成人高等教育教材经济应用数学（二）

线性代数

Linear Algebra

朱光贵 主编

首都师范大学出版社

成人高等教育教材经济应用数学(二)

线性代数

朱光贵 主编

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/朱光贵主编. —北京：首都师范大学出版社，2001.2
ISBN 7-81064-232-4

Ⅰ.线… Ⅱ.朱… Ⅲ.线性代数-成人教育：高等教育-教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第01390号

XIANXING DAISHU
线性代数

首都师范大学出版社
(北京西三环北路105号 邮政编码100037)
北京首师大印刷厂印刷 全国新华书店经销
2001年2月第1版 2001年2月第1次印刷
开本880×1230 1/32 印张12.875
字数350千 印数0,001～7,000册
定价20.00元

前　言

本书是中国人民大学成人高等教育学院的系列教材之一，是专为学习线性代数而编写的. 也可作为全日制高等学校经济类各专业的学生学习线性代数的参考书，尤其适合参加自学高考的读者使用.

本书共分五章. 第一章行列式，第二章 n 维向量，第三章矩阵，第四章线性方程组，第五章特征值与特征向量.

本书编写的基本指导思想是要便于学员自学. 因此在编写中力求讲得条理清楚，重点突出，概念明确，通俗易懂；对于读者在自学中可能发生困难的地方，都作了比较详细的分析和推导. 每一基本内容后面的例题也选得比较多，同时将解题过程尽量写得易于接受. 每一章后面均附有学习的基本要求和内容提要，便于读者掌握重点和复习. 对于习题，选其中的一部分作了解答，便于学员参考.

参加本书编写的还有史可、赵中林、朱萌、张京元等同志.

由于编者水平所限，书中定有不少缺点和错误，请读者批评指正.

编　者

2000 年 11 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个重要概念.本章从二、三元方程组的解的公式出发,引出二阶、三阶行列式的概念,然后推广到 n 阶行列式,并导出行列式的一些基本性质及行列式按行(列)展开的定理,最后讲用行列式解 n 元方程组的克莱姆法则和齐次方程组有无非零解的判别定理.

§1.1 二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

我们从二元方程组的解的公式,引出二阶行列式的概念.

在线性代数中,将含两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1,x_2 的值,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是二元方程组的解的公式.但这个公式不好记,为了便于记这个公式,于是引进二阶行列式的概念.

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，它表示两项的代数和：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$
即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

二阶行列式所表示的两项的代数和，可用下面的对角线法则来记忆：从左上角到右下角两个元素相乘取正号，从右上角到左下角两个元素相乘取负号，如图 1—1 所示.

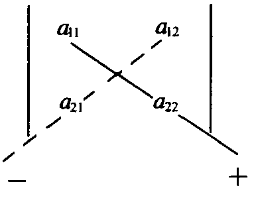

图　1—1

由于公式(1.3)的行列式中的元素就是二元方程组中未知量的系数，所以又称它为二元方程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

如果将 D 中第 1 列的元素 a_{11}，a_{21} 换成常数项 b_1，b_2，则可得到另一个行列式，用字母 D_1 表示，于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$b_1a_{22}-a_{12}b_2$，这就是公式(1.2)中 x_1 的表达式的分子. 同理将 D 中第 2 列的元素 a_{12}，a_{22} 换成常数项 b_1，b_2，可得到另一个行列式，用字母 D_2 表示，于是有

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$a_{11}b_2-b_1a_{21}$，这就是公式(1.2)中 x_2 的表达式的分子.

于是二元方程组的解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.2$'$}$$

其中 $D\neq 0$.

有了二阶行列式的定义和公式(1.2′)之后，可以很方便地用二阶行列式来解二元方程组.

例 1 用二阶行列式解二元方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=1 \\ x_1+3x_2=2 \end{cases}$$

解

因为 $$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-4\times 1=2\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-4\times 2=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 1=3$$

所以 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{2}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}$$

不难检验这个结果是正确的.

二、三阶行列式

含三个未知量三个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

还是用加减消元法，即可求得方程组(1.4)的解的公式，当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，有

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\
x_2=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}\\
x_3=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

这就是三元方程组的解的公式. 这个公式更不好记，为了便于记它，于是引进三阶行列式的概念.

我们称记号

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

为三阶行列式，它表示 6 项的代数和：

$$
\begin{gathered}
a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}
\end{gathered}
$$

即定义

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\begin{aligned}
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}\\
&\quad+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\
&\quad-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

三阶行列式所表示的 6 项的代数和，也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元

素相乘取负号，如图 1－2 所示.

