

现代数学手册

• 经典数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

• 华中科技大学出版社 •

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

• 经典数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

• 华中科技大学出版社 •
(华中理工大学出版社)
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·经典数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2000年12月
ISBN 7-5609-2172-8

I. 现…

II. 现…

III. ①数学-手册 ②古典数学-手册

IV. O 1-62

现代数学手册·经典数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:周芬娜 李立鹏 余健棠
责任校对:蔡晓瑚

封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32
版次:2000年12月第1版
ISBN 7-5609-2172-8/O·205

印张:33.5 插页:6
印次:2000年12月第1次印刷

字数:1 280 000
印数:1—8 000
定价:90.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

《现代数学手册》编纂委员会

顾问	钱伟长	吴文俊	杨叔子	
主编	徐利治			
副主编	张尧庭	林化夷	卢开澄	
分卷主编	经典数学卷	廖晓昕		
	近代数学卷	胡适耕		
	计算机数学卷	卢开澄		
	随机数学卷	陈希孺	郑忠国	
	经济数学卷	王国俊	施光燕	
	(以下按姓氏笔画为序)			
编委	王兴华	王能超	毛经中	叶其孝
	史树中	李国伟	苏维宜	余家荣
	余健棠	陈文忠	周蕴时	胡毓达
执行编委	余健棠	林化夷	郭永康	姜新祺
责任编辑	龙纯曼	叶见欣	李立鹏	佟文珍
	余健棠	周芬娜	姜新祺	

前 言

在人类开始跨入 21 世纪的历史时期,人们已普遍地看到了一种历史现象,即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性,已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期,伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展,此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国,“科学技术是第一生产力”(邓小平名言)已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是,如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具,当然也就不会有现代科技。因此“国家富强必须要依靠数学发达”这句经典名言(拿破仑(Napoleon)名言),自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识,在华中理工大学出版社的倡议与委托下,我们通过集体协作,努力编纂了这部《现代数学手册》巨著,其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的殷切希望,而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来,这部工具性巨著服务的读者(或使用者)对象,包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么,作为数学工具书,这部巨型手册要求具备哪些特点呢?在编写过程中,出版社负责人和我们达成了一项共识,即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200 余位撰稿人与审稿人(来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等 40 多所高校与研究所)按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力,使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便,本手册分5卷出版,分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”。需要指出的是,各个分支(篇目)的归属是相对的,这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如,“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生,以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后,还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作,深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编 徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

- 第 1 篇 微积分
- 第 2 篇 无穷级数与广义积分
- 第 3 篇 高等代数
- 第 4 篇 矩阵论
- 第 5 篇 微分几何
- 第 6 篇 复变函数论
- 第 7 篇 实变函数
- 第 8 篇 特殊函数
- 第 9 篇 积分变换与级数交换
- 第 10 篇 常微分方程

- 第 11 篇 差分方程
- 第 12 篇 积分方程
- 第 13 篇 偏微分方程
- 第 14 篇 变分学
- 第 15 篇 计算数论
- 第 16 篇 群论
- 附录 1 初等代数
- 附录 2 平面三角
- 附录 3 欧氏几何
- 附录 4 解析几何

近代数学卷

- 第 1 篇 数理逻辑
- 第 2 篇 组合数学
- 第 3 篇 图论
- 第 4 篇 拓扑学
- 第 5 篇 流形上的微积分
- 第 6 篇 李群与李代数
- 第 7 篇 泛函分析
- 第 8 篇 傅里叶分析
- 第 9 篇 广义函数
- 第 10 篇 常微分方程的稳定性理论
- 第 11 篇 常微分方程的几何理论

- 第 12 篇 泛函微分方程
- 第 13 篇 偏微分方程的近代理论
- 第 14 篇 分支理论
- 第 15 篇 变分不等式
- 第 16 篇 动力系统
- 第 17 篇 渐近分析方法
- 第 18 篇 函数逼近方法
- 第 19 篇 样条函数
- 第 20 篇 分形几何
- 第 21 篇 生物数学

