面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数

王迺信　主编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

王迺信 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部农林数学学科“九五”规划教材.

本教材从线性代数方程组的表示、求解以及解的分析入手，引入线性代数的基本概念.

本教材突出线性变换的观点，用线性变换的观点解释线性代数方程组，解释矩阵及其各种运算，解释特征值和特征向量，解释二次型化标准形等，并选择适当的引例，揭示概念的背景和内涵，使概念更清晰.

本教材突出初等变换的方法，用初等变换的方法求解线性代数方程组，判定向量组的线性相关性和秩，进行矩阵的求逆等运算，以及求特征值和特征向量等，简化运算技巧，使解法更规范，更简明.

此外，本教材减弱了行列式的内容，略去了一些次要的证明，加强了线性代数的应用，并且专列了应用举例一章和数值方法举例一章.

本书可供高等农林院校作为教材选用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王通信主编 .—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-008992-0

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第62097号

线性代数

王通信 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**邮政编码**	100009
电　　话	010-64054588	**传　　真**	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2000年9月第1版
印　　张	14.75	**印　　次**	2000年9月第1次印刷
字　　数	260 000	**定　　价**	12.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

序

教育部"面向21世纪高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践"课程(04－6项目)，自1996年启动，经过近四年的深入研究，由原西北农业大学、原西北林学院、宁夏农学院、塔里木农垦大学、河北农业大学和东北农业大学携手联袂，完成了《微积分》、《线性代数》、《概率论与应用数理统计》、《试验设计与分析》和《数学实验》等五本系列教材的编写工作.

20世纪数学的巨大发展，确立了它在整个科学技术中的基础地位. 数学与物理学、化学、生态学、经济学等的融合，涌现出一系列的交叉学科，表明数学已向人类的一切知识领域渗透. 面向21世纪，高等农林院校本科数学的教学内容和课程体系如何符合今日"数学应用"的时代要求呢？中国科学院院士吴文俊教授认为"应该训练学生的逻辑推理能力，但也应适可而止. 只会推理，缺乏数学直觉，是不会有创造性的."因此，在我们编写五本系列教材的过程中，遵循了三条原则：首先，审慎考虑和保留传统数学中最必要的内容，适度增添一些最必要的新内容；其次，推理适可而止，对于学生望而生畏的较为复杂的证明，尽量给以思想性的说明，使学生在应用中"知其然"，并在一定程度上"知其所以然"；第三，力求通过数学在农林科学中应用的范例，启迪学生把数学创造性地用于农林科学.

把五本系列教材作为高等农林院校数学基础课程的教学内容和课程教材体系，显然还不成熟，然而它却是我们多年从事数学教学并与农林科学相结合的产物. 本系列教材是多所农林院校的数学工作者和农林科学工作者长期合作研究的结果，总主编由课题主持人袁志发教授担任，编委有袁志发教授、王迺信教授、周静芋教授、孟德顺教授、刘光祖教授、卢恩双副教授和宋世德副教授. 编委会对研究、编写者们付出的辛劳，表示衷心的感谢.

限于编者们的水平，内容的疏漏和错误在所难免，望同行专家和读者不吝赐教.

袁志发

2000年3月

前　　言

本教材从线性代数方程组的表示、求解以及解的分析入手，引入线性代数的基本概念，展开线性代数的讨论．

本教材突出线性变换的观点，用线性变换的观点解释线性代数方程组，解释矩阵及其各种运算，解释特征值和特征向量，解释二次型化标准形等，并选择适当的例题，揭示概念的背景和内涵，使概念更清晰．

本教材突出初等变换的方法，用初等变换的方法求解线性代数方程组，判定向量组的线性相关性和秩，进行矩阵的求逆等运算，以及求特征值和特征向量等，简化了运算技巧，使解法更规范，更简明．

此外，本教材减弱了行列式的内容，略去了一些次要的证明，加强了线性代数的应用，并且专列了应用举例一章和数值方法举例一章．

古人云：取法乎上，仅得乎中．由于水平所限，错漏在所难免，敬请批评指正，以便修改．

本教材由西北农林科技大学、东北农业大学、宁夏农学院和塔里木农垦大学合作编写．主编为王迺信，副主编为卢恩双、刘瀛洲、敖长林、刘建平、边宽江和许新忠，参加编写的还有史美英、刘建军、张远迎、李青、吴素萍、郑立飞、连坡，全部插图由郑瑶绘制．

孟德顺教授审阅了全书初稿，并提出了许多中肯的修改意见，特此表示衷心的感谢．

编　者

2000 年 3 月

目　　录

第一章　线性代数基本概念

第一节　线性代数方程组

我们从讨论线性代数方程组开始，介绍线性代数的基本概念和基本方法．这不仅因为实践中的许多问题可以归结为线性代数方程组问题，而且因为线性代数方程组的表达方法，求解步骤，解的存在性，解的结构等，几乎涉及到线性代数的所有基本概念和基本方法．

