

非线性科学丛书

水槽中的孤波

倪皖荪 魏荣爵 编著
刘寄星 邵林灵 审阅

上海科技教育出版社

Advanced Series in Nonlinear Science

Solitary Wave in Water Trough

Ni Wansun Wei Rongjue

Institute of Acoustics and State

Key Laboratory of Modern Acoustics

Nanjing University, Nanjing China, 210093

Shanghai Scientific and Technological Education

Publishing House, SHANGHAI, 1997

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”的一种,介绍水槽中的孤波的理论与研究概况,也介绍了参量激发驻孤波、法拉第孤子间相互往复振荡运动和参量激发水波的非线性动力学行为的最新研究进展.本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考.

本书由刘寄星、郭柏灵审阅.

非 线 性 科 学 丛 书

水槽中的孤波

倪毓荪 魏荣爵 编著

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号 邮政编码200233)

各地 新华书店 经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 4.75 字数 119000

1997年12月第1版 1997年12月第1次印刷

印数 1—3200本

ISBN 7-5428-1641-1/O·163 定价:(精装本)11.80元

如有质量问题,请与厂质量科联系。T: 56628900×13

非线性科学丛书编辑委员会

主 编：郝柏林

副主编：郑伟谋 吴智仁

编 委：(按姓氏笔画为序)

丁 鄂江	文 志英	朱照宣
刘式达	刘寄星	孙义燧
杨清建	李邦河	张洪钧
张景中	陈式刚	周作领
赵凯华	胡 岗	顾 雁
倪皖荪	徐京华	郭柏灵
陶瑞宝	谢惠民	蒲富恪
霍裕平	魏荣爵	

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域。这种发展的一个重要特征,可以概括为“非”字当头,即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域。其中,非线性科学占有极其重要的位置。这决非人们“想入非非”,而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升。

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题。每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧。诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型。不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系。

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化。一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质。这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓“反散射”方法。反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质。到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系。

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理。于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域。虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的。

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例。这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识。原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测。然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构。

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象。从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律。如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程。标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用。

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题。物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用。“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和。非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法。

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步。于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人員,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法。在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现。

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著。它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人員和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人員更新知识提供自学教材。非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛。在写作风格上,作者們将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者。从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯。

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持。我們衷心欢迎批评和建议。

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前 言

孤波是 1834 年英国科学家罗素(J. Scott Russell)发现的. 但只在 1965 年扎布斯基(N. J. Zabusky)和克鲁斯卡(M. D. Kruskal)求 KdV 方程的数值解时发现孤波相互作用后能保持各自波形速度不变的粒子性并称之为孤子以后, 孤子(soliton)和孤波(solitary wave)的概念才广泛应用于物理学的各个领域. 目前, 从流体力学、等离子体、凝聚态物理、基本粒子理论乃至天体物理, 到处都发现有孤子存在的实验事实或物理机制. 尤其是因为光孤子不改变其波形、速度, 光纤孤子通信具有失真小、保密性好等优点, 对它的研究吸引了人们越来越多的注意, 并正在成为现代通信技术的热门课题和重要发展方向. 数学上, 目前已发现一大类非线性演化方程有孤子解, 发展了求解这类方程的许多有用的方法, 其中包括广为应用的反散射法. 同时, 数值方法也得到了广泛的应用, 孤子理论已成为数学中偏微分方程理论的一个重要组成部分.

本书介绍水槽中的孤波的理论 and 实验及其研究进展, 目的是要通过水波孤子这个最直观的物理事例及其产生的机制, 对孤子与孤波的一系列性质给以具体的说明. 本书既不是单纯数学理论的严格展开(本丛书中黄念宁^[9]和郭柏灵^[12]的书对此有专门的论述; 此外, 还有大量的专著和文献^{[1]~[8], [10], [11], [13]~[18]}可供参考), 也不是实验事实的简单罗列. 本书尽可能从物理概念上、从理论与实验相结合中展开讨论. 由于主要介绍水槽中的孤波, 本书所涉及的将主要是浅水波的 KdV 方程和非线性薛定谔方程(NLS 方程), 而对孤子理论中其他一些非线性演化方程, 包括正弦-戈登方程, 不能不有所割爱. 为了在有限的篇幅内能对主要问题进行展

开,并叙述清楚,我们将主要介绍截面为矩形的水槽中的孤波,其他如环形槽、圆槽、方槽和旋转流体中的孤波,只能稍加涉及,或是略去.有兴趣的读者可参阅有关文献.