计算机数学卷

- 第 1 篇 数值分析
- 第 2 篇 数值代数
- 第 3 篇 有限元法与边界元法
- 第 4 篇 计算流体力学中的差分法

- 第 5 篇 多重网格法
- 第 6 篇 区域分解方法
- 第 7 篇 小波分析
- 第 8 篇 Petri 网

第 9 篇	网络最优化	第 17 篇	符号计算
第 10 篇	电路网络	第 18 篇	自动定理证明
第 11 篇	随机算法	第 19 篇	并行与分布计算中的模型与算法
第 12 篇	算法设计与复杂性分析	第 20 篇	计算几何
第 13 篇	组合最优化的近似算法	第 21 篇	S 计算几何
第 14 篇	遗传算法	第 22 篇	代数编码
第 15 篇	模拟退火算法	第 23 篇	近代密码学
第 16 篇	数学机械化与机械化数学	第 24 篇	多值逻辑

随机数学卷

第 1 篇	概率论	第 11 篇	现代统计计算方法
第 2 篇	数理统计	第 12 篇	随机过程
第 3 篇	试验设计	第 13 篇	时间序列分析
第 4 篇	抽样调查	第 14 篇	随机分析
第 5 篇	质量管理	第 15 篇	排队论
第 6 篇	线性模型	第 16 篇	库存论
第 7 篇	多元统计分析	第 17 篇	马尔可夫决策过程
第 8 篇	贝叶斯统计	第 18 篇	可靠性与生存分析
第 9 篇	稳健统计	第 19 篇	决策分析
第 10 篇	蒙特卡罗法		

经济数学卷

第 1 篇	计量经济	第 11 篇	投入产出分析
第 2 篇	数理经济	第 12 篇	线性控制系统理论
第 3 篇	金融数学	第 13 篇	最优控制理论
第 4 篇	经济控制论	第 14 篇	卡尔曼滤波
第 5 篇	精算数学	第 15 篇	系统辨识
第 6 篇	单目标与多目标线性规划	第 16 篇	大系统理论
第 7 篇	非线性规划	第 17 篇	对策论
第 8 篇	不可微优化	第 18 篇	信息论
第 9 篇	整数规则	第 19 篇	人工神经网络
第 10 篇	动态规划	第 20 篇	模糊数学

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

- | | | | |
|---------|--|------------|------------------------------------|
| Part 1 | Calculus | Part 11 | Difference Equation |
| Part 2 | Infinite Series and Generalized Integral | Part 12 | Integral Equation |
| Part 3 | Advanced Algebra | Part 13 | Partial Differential Equation(PDE) |
| Part 4 | Theory of Matrices | Part 14 | Calculus of Variations |
| Part 5 | Differential Geometry | Part 15 | Computing Number Theory |
| Part 6 | Function of Complex Variable | Part 16 | Group Theory |
| Part 7 | Function of Real Variable | Appendix 1 | Elementary Algebra |
| Part 8 | Special Function | Appendix 2 | Plane Trigonometry |
| Part 9 | Integral Transform and Series Transform | Appendix 3 | Euclidean Geometry |
| Part 10 | Ordinary Differential Equation(ODE) | Appendix 4 | Analytic Geometry |

MODERN MATHEMATICS

- | | | | |
|---------|---------------------------|---------|-----------------------------------|
| Part 1 | Mathematical Logic | Part 12 | Functional Differential Equation |
| Part 2 | Combinatorial Mathematics | Part 13 | Modern Theory of PDE |
| Part 3 | Graph Theory | Part 14 | Branch Theory |
| Part 4 | Topology | Part 15 | Variational Inequality |
| Part 5 | Calculus on Manifold | Part 16 | Dynamical System |
| Part 6 | Lie Group and Lie Algebra | Part 17 | Asymptotically Analytic Method |
| Part 7 | Functional Analysis | Part 18 | Approximation Method of Functions |
| Part 8 | Fourier Analysis | Part 19 | Spline Function |
| Part 9 | Generalized Function | Part 20 | Fractal Geometry |
| Part 10 | Stability Theory of ODE | Part 21 | Biomathematics |
| Part 11 | Geometric Theory of ODE | | |