称下列形式的方程组为**线性代数方程组**：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

在这个方程组中，方程有 m 个，分别称为第一、第二、…、第 m 个方程；未知量有 n 个，分别为 x_1，x_2，…，x_n．m 和 n 不必相等．在方程组中，用 a_{ij} 表示第 i 个方程中 x_j 的系数，用 b_i 表示第 i 个方程中右端的常数．例如：用 a_{23} 表示第二个方程中 x_3 的系数，用 b_4 表示第四个方程中右端的常数．

特别地，如果每个方程右端的常数均为零，即 $b_1=0$，$b_2=0$，…，$b_m=0$，则方程组称为齐次线性代数方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

解线性代数方程组的常用方法是消去法．

一、消去法引例

例 1　解线性代数方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ -x_1+3x_2+2x_3=1, \\ x_1+2x_2+3x_3=9. \end{cases}$$

解　第二方程加上第一方程的 1 倍，第三方程加上第一方程的(-1)倍，就可以从第二方程和第三方程中消去 x_1 的系数，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 4x_2+3x_3=5, \\ x_2+2x_3=5, \end{cases}$$

互换第二方程与第三方程的位置得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ x_2+2x_3=5, \\ 4x_2+3x_3=5, \end{cases}$$

第一方程加上第二方程的(-1)倍，第三方程加上第二方程的(-4)倍，就可以从第一方程和第三方程中消去 x_2 的系数，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3=-1, \\ x_2+2x_3=5, \\ -5x_3=-15, \end{cases}$$

第三方程的两边同乘以$\left(-\dfrac{1}{5}\right)$，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3=-1, \\ x_2+2x_3=5, \\ x_3=3, \end{cases}$$

第一方程加上第三方程的 1 倍，第二方程加上第三方程的(-2)倍，就可以从第一方程和第二方程中消去 x_3 的系数，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-1, \\ x_3=3, \end{cases}$$

这实际上说明方程组有唯一解：$x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=3$.

例 2　解线性代数方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=4, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5=9, \\ -x_1+3x_2+2x_3-x_4+9x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3+4x_4+5x_5=-2. \end{cases}$$

解　同例 1，利用第一方程消去第二、三、四方程中 x_1 的系数，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=4, \\ x_2+2x_3-x_4=5, \\ 4x_2+3x_3+x_4+10x_5=5, \\ -2x_3+2x_4+4x_5=-6, \end{cases}$$

同理，利用第二方程消去第一、三、四方程中 x_2 的系数，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3+3x_4+x_5=-1, \\ x_2+2x_3-x_4=5, \\ -5x_3+5x_4+10x_5=-15, \\ -2x_3+2x_4+4x_5=-6, \end{cases}$$

第三方程两边同乘以$\left(-\frac{1}{5}\right)$，再利用第三方程消去第一、二、四方程中 x_3 的系数，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_4-x_5=2, \\ x_2+x_4+4x_5=-1, \\ x_3-x_4-2x_5=3, \\ 0=0, \end{cases}$$

这实际上说明，对于任意给定的 x_4 和 x_5，只要取 $x_1=-2x_4+x_5+2$，$x_2=-x_4-4x_5-1$，$x_3=x_4+2x_5+3$，均构成方程组的解．或者说，对于任意的常数 k_1，k_2，

$$\begin{cases} x_1=-2k_1+k_2+2, \\ x_2=-k_1-4k_2-1, \\ x_3=k_1+2k_2+3, \\ x_4=k_1, \\ x_5=k_2 \end{cases}$$

均构成方程组的解．此时，方程组有无穷多组解．

例 3　解线性代数方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=4, \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5=9, \\ -x_1+3x_2+2x_3-x_4+9x_5=1, \\ x_1+x_2-x_3+4x_4+5x_5=-5. \end{cases}$$

解　重复例 2 中的方法，得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 2x_4 - \ x_5 = 2, \\ \quad x_2 \qquad + \ x_4 + 4x_5 = -1, \\ \qquad x_3 - \ x_4 - 2x_5 = 3, \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = -3, \end{cases}$$

注意到方程组中出现了矛盾方程 $0=-3$，这实际上说明方程组无解，因为不管 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 取任何值，都不可能满足第四方程，即都不可能满足方程组.

二、消去法的一般步骤和结果

消去法的基本思想是：在线性代数方程组中，如果某方程中某未知量的系数非零，则可以利用它消去所有其他方程中该未知量的系数，从而使方程组得到简化.