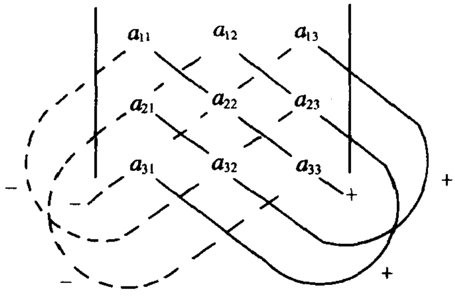

图 1－2

由于公式(1.6)的行列式中的元素就是三元方程组中未知量的系数，所以称它为三元方程组的系数行列式，也用字母 D 来表示，即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同理将 D 中第 1 列、第 2 列、第 3 列的元素分别换成常数项 b_1，b_2，b_3，就可以得到另外三个三阶行列式，分别记为 D_1，D_2 和 D_3，于是有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

按照三阶行列式的定义，它们都表示 6 项的代数和；并且分别是公式(1.5)中 x_1，x_2 和 x_3 的表达式的分子，而系数行列式 D 是它们的分母.

于是三元方程组的解的公式又可写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5'}$$

其中 $D\neq 0$，D_1，D_2，D_3 都是三阶行列式.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned}D&=1\times 2\times 2+2\times 1\times 3+3\times 2\times 1\\&\quad-3\times 2\times 3-2\times 2\times 2-1\times 1\times 1\\&=4+6+6-18-8-1=-11\end{aligned}$$

例 3 用三阶行列式解三元方程组

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=-4\\6x_1-2x_2+3x_3=-1\\5x_1-3x_2+2x_3=-3\end{cases}$$

解

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}4 & -3 & 2\\ 6 & -2 & 3\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}\\&=4\times(-2)\times 2+(-3)\times 3\times 5+2\times 6\times(-3)\\&\quad-2\times(-2)\times 5-(-3)\times 6\times 2-4\times 3\times(-3)\\&=-16-45-36+20+36+36=-5\neq 0\end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-4 & -3 & 2\\ -1 & -2 & 3\\ -3 & -3 & 2\end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4 & -4 & 2\\ 6 & -1 & 3\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}=-10$$

$$D_3=\begin{vmatrix}4 & -3 & -4\\ 6 & -2 & -1\\ 5 & -3 & -3\end{vmatrix}=5$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-5}{-5}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-5}=2,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{5}{-5}=-1$$

为方程组的解(代入方程组检验,确为方程组的解).

§1.2 n阶行列式

前一节中我们讲了二阶、三阶行列式的定义,在这一节中我们要将它推广到 n 阶.

例如四阶行列式的记号为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

我们如何定义它呢?根据对角线法则,恐怕很快会想到将四阶行列式定义为 8 项的代数和,其中 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$,$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$,$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$取正号,其余 4 项取负号. 这个定义很简单,计算起来也方便,但可惜没什么用处,因此数学家不是这么定义的,而是将它定义为 24 项的代数和,其中 12 项正的,12 项负的.

为了讲清楚一般的 n 阶行列式的定义,我们先介绍一个预备知

识:排列的逆序数的概念.

一、排列的逆序数

一共要讲 7 个名词.

排列:由 n 个不同的元素 $1,2,3,\cdots,n$ 排成的任一有序数组,称为一个 n 级全排列,简称 n 级排列.

例如　1 2 3 4 是一个 4 级排列,

4 3 2 1 也是一个 4 级排列,

5 2 3 4 1 是一个 5 级排列.

排列总数:n 级排列的总的个数称为 n 级排列的总数,用符号 P_n 表示. 我们自然会提出这样的问题:n 级排列的总数共有多少个? 例如 4 级排列的总数有多少个?

一般地有以下结论:

n 级排列的总数 P_n 为 $n!$ 个.

这是很容易理解的,因为从 n 个不同的元素 $1,2,\cdots,n$ 中任取一个作为 n 级排列的第一个元素,共有 n 个取法;然后从余下的 $n-1$ 个元素中任取一个作为 n 级排列的第二个元素,共有 $n-1$ 个取法;$\cdots$;最后余下一个元素取作 n 级排列的最后一个元素,所以总共有 $n(n-1)\cdots 1=n!$ 个取法.

例如由 1,2,3 这三个数码可以排出 $3!=6$ 个 3 级排列,它们是:1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1.

