ 变小；而 m 的增加，在采样点 N 不变时，将使 δ 变大。必须指出，我们不能认为在曲线拟合中 δ 越小越好。因为在曲线拟合过程中，除了随机性误差以外，还有另一种误差，它是由于假定的拟合曲线为 m 次多项式时与实际的轨道有差异而引起。这种误差常称为所谓“截断误差”。这种误差我们在后续讨论中将作专门讨论。这里，为了加深两种不同误差的印象和认识，不妨看一个极其浅显的例子。例如，设飞行器的实际飞行路线（如高度）为 t 的一次式，但我们应用的拟合曲线假定它为常量（零次曲

线)。此时用观测所得的估值为观测值的平均值，即 $\hat{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i$ ，其方差为 $\frac{\sigma^2}{N}$ ，此时

$$\delta^2 = \frac{\sigma^2}{N} / \sigma^2 = \frac{1}{N},$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

当观测次数增大时， δ 越来越小，当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\delta \rightarrow 0$ 。但是实际情况是： N 越大，截断误差越大，以至当 $N \rightarrow \infty$ 时，截断误差为 ∞ ，因此采样的点数 N 和拟合多项式的次数 m 必须从实际情况出发，进行综合分析后确定。

在上面的讨论中，权系数 W_{N-i} 是在观测时间为整数时推导出来的。如果观测步长为 h ，则注意到 $\frac{t_i - t_0}{h} = i$ ，于是有

$$\frac{d}{dt_i} = \frac{d}{di} \cdot \frac{di}{dt_i} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d}{di},$$

$$\frac{d}{dt_i} \left(\frac{d}{dt_i} \right) = \frac{d}{dt_i} \left(\frac{1}{h} \frac{d}{di} \right) = \frac{d}{di} \cdot \frac{di}{dt_i} \left(\frac{1}{h} \frac{d}{di} \right) = \frac{1}{h^2} \frac{d^2}{di^2},$$

等等。于是回复到以 h 作为观测步长时，只需在 W_{N-i} 的表达式中除以 h^L 即可。此时公式 (3.2) 中的权系数改为

$$W_{N-i} = \frac{1}{h^L} \sum_{k=L}^m \frac{P_k(i) P_k^{(L)}(N+\alpha)}{S(k, N)}, \quad i=1, \dots, N. \quad (3.7)$$

而 (3.4) 式改为

$$\hat{\sigma}_{\hat{P}_{N+\alpha}}^2 = \frac{1}{h^{2L}} \sum_{i=1}^N (W_{N-i})^2 \sigma^2. \quad (3.8)$$

在等精度观测之下，

$$\delta^2(N, \alpha, L, m) = \frac{\hat{\sigma}_{\hat{P}_{N+\alpha}}^2 \cdot h^{2L}}{\sigma^2}. \quad (3.9)$$

由此可知， δ^2 还与观测的步长 h 有关。

剩下的问题是正交多项式的选取。我们可以用 Schmidt 关于函数列正交化的方法构成正交函数序列。这里，我们写出一个常被应用的正交多项式序列如下：

$$p_0(i) = 1,$$

$$p_1(i) = i - \bar{i}, \quad \bar{i} = \frac{n+1}{2},$$

$$p_2(i) = (i - \bar{i})^2 - \frac{n^2 - 1}{12},$$

$$p_3(i) = (i - \bar{i})^3 - (i - \bar{i}) \frac{3n^2 - 7}{20},$$

$$p_4(i) = (i - \bar{i})^4 - (i - \bar{i})^2 \cdot \frac{3n^2 - 13}{14} + \frac{3(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560},$$

$$p_5(i) = (i - \bar{i})^5 - (i - \bar{i})^3 \frac{5(n^2 - 7)}{18} + (i - \bar{i}) \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008},$$

⋮

一般地，有递推关系式：

$$P_{\nu+1}(i) = P_{\nu}(i) P_{\nu}'(i) - \frac{\nu^2(n^2 - \nu^2)}{4(4\nu^2 - 1)} P_{\nu-1}(i),$$

它们的具体推导可参阅〔11〕。

正交多项式的函数值有表可查。这样，在具体进行曲线拟合时，主要的工作是计算权系数 W_{N-i} ， $i = 1, \dots, N$ ，为了应用需要，下面给出当 $L = 0, 1, 2$ 时的平滑（或滤波）公式中的权系数计算公式。

1. 关于曲线平滑时的权系数

(1.1) $L = 0$ ， $m = 1$ 。即线性拟合时的情形

此时

$$\begin{aligned} W_{N-i} &= \sum_{k=0}^1 \frac{P_k(i) P_k'(N+\alpha)}{S(k, N)} \\ &= \frac{P_0(i) P_0'(N+\alpha)}{S(0, N)} + \frac{P_1(i) P_1'(N+\alpha)}{S(1, N)} \end{aligned}$$

其中

$$p_0(i) = 1,$$

$$p_0(N+\alpha) = 1,$$

$$p_1(i) = i - \frac{N+1}{2},$$

$$p_1^{(0)}(N+\alpha) = p_1(N+\alpha) = N+\alpha - \frac{N+1}{2} = \frac{N-1}{2} + \alpha$$

$$S(0, N) = \sum_{i=1}^N p_0^2(i) = N,$$

$$\begin{aligned} S(1, N) &= \sum_{i=1}^N p_1^2(i) = \sum_{i=1}^N \left(i - \frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left[i^2 - (N+1)i + \frac{(N+1)^2}{4} \right] \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - (N+1) \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N+1)^2}{4} \\ &= \frac{(N-1)N(N+1)}{12}. \end{aligned}$$

于是

$$W_{N-i} = \frac{1}{N} + \frac{12}{(N-1)N(N+1)} \left(\frac{N-1}{2} + \alpha \right) \left(i - \frac{N+1}{2} \right). \quad (3.10)$$

如果

$$\alpha = -\frac{N-1}{2} \quad (\text{中点})$$

则

$$W_{N-i} = \frac{1}{N},$$

此时

$$\hat{P}_{N-\frac{N-1}{2}} = \hat{P}_{\frac{N+1}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i, \quad \text{这是可以预期的}$$

结果。

(1.2) $L=0$, $m=2$, 即二次曲线的拟合情况, 此时

$$\begin{aligned} W_{N-i} &= \sum_{k=0}^2 \frac{P_k(i) P_k^{(0)}(N+\alpha)}{S(k, N)} \\ &= \frac{P_0(i) P_0(N+\alpha)}{S(0, N)} + \frac{P_1(i) P_1(N+\alpha)}{S(1, N)} + \frac{P_2(i) P_2(N+\alpha)}{S(2, N)}, \end{aligned}$$

其中 $S(0, N)$, $S(1, N)$ 同于 (1.1) 中的结果, 而