消去的过程是对方程组连续施行下列变换：

ⅰ. 某一方程两边同乘以非零常数；

ⅱ. 某一方程加上另一方程的若干倍；

ⅲ. 互换两个方程或两个未知量的位置.

显然，这些变换都是同解变换. 因而，消去法所得到的是同解方程组.

为了便于讨论，现将消去法的一般步骤规范叙述如下：

设线性代数方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

1. 利用第一方程第一未知量的非零系数消去其他方程的第一未知量的系数.

(1) 不失一般性，设 $a_{11}\neq 0$. 这是因为如果 $a_{11}=0$，可以通过互换两个方程或互换两个未知量的位置，使变换后的第一方程第一未知量的系数非零，即使 $a_{11}\neq 0$.

(2) 第一方程两边同乘以非零常数 $\frac{1}{a_{11}}$，使第一方程第一未知量的系数化为 1.

(3) 第 i 方程($i\neq 1$)加上第一方程的($-a_{i1}$)倍，则消去第 i 方程的第一未知量的系数，得同解方程组形如

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

2. 利用第二方程第二未知量的非零系数消去其他方程的第二未知量的系数.

(1) 不失一般性，设 $a'_{22}\neq 0$. 这是因为如果 $a'_{22}=0$，可以通过互换除第一方程之外的任意两个方程的位置，或互换除第一未知量之外的任意两个未知量的位置，使变换后的第二方程第二未知量的系数非零，即使 $a'_{22}\neq 0$.

(2) 第二方程两边同乘以非零常数$\dfrac{1}{a'_{22}}$,使第二方程第二未知量的系数化为 1.

(3) 第 i 方程($i\neq 2$)加上第二方程的 $-a'_{i2}$倍，则消去第 i 方程的第二未知量的系数，得同解方程组形如

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a''_{13}x_3 + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ \qquad x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m. \end{cases}$$

以此类推，直到这个过程不能再进行为止.

消去的结果是把原线性代数方程组变换为如下形式的同解方程组，我们称其为**最简方程组**:

ⅰ. 第一形式最简方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad\qquad = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n. \end{cases}$$

此时，方程组有唯一解，即 $x_1=d_1$，$x_2=d_2$，$\cdots$，$x_n=d_n$.

ⅱ. 第二形式最简方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 \qquad + c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\quad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases}$$

其中 $r<n$. 此时，方程组有无穷多组解. 实际上，对于任意的常数 k_1，k_2，$\cdots$，k_{n-r}，

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r} + d_1, \\ x_2 = -c_{2r+1}k_1 - \cdots - c_{2n}k_{n-r} + d_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_r = -c_{rr+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r} + d_r, \\ x_{r+1} = k_1, \\ \quad \cdots\cdots \\ c_n = k_{n-r} \end{cases}$$

均为方程组的解.

ⅲ. 第三形式最简方程组

$$\begin{cases} x_1 & & & = d_1, \\ & x_2 & & = d_2, \\ & & \cdots\cdots & \\ & & x_n & = d_n, \\ & & & 0 = d_{n+1}, \end{cases}$$

其中 $d_{n+1} \neq 0$. 或

$$\begin{cases} x_1 & & + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ & x_2 & + c_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ & \cdots\cdots & \\ & & x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ & & 0 = d_{r+1}, \end{cases}$$

其中 $d_{r+1} \neq 0$. 此时，方程组中均包含有矛盾方程，因而方程组无解.

在应用消去法解线性代数方程组时，不必拘泥于上述步骤，可以根据具体问题具体分析的原则灵活运用.

三、消去法再举例

例 4 解线性代数方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

解 利用第一方程 x_1 的系数 1 消去其他方程 x_1 的系数，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad -2x_2 - 5x_3 = -3, \\ \quad -2x_2 - 6x_3 = -8, \end{cases}$$

利用第二方程 x_2 的系数(-2)消去其他方程 x_2 的系数，得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - 2x_3 = -1, \\ \quad -2x_2 - 5x_3 = -3, \\ \qquad\qquad -x_3 = -5, \end{cases}$$

利用第三方程 x_3 的系数(-1)消去其他方程 x_3 的系数，得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 9, \\ \quad -2x_2 \qquad = 22, \\ \qquad\quad -x_3 = -5, \end{cases}$$

此即最简方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad = 9, \\ \quad x_2 \quad = -11, \\ \qquad x_3 = 5. \end{cases}$$

故知，方程组有唯一解：$x_1=9$，$x_2=-11$，$x_3=5$.