一般地,我们将一个 n 级排列记为 $i_1i_2\cdots i_n$,其中 i_1 是 $1,2,\cdots,n$ 中的某一个数,i_2 是余下的 $n-1$ 个数中的某一个数,$\cdots$. 例如当排列为 3 2 4 1 时,表示 i_1 为 3,i_2 为 2,i_3 为 4,i_4 为 1;当排列为 5 1 4 2 3 时,表示 i_1 为 5,i_2 为 1,i_3 为 4,i_4 为 2,i_5 为 3.

排列的逆序:在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有某个较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面,就称 i_t 与 i_s 构成了一个逆序.

例如在 5 级排列 1 2 3 5 4 中,较大的数 5 排在较小的数 4 之前,就称 5 与 4 为一个逆序.

又如在 3 级排列 3 1 2 中,较大的数 3 排在较小的数 1 之前为一

个逆序，3 在 2 之前也是一个逆序. 即 3 级排列 3 1 2 中有两个逆序.

排列的逆序数：一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数，称为此排列的逆序数，记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

由于 5 级排列 1 2 3 5 4 中，只有一个逆序，所以

$$N(1\ 2\ 3\ 5\ 4)=1$$

又由于 3 级排列 3 1 2 中，共有两个逆序，所以

$$N(3\ 1\ 2)=2$$

求一个排列的逆序数的方法是：先求第一个元素 i_1 的逆序数 N_1，再求第二个元素 i_2 的逆序数 N_2，…，最后求第 $n-1$ 个元素 i_{n-1} 的逆序数 N_{n-1}，将它们加起来即可. 即有

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=N_1+N_2+\cdots+N_{n-1}$$

奇排列、偶排列：如果 $N(i_1i_2\cdots i_n)$为奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；如果 $N(i_1i_2\cdots i_n)$为偶数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为偶排列.

例如 n 级排列 1 2…n 为偶排列，3 级排列 3 1 2 为偶排列，5 级排列 1 2 3 5 4 为奇排列.

例 1 计算 $N(3\ 2\ 1\ 4\ 5)$和 $N(3\ 4\ 1\ 2\ 5)$

解

$$N(3\ 2\ 1\ 4\ 5)=2+1+0+0=3$$
$$N(3\ 4\ 1\ 2\ 5)=2+2+0+0=4$$

例 2 计算 $N[n\ (n-1)\cdots 2\ 1]$，并确定 n 级排列 $n\ (n-1)\cdots 2\ 1$ 的奇偶性.

解

$$\begin{aligned}&N[n\ (n-1)\cdots 2\ 1]\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)\\&=\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

此排列的奇偶性因 n 之不同而不同.

当 n 为 4 的整数倍时，即 $n=4k, k=1,2,\cdots$时，则 $N=\frac{1}{2}4k(4k-1)=2k(4k-1)$，不论 k 取何值，N 均为偶数.

当 $n=4k+1$，$k=0, 1, \cdots$ 时，则 $N=2k(4k+1)$，不论 k 取何值，N 均为偶数.

当 $n=4k+2$，$k=0, 1, \cdots$ 时，则 $N=(2k+1)(4k+1)$，不论 k 取何值，N 均为奇数.

当 $n=4k+3$，$k=0, 1, \cdots$ 时，则 $N=(4k+3)(2k+1)$，不论 k 取何值，N 均为奇数.

所以当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时为奇排列. 具体地说，当 n 为 2,3,…时，N 的值如下表：

n	2	3	4	5	6	7	…
N	1	3	6	10	15	21	…

即当 n 为 2,3 时，为奇排列；n 为 4,5 时，为偶排列；n 为 6,7 时，又为奇排列；…

对换：在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果只将 i_s 与 i_t 的位置互换（其余均不动），得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一次对换.

例如在排列 3 2 1 4 5 中，将 2 与 4 对换，得到新的排列为 3 4 1 2 5.

在上面的例 1 中我们看到了：奇排列 3 2 1 4 5 经对换 2 与 4 之后，变成了偶排列 3 4 1 2 5. 反之，也可以说偶排列 3 4 1 2 5 经对换 4 与 2 之后，变成了奇排列 3 2 1 4 5.

一般地，有以下定理：

定理 1.1 任一排列经过一次对换后，其奇偶性发生变化.

就是说，奇排列经过一次对换后变成偶排列，偶排列经过一次对换后变成奇排列.

证 首先讨论对换相邻两个元素的情况. 设排列为

$$a_1a_2\cdots a_tijb_1b_2\cdots b_m$$

将相邻两元素 i 与 j 作一次对换，则排列变为