遵从历史发展的顺序,本书第1章介绍浅水长波近似下的KdV孤子,第2章介绍深水槽中由非线性薛定谔方程描述的包络(Envelope)孤子.第3章叙述法拉第参量激励下有限长槽中驻孤波和PDNLS方程(Parametric Dissipative Nonlinear Schrödinger Equation),亦称米尔斯(J. W. Miles)方程.至于上述孤波与孤子沿槽长方向的往复周期运动现象,则在第4章中讨论.由于PDNLS方程不仅是非线性的,而且一般情况下也是不可积的耗散系统,有关孤波解的稳定性及理论和实验中所出现的复杂动力学行为,将在第5章中介绍.

水槽中孤子与孤波的研究,无论是在理论上还是在实验上,都处在发展阶段.本书只是截至目前为止的一个不很全面的介绍.希望能抛砖引玉,引起更多学者的兴趣,开展更深入的讨论.

顺便说一下,soliton和solitary wave过去都译为“孤立子”和“孤立波”,目前国内的数学工作者仍沿用“孤立子”和“孤立波”的名称,而国内的物理工作者则常简称“孤子”和“孤波”.本书采用后者.

本书后三章引用了王新龙、陈伟中、缪国庆等人的许多工作,缪国庆还对书稿提出过很好的意见.作者写作过程中还得到颜家壬、周显初、崔洪农、唐世敏诸先生的热情支持.他们提供了自己的有关论文和目录.覃团发帮助绘制了部分插图.刘寄星研究员和郭柏灵教授仔细审阅了全稿,他们两人都对书稿提出了许多宝贵意见.在此一并表示深切的感谢.

倪皖荪 魏荣爵

1997年10月于南京大学

Abstract

The main results of the theoretical and experimental studies on the solitary wave in the water trough are introduced. The latest progress of the research work on the parametrically excited standing solitary waves, the mutual oscillatory (back and forth) motion of two Faraday solitons and the nonlinear dynamic behaviors of the parametrically excited water waves are also introduced. Readership includes graduate students, postdoctoral fellows and professionals in physical and engineering sciences.

目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第 1 章 浅水槽中的孤波与孤子	1
§ 1 波、水表面波和色散	1
§ 1.1 波和色散	1
§ 1.2 流体力学方程	3
§ 1.3 线性小振幅水波	5
§ 2 孤波的发现	7
§ 3 孤子的相互作用	13
§ 4 守恒定律	17
§ 5 解 KdV 方程初值问题的反散射方法	19
§ 6 水槽中 KdV 孤子实验	26
§ 7 KdV 方程的应用及其推广	28
第 2 章 深水槽中的包络孤波	30
§ 8 深水中的斯托克斯波和边带不稳定性	30
§ 9 NLS 方程与斯托克斯波的失稳	33
§ 10 NLS 方程初值问题与实验结果	36
§ 11 NLS 方程与周期回归现象	41
§ 12 束缚态与多(阶)极(点)解	44
§ 13 暗孤波(包络洞孤波)	46
第 3 章 参量激发驻孤波	49

§ 14	参量共振	49
§ 15	参量激发驻孤波	54
§ 16	PDNLS 方程和驻孤波解	57
§ 17	椭圆驻波解与“反向孤子对”	61
§ 18	扭结表面波	66
§ 19	界面驻孤波	68
第 4 章	法拉第孤子间的周期性往复运动	70
§ 20	法拉第孤子的周期性往复运动	70
§ 21	描述法拉第孤子周期性往复运动的方程	73
§ 22	一对“同相孤子”的相互往复振荡	79
§ 23	边界条件及讨论	83
第 5 章	参量激发水表面波的动力学行为	85
§ 24	驻孤波的稳定区和分岔混沌现象	85
§ 25	PDNLS 方程驻孤波解稳定性分析	88
§ 26	PDNLS 方程的动力学行为	93
§ 27	存在问题与展望	95
附录 A	KdV 方程的推导和它的永形波解	98
附录 B	慢调制深水波中的 NLS 方程	104
附录 C	PDNLS 方程的推导	113
附录 D	参量激励下界面波方程	118
参考文献		120

Contents

Preface

Chapter 1 The solitary waves and solitons in shallow

§ 1	Waves, water waves and dispersion	1
§ 2	The discovery of solitary waves	7
§ 3	The interaction of solitons	13
§ 4	Conservation laws	17
§ 5	The inverse scattering method for solving the initial-value problems of KdV equation	19
§ 6	The experiments on the KdV solitons in water trough	26
§ 7	Applications of KdV equation and its generalization	28