例 5 解线性代数方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4=2, \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

解 利用第一方程 x_1 的系数 1 消去其他方程 x_1 的系数，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+\ x_4=2, \\ \qquad\qquad x_3-\ x_4=-2, \\ \qquad\quad 2x_3+4x_4=2, \end{cases}$$

利用第二方程 x_3 的系数 1 消去其他方程 x_3 的系数，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad +2x_4=4, \\ \qquad\qquad x_3-\ x_4=-2, \\ \qquad\qquad\quad 6x_4=6, \end{cases}$$

第三方程两边同乘以$\frac{1}{6}$，再利用第三方程 x_4 的系数 1 消去其他方程 x_4 的系数，得

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad =2, \\ \qquad\qquad x_3 \quad =-1, \\ \qquad\qquad\quad x_4=1, \end{cases}$$

此即最简方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad +2x_2=2, \\ \quad x_3 \quad +0x_2=-1, \\ \qquad x_4+0x_2=1, \end{cases}$$

这里相当于对未知量的位置进行了互换. 显然方程组有无穷多组解. 实际上，对于任意常数 k，

$$\begin{cases} x_1=-2k+2, \\ x_2=k, \\ x_3=\quad -1, \\ x_4=\qquad 1 \end{cases}$$

恒为方程组的解.

例 6 在下列线性代数方程组中，λ 为何值时无解？λ 为何值时有解？有解时写出其解：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = \lambda. \end{cases}$$

解 利用第一方程 x_2 的系数 1 消去其他方程的 x_2 的系数，得

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 7x_1 \qquad - x_3 - x_4 = 6, \\ -7x_1 \qquad + x_3 + x_4 = \lambda - 4, \end{cases}$$

利用第二方程 x_3 的系数(-1)消去其他方程的 x_3 的系数，得

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 = -5, \\ 7x_1 \qquad - x_3 - x_4 = 6, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \lambda + 2, \end{cases}$$

显然，当 $\lambda + 2 \neq 0$，即 $\lambda \neq -2$ 时，方程组无解；当 $\lambda + 2 = 0$，即 $\lambda = -2$ 时，此即最简方程组

$$\begin{cases} x_2 \quad - 5x_1 + 2x_4 = -5, \\ \quad x_3 - 7x_1 + x_4 = -6, \end{cases}$$

对于任意的常数 k_1，k_2，

$$\begin{cases} x_1 = k_1, \\ x_2 = 5k_1 - 2k_2 - 5, \\ x_3 = 7k_1 - k_2 - 6, \\ x_4 = \qquad\quad k_2 \end{cases}$$

均为方程组的解.

第二节 向　　量

线性代数方程组及其解都可以用向量及其运算来表示，来解释，来理解.

一、n 维向量

定义 1 n 个实数所构成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为 **n 维向量**. 数组中的元素称为向量的**分量**, 例如 a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量.

向量用分量表示时, 可以按照需要写成一行或写成一列. 向量写成一行时, 称为行向量; 向量写成一列时, 称为列向量.

向量完全由各分量决定, 因此, 两个向量相等, 指其对应分量完全相等.

特别地, 所有分量都为零的向量, 称为**零向量**, 记为$\mathbf{0}$, 其行向量形式为

$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0).$$

只有一个分量为 1, 而其他分量都为零的向量, 称为**基本单位向量**, 记为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$, 其行向量形式为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0),\\
&\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0),\\
&\cdots\cdots\\
&\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1).
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 称为第 i 基本单位向量.

定义 2 设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量, k 为实数, 规定如下两种线性运算, 其运算结果仍为 n 维向量:

i. 加法:

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{bmatrix};$$

ii. 数乘:

$$k\boldsymbol{\alpha}=k\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{bmatrix}.$$

还可以规定负向量和向量的减法为:

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\alpha}&=(-1)\boldsymbol{\alpha},\\
\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).
\end{aligned}$$

显然, 向量的加法和数乘满足如下性质:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $k_1(k_2\boldsymbol{\alpha})=(k_1k_2)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $k_1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\beta}$;

(8) $(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\alpha}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$为n维向量，k_1，k_2为实数.

规定了上述加法和数乘两种运算的全体n维向量的集合，称为**n维向量空间**.

定义 3 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_l$为l个n维向量，k_1，k_2，…，k_l为l个实数，则称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l$$

为向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_l$的**线性组合**. 设$\boldsymbol{\beta}$为n维向量，如果

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_l\boldsymbol{\alpha}_l,$$

则称$\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_l$的线性组合，或称$\boldsymbol{\beta}$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_l$线性表示.

显然，n维向量空间中的任何向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

都可以表示为基本单位向量$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$的线性组合：

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n.$$

二、线性代数方程组的向量表示

对于线性代数方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+x_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

设m维向量$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}$分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{\alpha}_j$称为x_j的系数向量，$\boldsymbol{\beta}$称为方程组的右端向量. 此时，方程组可以表示为如下的向量形式