Yingyong
Xianxing
Daishu

范蓓芬

应用线性代数

气象出版社

应用线性代数

范 蓓 芬 编著

气象出版社

内 容 简 介

本书除较系统地阐述了矩阵基础理论以外，还着重介绍了线性代数方程组、特征值问题和线性微分方程组求解的基本方法，并且从应用的角度出发，引进其在气象上的一些计算方法，如张量运算、多元回归分析、逐步回归分析、经验正交函数展开以及随机-动力模式等。本书可供广大气象工作者和其他理工科学生阅读。书中的基本概念清晰，内容充实，所附的各类例题将有助于读者更好地理解本书的内容。对具有高中水平的自学者也是一本很好的入门参考书。

应用线性代数

范蓓芬 编著

责任编辑：杨长新、殷 钰

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 全国各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32 印张：9.125 字数：200千字

1985年1月第一版 1985年1月第一次印刷

印数：1—15,000

统一书号：13194·0191 定价：2.15元

前　言

线性代数作为一种基本的数学工具，在气象统计、流体力学、数值预报、大气动力学以及统计动力学等领域中的应用日益广泛，特别近二十年来，随着计算机技术和各种自动化遥感探测技术的迅速发展，矩阵理论和计算线性代数已渗入到气象科学的理论分析和资料处理的各个领域中。本书除了较系统地阐释矩阵基础理论和有关知识以外，着重介绍线性代数方程组、特征值问题和线性微分方程组求解的基本方法，并且从应用的角度出发，引进其在气象上的一些应用问题，如张量运算、多元回归分析、逐步回归分析、经验正交函数展开以及随机-动力模式等。我们觉得，围绕线性方程组的求解，引进矩阵基础理论和有关方法，结合气象应用展开讨论，对定理作必要证明，而避免一些冗繁的数学论证，这样目的性比较明确，对于气象专业学生以及台站气象业务和科技人员联系气象学习线性代数可能有所裨益。

第一、二、三章叙述矩阵基础理论和基本运算方法，第四章讨论线性代数方程组的求解。这四章是矩阵代数的基础知识。计算线性代数是数值分析中的一个重要课题领域，而其核心问题是特征值问题，所以第五章着重讨论特征值和特征矢量。限于篇幅，这一章除了阐释特征值问题的基础理论和相似变换等基本方法以外，主要介绍目前气象上较为实用的求特征值方法——迭代法、雅可比法和拟雅可比法。特征值问题的应用是多方面的，我们在第六章着重介绍其在线性微分方程组中的应用，这是气象统计-动力模式和数值预报研究

中应用较多的一个课题领域。

本书主要是在南京大学气象系天气-气候专业“线性代数”和动力气候进修班“应用线性代数”讲义基础上修改，扩充编写而成的。在编写过程中，得到黄士松、陆渝蓉、朱炳海、王彦昌、曹琳、邹进上等老师以及上海台风研究所吴中海副研究员的热情鼓励和支持；动力气候进修班的学员同志们提出了许多有益的意见和建议；南京大学数学系佟文廷和气象系金汉良两位副教授审阅了全书，并提出了十分宝贵的意见，在此向他们表示衷心的感谢。由于编者水平有限，在本书的取材和内容编排上，以及一些基本观点的阐释上，不可避免地会有错误和不妥之处，请同志们批评指正。

目　录

第一章 矢 量

气象上许多问题常常归结为解一个线性代数方程组或线性微分方程组的问题。这类方程组的求解，通常是运用矩阵和矢量的理论及方法进行的。从某种意义上讲，矩阵是矢量的推广，因此本章首先从矢量的有关知识开始讨论。

§1 矢量及其运算

1.1 矢量的概念

矢量在物理学及解析几何中的本意是既有大小又有方向的量，又称为向量，例如作用在物体上的力、速度和加速度等等，都可用矢量表示。一般讲，二维矢量和三维矢量是有明确的几何意义或物理意义的。平面上的矢量(二维矢量)是用坐标平面上一根有向线段来表示的，有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向就表示矢量的方向。

设平面上一矢量 $\boldsymbol{X}$，它沿坐标轴方向的分量为 x_1 和 x_2，于是矢量 $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

相仿，三维空间矢量 $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

其中 x_1, x_2, x_3 是 $\boldsymbol{X}$ 沿空间坐标轴方向的分量。矢量也可以写成行的形式

$$\boldsymbol{X}'=(x_1x_2x_3)$$

称 $\boldsymbol{X}'$ 为矢量 $\boldsymbol{X}$ 的转置矢量，不过一般以写成列的形式（1.1）和(1.2)更为方便。(1.1)和(1.2)式中有序数 x_1, x_2 以及 x_1，x_2，x_3 分别确定一个二维矢量和三维矢量，称之为矢量的分量。

矢量的概念可以推广到 n 维空间中去。

定义 1.1 一个 n 维矢量(又称为 n 元向量) $\boldsymbol{X}$ 是一组有序数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ [\text{或 } \boldsymbol{X}=(x_1x_2\cdots x_n)'] \tag{1.3}$$

