特殊矩阵

SPECIAL MATRICES

陈景良　陈向晖　著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

TE SHU JU ZHEN

特殊矩阵

SPECIAL MATRICES

陈景良 陈向晖

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

图书在版编目(CIP)数据

特殊矩阵/陈景良，陈向晖 编著.—北京：清华大学出版社，2000
ISBN 7-302-04129-6

I. 特… II. ① 陈… ② 陈… III. 矩阵-理论 IV. 0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77889 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京市清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：850×1168　1/32　**印张**：25.375　**字数**：635 千字
版　次：2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-04129-6 /O・251
印　数：0001～4000
定　价：45.00 元

内容提要

本书是一部全面介绍有专门术语或人名命名的矩阵的论著，无论在学术上还是在应用上都有其独特的作用.

全书共 10 章，内容包括：基础知识，从现代数学的观点阐述了线性代数的基本理论；不可约、对角优势、酉、正规等基本性质矩阵；自伴（Hermite）、正定和半正定等矩阵以及稳定矩阵等；正、非负、循环、素和随机等矩阵，以及M-矩阵和H-矩阵等；Jordan 标准形和相似变换、友矩阵和 Frobenius 矩阵、Schur 标准形和奇异值分解、Householder 变换和 Hessenberg 矩阵、Givens 变换和 QR 分解、Gauss 变换和 LU 分解；带状、轮换、Toeplitz、Hankel、中心对称、同伴和结式等特型矩阵；Kronecker 积和 Hadamard 积等特殊积矩阵，以及各种广义逆矩阵；Jacobi、Gauss-Seidel、SOR、SSOR、AOR 和 SAOR 诸方法的矩阵分裂和迭代矩阵；多项式、非多项式和 Hadamard 等矩阵函数，以及一般函数矩阵和作为特殊情形的 λ-矩阵与有理矩阵；矩阵的有向图，性质 A、相合、辛、整数、奇偶校验、对合、区间和自反等矩阵综述，以及关于素、复对称和自伴等矩阵的进一步的性质.

本书取材丰富，涵盖 280 余种命名矩阵，能反映最新进展；理论严谨，重点突出，择优推证方法；贯穿应用背景或具体应用；结构合理，既有系统性，适合全面阅读，又具可分性，便于选读；灵活实用，查阅方便；深入浅出，阅读本书只需具备微积分和线性代数的基本知识.

本书兼理论专著、工具书、大学有关专业教材或参考书于一. 读者对象主要为数学尤其应用数学和数值数学、工程技术以及经济科学等工作者、大学教师、本科生和研究生.

序　　言

矩阵简史

矩阵并非如同一种容易产生的猜想那样直接源自线性方程组系数的研究.系数阵列导致数学家们发展了**行列式**而不是矩阵.微积分创建合作者 Leibniz 在 1693 年使用了行列式,先于矩阵成为独立研究对象约 150 年.Cramer 在 1750 年建立解线性方程组的行列式基本公式,Gauss 在 1820 年左右提出消去法.这些事件都出现在矩阵概念存在之前.

顺便插一句,Gauss 消去法多年来是作为大地测量学(而不是数学)发展的一部分;称为主元消去法的 Gauss-Jordan 方法最先也是出现在大地测量学手册之中.

矩阵代数得以产生必须具备下述两个条件:

(1) 适当的记号,诸如 a_{ij} 和 A 等;

(2) 矩阵乘法的定义.

很巧合的是这两个紧要因素几乎形成于同一时间,大约1850年,而且出自同一国家,英国.除了 Newton 创建微积分外,17、18 至 19 世纪近代数学早期主要成就都是欧洲大陆的数学家们取得的,他们是 Bernoulli,Cauchy, Euler, Gauss 和 Laplace 等.但是到了 19 世纪中期,英国的数学家率先开展各种代数系统基础结构的研究.例如,A. DeMorgan 和 G. Boole 创立了集代数(Boole 代数).

确立矩阵概念和产生"矩阵"一词的动机是试图为研究行列式提供适当的代数语言.1848 年 J. J. Sylvester 引进术语"矩阵",拉丁文为"womb",作为数的阵列的名称.他用"womb"是因为他视矩阵为行

列式的生成体.亦即,矩阵的每 k 行和 k 列的子集(相应行和列确定的子矩阵)生成一个行列式.