Chapter 2 The envelope solitons in deep water

§ 8	The stokes wave on deep water and the side-band instability	30
§ 9	NLS equation and the intability of Stokes waves	33
§ 10	The initial-value problems of NLS	

	equation and the experimental results	36
§ 11	NLS equation and the phenomena of recurrence	41
§ 12	The bounded states and the multiple pole solutions	44
§ 13	Dark solitary wave (envelope-hole solitary wave)	46
Chapter 3 Parametrically excited standing solitary		
	waves	49
§ 14	Paramatrical resonance	49
§ 15	Parametrically excited standing solitary waves	54
§ 16	PDNLS equation and the standing solitary wave solution	57
§ 17	The cnoidal standing wave solution and the so calles "a pair of solitons of opposite polarity"	61
§ 18	The kink surface wave	66
§ 19	The standing solitary wave on interface	68
Chapter 4 The mutual oscillatory (back and forth)		
	motion of Faraday solitons	70
§ 20	The mutual oscillatory (back and forth) motion of Faraday solitons	70
§ 21	The equation of the Faraday solitons with mutual oscillatory (back and forth) motion	73
§ 22	The mutual oscillatory motion of two	

solitons with the same polarity	79
§ 23 Boundary condition and discussion	83
Chaper 5 The dynamic behaviors of parametrically	
excited water waves	85
§ 24 The stable parametrical regions of standing solitary wave and the phenomena of bifurcation and chaos	85
§ 25 Stability analysis of the standing solitary wave solution of PDNLS equation	88
§ 26 The dynamic behaviors of PDNLS equation	93
§ 27 Unsolved problems and prospects	95
Appendix A Derivation of KdV equation and its	
solutions of permanent form waves	98
Appendix B NLS equation of slow-modulating	
deep water waves	104
Appendix C Derivation of PDNLS equation	113
Appendix D Equations of parametrically excited	
interface waves	118
References	120

第 1 章

浅水槽中的孤波与孤子

历史上,孤波的发现和孤子概念的建立,是从一维浅水槽中小振幅波的研究开始的.由于人们对自然现象的细心观察而发现了孤波,随后又进行了认真的实验研究和理论工作,导出了描述这一物理现象的 KdV 方程.通过对 KdV 方程的数值研究,发现孤波相互作用后仍能保持各自的波形和速度,终于建立了“孤子”概念.解析方法尤其是反散射方法的发展,不仅使人们对孤子的认识和理解更加深入,而且发现一系列非线性演化方程都存在孤子解.今天,几乎物理学的各个领域都发现了孤子,或存在孤子的物理机制,大量实验事实肯定了孤子理论的结论.孤子概念变得越来越重要和普遍了.本章将遵循人们对孤子的这一认识过程,即由观察、实验到理论提高和推广、再进行实验验证的过程来进行介绍.

为了初学者的方便,在 § 1 介绍了有关波动、流体力学方程和边界条件及水波的一些内容,熟悉这些内容的读者可以直接从 § 2 开始阅读.

§ 1 波、水表面波和色散

§ 1.1 波和色散

波动是自然界中最常见的现象之一.电磁波、声波、水波、地震波、麦浪的起伏……都是波动的现象.典型的一维波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.1)$$

这里 $u(x, t)$ 是波幅, 它可以是电场强度、声压、水面或地面的高度等振动变化的物理量; c 是波速 (或波的相速度). 方程 (1.1) 的通解为

$$u(x, t) \equiv f_1(x - ct) + g_1(x + ct),$$

$f(x - ct)$ 描述向右传播的波, $g(x + ct)$ 描述向左传播的波, 波速都是 c . 对于方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad (1.2)$$

只有向右传播的行波解 $f(x - ct)$. 而方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad (1.3)$$

则只有向左传播的行波解 $g(x + ct)$. 这里所说的行波解, 是指偏微分方程的解具有 $\varphi = \varphi(\xi)$ 的形式, 其中 $\xi = x \pm ct$, c 是一个正的常数. 例如上面提到的 $f(x - ct)$ 、 $g(x + ct)$ 等都是行波解. 典型的单色平面波解是

$$u(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t),$$

这里波矢 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, 圆频率 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$. λ 、 f 和 T 分别是波的波长、频率和周期 (高维时, k 由矢量 $\mathbf{k}$ 代替, $\mathbf{k}$ 的方向即波前传播方向). 波速或波的相速度

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.4)$$

更复杂的波形变化可由许多具有不同振幅、波矢和频率的平面波叠加而成. 波包则是由一些波矢和频率相近的波所组成. 波包运动的群速度

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.5)$$

它也是波的能量传输速度.

构成波包的每一个单色平面波的波前以各自的相速度向前传播, 可见只有当 c 与 k 无关时波包才能保持其形状不变. 当