有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为 $\boldsymbol{X}$ 的分量，而

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

称为矢量值函数，它的导数

$$\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

也是矢量值函数。

用 R^n 表示全体 n 维矢量的集合，在下面即将介绍的运

算下称为 n 维矢量空间(简称为空间 R^n)。注意 n 维矢量的分量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$可以是任意数(实数或复数),当 x_i 均为实数时,称 $\boldsymbol{X}$ 为实矢量,相应的 n 维空间就称为实空间。

R^n 中的零矢量是

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

R^n 中矢量 $-\boldsymbol{X}$ 是

$$-\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\\\vdots\\-x_n\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

1.2 矢量的运算

两个 n 维矢量当且仅当其对应的分量相等时称为相等。这样,矢量相等

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$$

等价于一组纯量的等式

$$x_i=y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

因此,要证明两个矢量相等,只要证明它们的分量相等。而要规定一个新的矢量,只要说明其分量如何构成即可。

矢量数乘

设 α 是一个数, $\boldsymbol{X}$ 是分量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 维矢量,定义 $\alpha\boldsymbol{X}$ 为一个矢量,其分量是 $\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n$,即有

$$\alpha\boldsymbol{X}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

例 设

$$\alpha=2, \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$$

则

$$2\boldsymbol{X}=2\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\14\end{pmatrix}$$

把矢量 $\boldsymbol{X}$ 乘以 α 的这种过程称为数乘，或纯量乘法。从几何上看，纯量 α 乘矢量 $\boldsymbol{X}$ 的运算是用因子 $|\alpha|$ 改变 $\boldsymbol{X}$ 的长度，而当 α 是负数时，则 $\boldsymbol{X}$ 还需经过原点反射。

矢量加减法

设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是分别具有分量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的矢量。将 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$ 定义为一个 n 维矢量 $\boldsymbol{Z}$，它的分量是 $x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n$，即

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

例 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\6\\3\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\7\\9\end{pmatrix}$$

则

$$X+Y=\begin{pmatrix}1\\6\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-6\\7\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\\11\end{pmatrix}$$

两个矢量相加的这种过程称为矢量加法，就是两个矢量的各对应分量相加。类似地，可定义两个矢量的差

$$X-Y=X+(-Y)$$

矢量的和(差)具有通常纯量和(差)的性质。设在矢量空间 R^n 中有 X,Y,Z 三个矢量，则有

交换律　$X+Y=Y+X$

结合律　$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$

结合数乘的规则，且有

$$(\alpha_1\alpha_2)X=\alpha_1(\alpha_2X)$$

$$(\alpha_1+\alpha_2)X=\alpha_1X+\alpha_2X$$

$$\alpha_1(X+Y)=\alpha_1X+\alpha_1Y$$

$$1\cdot X=X$$

其中 α_1 和 α_2 是两个纯量。

根据上述运算规则，我们可以将线性方程组写成简洁的矢量方程形式。例如，线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

将此方程组的系数和常数项分别看作 m 维空间中的矢量

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}^{(2)}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}^{(n)}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

利用矢量的加法和数乘规则，可把上述方程组写成矢量方程：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}^{(1)}+x_2\boldsymbol{\alpha}^{(2)}+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}^{(n)}=\boldsymbol{b}$$

为了处理这类方程，我们还需要介绍矢量的有关理论。

§2　矢量组的相关性

2.1　线性相关和线性无关

设一矢量组

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

易知，有 $2\boldsymbol{\alpha}^{(1)}=\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$。由解析几何知，此时 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$与 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$共线

$$2\boldsymbol{\alpha}^{(1)}+(-1)\boldsymbol{\alpha}^{(2)}=\boldsymbol{0}$$

该式表明，对于矢量 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$和 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$存在两个不全为零的数

$$\alpha_1=2,\ \ \alpha_2=-1$$

使上述关于 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$和 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$线性等式成立，此时称 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$和 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ 线性相关。

显然，矢量组

$$b^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad b^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$$

不共线，因为对于任何不全为零的两个常数 α_1 与 α_2 不能有如上的线性等式成立，即

$$\alpha_1 b^{(1)}+\alpha_2 b^{(2)}\neq \mathbf{0}$$

此时，称 $b^{(1)}$和 $b^{(2)}$线性无关。

上述两种截然不同的情况，反映了矢量组内部的不同规律性，为此引入

定义 1.2 设 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$为 n 个 m 维矢量，若存在不全为零的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得

$$\alpha_1 a^{(1)}+\alpha_2 a^{(2)}+\cdots+\alpha_n a^{(n)}=\mathbf{0} \tag{1.10}$$