在围绕行列式研究而寻求好的记号期间,Sylvester 在 1851 年提议把方形矩阵写成如下形式:

$$\begin{matrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & \cdots & a_1\alpha_n \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & \cdots & a_2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n\alpha_1 & a_n\alpha_2 & \cdots & a_n\alpha_n \end{matrix} \tag{1}$$

其每个表值(元素)表示成符号之积.他还引入了方阵的缩减记号

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

并称诸 a_i 和诸 α_j 为**哑元**(umbra)或**理想元素**.而后, Sylvester 使用这些哑元记号,将(2)的行列式——包括求诸 a_i 匹配诸 α_j 所有置换带符号之积的总和——写成

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

采用(1)后不久,两种符号 a_i 和 α_j 便被归并成带双下标的一种符号——a_{ij} (Cauchy 在 1812 年实际上已经使用 a_{ij},但其后没有立即被采纳).

矩阵代数起源于 1855 年 A. Cayley 关于**线性变换**的工作.设有线性变换

$$T_1: \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad 和 \quad T_2: \begin{cases} x'' = \alpha x' + \beta y' \\ y'' = \gamma x' + \delta y' \end{cases}.$$

Cayley 考虑先执行 T_1 后执行 T_2 而得的变换

$$T_2T_1: \begin{cases} x'' = (a\alpha + c\beta)x + (b\alpha + d\beta)y \\ y'' = (a\gamma + c\delta)x + (b\gamma + d\delta)y \end{cases}$$

在研究如此复合变换的表达方式的过程中,他导致定义矩阵的乘法,复合变换 T_2T_1 的系数矩阵是 T_2 的矩阵乘以 T_1 的矩阵之积.他继续研究这种复合的代数——矩阵代数——包括矩阵的逆矩阵.用单个符号 A 来表示变换的矩阵是这种新代数的本质记号.矩阵代数和行列式之间的一条链结很快得以建立,即为基本结果:

$$\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

Cayley 相信矩阵代数将会得以发展,以至夺去行列式理论的光彩.他写道:"在我看来,有许多事情说明这一矩阵理论将优先与行列式理论."

射向这一讨论的一束美妙侧光来自同一时期的另一位卓越的英国数学家 C. Babbage,他建造了第一台现代计算机,抽象出计算的构成方法以及其代数结构和记号,几乎涉及那个时期数学中同样普遍的智力进展的所有部分.

数学家们还试图发展向量代数,但是没有找到关于两个向量乘积的自然的定义.最早的向量代数,含有非交换的向量乘积,是由 H. Grassmann 于 1844 年提出的.其后,Grassmann 引进了由一个列向量乘以一个行向量形成的所谓简单矩阵.

矩阵和线性变换保持着紧密的联系,而且从进入20世纪后的观点看,正好是所形成的线性变换一般理论的有限维子情形.矩阵还被视为一种非常有用的记号,然而开头热衷一阵之后便很少就其进行研究.更得以关注的是向量,它是物理以及许多数学分支的基本数学元素.向量空间的现代定义是 Peano 在 1888 年引入的.不久,以函数乃至线性变换为元素的抽象向量空间随之建立.

回顾 20 世纪 40 年代的一个转折是可以令人得以教益的.其间,线性代数一度被认定作为研究课题已寿终正寝,从而应埋葬于教科书之中;然而曾几何时,响应高速计算机问世提供的机遇,利用标准矩阵运算的非常快的算法便相继涌现;矩阵数值分析得以强调,矩阵研究进入了出头之日.Von Neumann 和 Goldstein 在 1947 年提出分

析舍入误差中的条件数.A.Turing——与 Von Neumann 齐名的研制存储程序计算机的另一位天才——在 1948 年给出了矩阵的 LU 分解.QR 分解的实用是在十年之后实现的.

本书的目的和特点

今天,矩阵在各个学术领域和重要应用课题中已经起着不可替代的作用,计算机在数值计算方面的使用中,矩阵计算占据着大部分时间,因此矩阵的基本概念、理论和方法对于称职的和培育新的高素质科学技术人才来说是必备的非常重要而基础的知识.

迄今,已有许许多多矩阵著作.然而有专门术语或人名命名的矩阵原本已经很多,新的命名的矩阵又在增加着,它们的论述分布在众多著作之中,有时为了寻找某种矩阵的定义和性质并不容易.