COMPUTER MATHEMATICS

- | | | | |
|--------|---|--------|-----------------------------|
| Part 1 | Numerical Analysis | | Fluid Mechanics |
| Part 2 | Numerical Algebra | Part 5 | Multigrid Method |
| Part 3 | Finite Element Method and Boundary
Elementary Method | Part 6 | Domain Decomposition Method |
| Part 4 | Difference Method in Computational | Part 7 | Wavelet Analysis |
| | | Part 8 | Petri Nets |

Part 9	Network Optimization		Mechanized Mathematics
Part 10	Electrical Circuit Networks	Part 17	Symbolic Computation
Part 11	Randomized Algorithms	Part 18	Automated Theorem Proving
Part 12	Design of Algorithms and Complexity Analysis	Part 19	Models and Algorithms in Parallel and Distributed Computing
Part 13	Approximate Algorithms of Combinatorial Optimizations	Part 20	Computational Geometry
Part 14	Genetic Algorithms	Part 21	<i>S</i> Computational Geometry
Part 15	Simulated Annealing Algorithms	Part 22	Algebraic Coding Theory
Part 16	Mathematical Mechanizations and	Part 23	Modern Cryptography
		Part 24	Many-valued Logic

STOCHASTIC MATHEMATICS

Part 1	Probability	Part 11	Modern Statistical Computing Method
Part 2	Mathematical Statistics	Part 12	Stochastic Process
Part 3	Experimental Design	Part 13	Time Series Analysis
Part 4	Sampling Survey	Part 14	Stochastic Analysis
Part 5	Statistical Quality Control	Part 15	Queueing Theory
Part 6	Linear Model	Part 16	Theory of Inventory System
Part 7	Multivariate Statistical Analysis	Part 17	Markov Decision Process
Part 8	Bayes Statistics	Part 18	Reliability and Survival Analysis
Part 9	Robust Statistics	Part 19	Decision Analysis
Part 10	Monte Carlo Method		

ECONOMIC MATHEMATICS

Part 1	Econometrics	Part 10	Dynamic Programming
Part 2	Mathematical Economics	Part 11	Input-output Analysis
Part 3	Financial Mathematics	Part 12	Linear Control Systems Theory
Part 4	Economic Control Theory	Part 13	Optimal Control Theory
Part 5	Actuarial Mathematics	Part 14	Kalman Filtering
Part 6	Simple Objective Programming and Multiple Objective Programming	Part 15	System Identification
Part 7	Non-linear Programming	Part 16	Large-scale Systems Theory
Part 8	Non-differentiable Optimization	Part 17	Game Theory
Part 9	Integer Programming	Part 18	Information Theory
		Part 19	Artificial Neural Networks
		Part 20	Fuzzy Mathematics

·经典数学卷·

目 录

第 1 篇	微积分·····	(1)
第 2 篇	无穷级数与广义积分·····	(59)
第 3 篇	高等代数·····	(117)
第 4 篇	矩阵论·····	(167)
第 5 篇	微分几何·····	(209)
第 6 篇	复变函数论·····	(263)
第 7 篇	实变函数·····	(315)
第 8 篇	特殊函数·····	(357)
第 9 篇	积分变换与级数变换·····	(425)
第 10 篇	常微分方程·····	(531)
第 11 篇	差分方程·····	(595)
第 12 篇	积分方程·····	(649)
第 13 篇	偏微分方程·····	(711)
第 14 篇	变分学·····	(779)
第 15 篇	计算数论·····	(821)
第 16 篇	群论·····	(869)
附录 1	初等代数·····	(905)
附录 2	平面三角·····	(941)
附录 3	欧氏几何·····	(975)
附录 4	解析几何·····	(1005)
索引	·····	(1041)

·经典数学卷·

第 1 篇

微积分

编 者 陆传务 胡适耕
审校者 肖伊莘

目 录

引言	(3)	4.3 重积分	(34)
1 极限与连续性	(3)	5 曲线积分与曲面积分	(38)
1.1 函数	(3)	5.1 第一型曲线积分	(38)
1.2 极限	(6)	5.2 第二型曲线积分	(40)
1.3 连续性	(10)	5.3 第一型曲面积分	(42)
2 微分学	(11)	5.4 第二型曲面积分	(44)
2.1 导数与微分	(11)	5.5 场论·积分学的基本公式	(46)
2.2 中值定理	(15)	6 积分学的应用	(50)
2.3 泰勒公式	(18)	6.1 质量与求积问题	(50)
3 微分学的应用	(21)	6.2 功与流量	(53)
3.1 函数的动态	(21)	参考文献	(53)
3.2 极值	(22)	常用极限	(54)
3.3 几何应用	(25)	导数表	(54)
4 定积分与重积分	(27)	积分表	(55)
4.1 不定积分	(27)		
4.2 定积分	(31)		