则称矢量组 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$ 线性相关；若对任何不全为零的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 总有

$$\alpha_1 a^{(1)}+\alpha_2 a^{(2)}+\cdots+\alpha_n a^{(n)}\neq \mathbf{0}$$

则称矢量组 $a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}$线性无关。

例 要确定矢量组

$$a^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad a^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad a^{(3)}=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$$

是线性相关还是线性无关，我们写出方程

$$\alpha_1 a^{(1)}+\alpha_2 a^{(2)}+\alpha_3 a^{(3)}=\mathbf{0}$$

或

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

这个方程的左端是矢量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3 \\ -\alpha_1+2\alpha_2 \\ \alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3 \end{pmatrix}$$

因此，为使 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\boldsymbol{a}^{(3)}$线性相关，常数 α_1,α_2 和 α_3 必须满足方程

$$\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0 \qquad \text{(i)}$$

$$-\alpha_1+2\alpha_2=0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3=0 \qquad \text{(iii)}$$

由方程(ii)知 $\alpha_1=2\alpha_2$，代入(i)和(iii)，得到

$$3\alpha_2+3\alpha_3=0$$

$$5\alpha_2+5\alpha_3=0$$

因为这两个方程等价于同一个方程 $\alpha_2+\alpha_3=0$，所以它们具有无穷多个解 α_2 和 α_3，其中一个解是 $\alpha_2=-1$，$\alpha_3=1$，相应的 $\alpha_1=-2$。因此

$$-2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

即矢量组 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{a}^{(3)}$线性相关。

再如，设 $\mathbf{e}^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$表示一 n 维矢量组

$$\mathbf{e}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\mathbf{e}^{(n)}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

为了确定 $\mathbf{e}^{(1)},\mathbf{e}^{(2)},\cdots,\mathbf{e}^{(n)}$是线性相关还是线性无关，我们写出方程

$$\alpha_1\mathbf{e}^{(1)}+\alpha_2\mathbf{e}^{(2)}+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}^{(n)}=\mathbf{0}$$

或

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

这个方程的左端是矢量

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

因此，$\alpha_1=0,\alpha_2=0,\cdots,\alpha_n=0$。所以 $\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{e}^{(n)}$是 n 维矢量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的线性无关的矢量组。称 $\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{e}^{(n)}$为 n 维矢量空间 R^n 中的单位矢量组。

2.2 线性相关与线性组合

定义 1.3 设 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 为 $n+1$ 个 m维矢量，如果有常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得

$$\boldsymbol{b}=\alpha_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\alpha_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{a}^{(n)}$$

则称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$的线性组合，或称 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$线性表示。

例 设

$$\boldsymbol{a}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix}$$

易见

$$\boldsymbol{a}^{(3)}=3\,\boldsymbol{a}^{(1)}+(-1)\boldsymbol{a}^{(2)}$$

所以 $\boldsymbol{a}^{(3)}$是 $\boldsymbol{a}^{(1)}$与 $\boldsymbol{a}^{(2)}$的线性组合。

定理 1.1 设 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$线性无关，而 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)},\boldsymbol{b}$ 为线性相关，则矢量 $\boldsymbol{b}$ 能唯一地表示成 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$的线性组合：

$$\boldsymbol{b}=\beta_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\beta_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+\beta_n\boldsymbol{a}^{(n)} \tag{1.11}$$

证 因为 $\boldsymbol{a}^{(1)}$, $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}$ 是线性相关的，所以存在不全为零的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 使得

$$\alpha_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\alpha_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{a}^{(n)}+\alpha\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

现在必有 $\alpha\neq 0$，否则矢量组 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$ 线性相关，这与假设相矛盾。于是，上式能以 α 除，而

$$\boldsymbol{b}=-\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{a}^{(1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha}\boldsymbol{a}^{(2)}-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{a}^{(n)}$$

或

$$\boldsymbol{b}=\beta_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\beta_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+\beta_n\boldsymbol{a}^{(n)}$$

其中

$$\beta_i=-\frac{\alpha_i}{\alpha}(i=1,2,\cdots,n)$$

现在再证明(1.11)式是唯一的。设 $\boldsymbol{b}$ 可表为

$$\boldsymbol{b}=\beta_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\beta_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+\beta_n\boldsymbol{a}^{(n)}$$

和

$$\boldsymbol{b}=\beta'_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\beta'_2\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+\beta'_n\boldsymbol{a}^{(n)}$$

两种形式，两式相减得

$$(\beta_1-\beta'_1)\boldsymbol{a}^{(1)}+(\beta_2-\beta'_2)\boldsymbol{a}^{(2)}+\cdots+(\beta_n-\beta'_n)\boldsymbol{a}^{(n)}=\boldsymbol{0}$$

因为 $\boldsymbol{a}^{(1)},\boldsymbol{a}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$线性无关，所以

$$(\beta_1-\beta'_1)=(\beta_2-\beta'_2)=\cdots=(\beta_n-\beta'_n)=0$$

即

$$\beta_i=\beta'_i(i=1,2,\cdots,n)$$

即 b 的线性表达式是唯一的。