本书取名"特殊矩阵",目的是提供一部好的尽可能全面介绍各类命名矩阵的论著,使它无论在学术上还是在应用上有其自身的价值和起着独特的作用.目前,尚未见到国内外有同样名称和目的的著作.

本书有如下特点:

(1) 取材丰富.涵盖基本的和常用的有命名的矩阵,并且包含到目前为止的绝大多数(包罗一切似不可能)其它有命名的矩阵,能反映有关的最新进展.

(2) 理论严谨.择优论述和推证方法.突出重点,对于重要的矩阵类型加以重点的全面的论述.

(3) 贯穿应用.一方面,对大多数矩阵类型提供一定的应用背景;另一方面,从应用课题中引出某些矩阵类型,并讨论其具体的应用.

(4) 结构合理.既有系统性,从基础知识出发,循序渐进,适合全面阅读;又具可分性,便于划分层次,选读部分内容.

(5) 灵活实用.索引详尽,采用中英文合一(英文只给出有命名的矩阵术语),查找方便,各取所需,也是一本必要的备用工具书.

(6) 深入浅出.分析清新,富启发性,语言精炼.阅读本书只需具备微积分和线性代数的基本知识.

本书兼理论专著、工具书、大学有关专业教材或参考书于一身.读者对象主要为数学尤其是应用数学和数值数学、科学、工程技术以及经济科学等工作者、大学教师、本科生和研究生.

本书的内容结构

所谓"特殊矩阵",如前面所说,亦即众多的各类命名矩阵,总归有其各自的独特刻画(定义).从大的方面来说,它们大体上可以划分成两部分:一部分是通过含有不易直观识别的性质来刻画的,书中称之为**特性矩阵**或**性质矩阵**,例如正规矩阵;另一部分则是通过容易直观识别的模式来刻画的,书中称之为**特型矩阵**,例如对称矩阵.划分成这样两部分,为有分有合地有机安排本书的章节带来了一定的方便.

全书共分 10 章.

第 1 章是基础知识,包括线性空间、对偶性、线性映射、矩阵、行列式、谱论、Euclid 空间、赋范线性空间和凸性的基本概念.这一章从现代数学的观点阐述了线性代数的基本理论,为阅读后面各章提供了一个很好的基础.然而就其本身而言,因是一个完整的整体,也可以作为独立内容来阅读.

第 2 章引入若干基本术语和记号、基本矩阵,以及不可约矩阵、对角优势矩阵、酉矩阵、正规矩阵、病态矩阵和 Vandermonde 矩阵等基本性质矩阵.

第 3 章包括从二次型引出自伴矩阵及惯性律、自伴矩阵的谱分解及其特征值的变分性质、正定矩阵和半正定矩阵、稳定矩阵、还

有斜自伴矩阵等.

第 4 章讨论正矩阵、非负矩阵、循环矩阵和素矩阵、随机矩阵、M-矩阵、以及 H-矩阵等.

第 5 章提供 Jordan 标准形和相似变换、友矩阵和 Frobenius 矩阵、Schur 标准形和奇异值分解、Householder 变换和 Hessenberg 矩阵、Givens 变换和 QR 分解、以及 Gauss 变换和 LU 分解.所谓"标准型"和"变换"均系某类特殊矩阵.

第 6 章汇集带状矩阵、轮换矩阵、Toeplitz 矩阵、Hankel 矩阵、其它条纹矩阵、以及中心对称矩阵、同伴矩阵和结式矩阵等一批特型矩阵.

第 7 章致力 Kronecker 积和 Hadamard 积等特殊积矩阵,以及各种广义逆矩阵.

第 8 章专注矩阵迭代 Jacobi、Gauss-Seidel、SOR、SSOR、AOR 和 SAOR、以及 A DI 诸方法的矩阵分裂和迭代矩阵.

第 9 章论述多项式、非多项式和 Hadamard 三类矩阵函数,以及一般的函数矩阵和作为特殊情形的 λ-矩阵与有理矩阵.

第 10 章作为最后一章,综合介绍了矩阵的有向图和性质 A 矩阵、相合矩阵、辛矩阵、整数矩阵、奇偶校验矩阵、对合矩阵、区间矩阵、自反矩阵等众多矩阵,以及关于素矩阵、复对称矩阵和自伴矩阵等矩阵的进一步的性质.

未结束语

写这本书是作者因多年科研和教学而深感其必须和可能的由来已久的心愿,但只是两年多前才有条件付诸实现,而书稿得以完成几乎延续了整整两年时间.

作者追求和渴望的是一部完美而好用的论著.然而,达到如此境地是一个"极限"过程.一方面,关于矩阵的文献资料不计其数,只能

参看其一小部分比较重要的而已,况且新文献新命名的矩阵还会不断出现,因此实际上只可能确保理论上和应用上重要而常用的矩阵在内的尽量多的特殊矩阵,而对于这些矩阵又只可能择其基本和主要的结论.另一方面,在内容结构和论述上,作者已经精心尽力,却深知依然有待精雕细刻.

因此,作者的实际期望是在读者面前奉献一件已然加工得比较光滑成型的好"坯子",而且能得到大量指正和指点的最好回报,以便在有机会再版时进一步作深加工.从这一意义上说,本书尚未完结.

必须指出,梁国珍教授自始至终参与本书编著工作,并且极其认真和精益求精地承担了全书的校阅任务,是本书编写及保证其质量的一位难得的无名作者,功不可没.

最后,作者趁此真诚而郑重地感谢清华大学出版社对本书出版的热忱支持和帮助.

作　者

2000 年夏秋之交

目　　录

1 基础知识

1.1 线性空间

1.1.1 定义 X 称为 K 上的**线性空间**,如果

(1) X 是非空集合,其元素称为**向量**,记作 x , y 等.

(2) K 是**数域**,即为某些复数之集,包括 0 和 1,而且对四则运算封闭——K 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍属于 K , K 中的数记作 α , β 等.

(3) 规定了一个从积集 $X \times X$ 到 X 的映射称为**向量加法**,记作 $x+y$,满足

1) 结合律: $x+(y+z)=(x+y)+z$.

2) 交换律: $x+y=y+x$.

3) X 中存在唯一**零元素**,记作 0:

$$x+0=x, \quad \forall x \in X .$$

4) 每一 $x \in X$,在 X 中存在唯一**负元素**,记作 $-x$:

$$x+(-x)=0 .$$

(4) 规定了一个从积集 $K \times X$ 到 X 的映射称为**数乘法**(数乘以向量),记作 αx ,满足

1) 单位律: $1x=x$.

2) 结合律: $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

3) 分配律: $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x .$$

例 设 K 是任一数域.

(1) 含 n 个分量且每个分量均属于 K 的列向量全体的集合

$$K^n \equiv \left\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}} : \alpha_1,\cdots,\alpha_n \in K\right\}, \qquad (1.1)$$

按逐个分量定义的加法和数乘,是K上线性空间,仍记作K^n.

特别,$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{C}^n$是本书中最常用的线性空间.$\mathbb{R}$是实数直线,$\mathbb{C}$是复数全体.

(2) 开区间(a,b)上具有连续n阶导数的实值函数(或复值函数)$f:(a,b)\to\mathbb{R}$(或$f:(a,b)\to\mathbb{C}$)全体的集合

$$C^n(a,b) \equiv \left\{f : f^{(n)}\text{ 在 }(a,b)\text{ 上连续}\right\}, \qquad (1.2)$$

按通常函数的加法和数乘,是$K=\mathbb{R}$(或$K=\mathbb{C}$)上线性空间,仍记作$C^n(a,b)$.(a,b)可取$\mathbf{R}\equiv(-\infty,+\infty)$.

特别

$C(a,b)\equiv C^0(a,b)$是(a,b)上连续函数的线性空间;

$C^\infty(a,b)$是(a,b)上无穷可微函数的线性空间.

类似地,对闭区间$[a,b]$,有记号$C^n[a,b]$.

(3) 系数属于K次数小于n的多项式全体的集合

$$P_{n-1} \equiv \left\{p : p(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i x^i, \alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}\in K, x\in K\right\}, (1.3)$$

按多项式的加法和数乘,是K上线性空间

1.1.2 定义 设X和Y是数域K上的两个线性空间,如果存在一一对应$f:X\to Y$,使得

$$f(x'+x'')=f(x')+f(x''), \quad \forall x',x''\in X,$$

$$f(\alpha x)=\alpha f(x), \qquad \forall x\in X,\alpha\in K,$$

则称X和Y**同构**,称f为X和Y的**同构映射**.

同构的线性空间借助线性空间中能够进行的运算,可以不加区别.容易举出许多这样的例子,按非常不同方式提供的两个线性空间