引 言

近代数学的伟大变革是从引进变量开始的,而微积分学的创建正是变量数学的第一个重大成就.微积分学的出现不仅整个地更新了数学的面貌,而且显著地促进了近代科学技术的发展.没有微积分这一强大的新数学工具,力学、物理学、天文学等领域的近代理论的形成是不可能的.微积分学的伟大开创者牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)等人的名字,不仅与数学联系在一起,而且与整个近代科学联系在一起.

微积分学为研究变量提供了一个方法系统,其基本内容是微分与积分这两种互相关联的运算.微分与积分分别源于有重大现实意义的速率问题与求积(面积、体积等)问题,且都建立在极限概念的基础上.微分学研究变量的局部性质,而积分学则处理变量在一定范围内的“求和”,因而是一整体问题.自然,局部与整体的对立与联系,充分体现于微分与积分的相互关系中.

微积分学已成为经典数学的重要部分,在它的基础上成长出一系列重要学科,如微分方程、复变函数、实变函数、变分法等.微积分学的理论与方法,已广泛应用于自然科学、工程技术乃至社会科学的多个部门.对微积分学的一定程度的掌握,不仅是对科技工作者的数学训练中的必备要素,而且也愈来愈成为对工程师、经济学家及许多社会工作者的基本要求.

1 极限与连续性

1.1 函 数

1.1.1 n 维空间

(1) 空间 \mathbf{R}^n n 个实数的有序组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 之全体称为 n 维欧几里得(Euclid)空间,记作 \mathbf{R}^n . \mathbf{R}^n 中的元素 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为点,记作 x 或大写字母 P, A 等. \mathbf{R}^1 就是实直线,也写作 \mathbf{R} 或 $(-\infty, +\infty)$; \mathbf{R}^2 就是实平面; \mathbf{R}^3 可解释为通常的空间.

(2) 线性运算 任给 $x, y \in \mathbf{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, 定义

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n).$$

$$\text{令 } L = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\},$$

称 L 为从点 x 到点 y 的线段,记作 $[x, y]$.

(3) 距离 任给 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 称

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

为点 x 的模. 任给 $A, B \in \mathbf{R}^n$, 称 $|A - B|$ 为点 A 与 B 之间的距离, 记作 $|AB|$.

(4) 球 任给 $P \in \mathbf{R}^n, r > 0$, 令

$$N(P, r) = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid |PQ| < r\}.$$

称 $N(P, r)$ 为以 P 为心、以 r 为半径的 n 维球, 或称它为点 P 的 r 邻域.

1.1.2 区域

设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是一非空集合.

(1) 内部 若 $P \in D$, 且存在 $r > 0$, 使 $N(P, r) \subset D$, 则称 P 为 D 的内点; D 的全体内点构成 D 的内部.

(2) 边界 若 $P \in \mathbf{R}^n$, 对任给 $r > 0$, $N(P, r)$ 中同时含有 D 中的点与不在 D 中的点, 则称 P 为 D 的边界点; D 的全体边界点构成 D 的边界, 记作 ∂D .

(3) 区域 若 D 只含内点, 且其中任两点可用 D 内的折线(相继连接的有限条线段之并)连接, 则称 D 为开区域; 开区域连同其边界一起构成闭区域. 习惯上, 开区域连同其部分边界也构成区域. 一维区域就是区间.

(4) 有界性 若 D 包含在某个球内, 则说 D 有界; 否则说 D 无界.

若说到区域 D 而未加限定, 则 D 可以是开区域或闭区域, 亦可非开非闭; 可以有界亦可无界. 区域通常用不等式表示.

例 1 给定 \mathbf{R}^2 中的 3 个集合:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\};$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, y > 0\}.$$

则 D 是有界闭区域; E 是无界开区域; F 是非开非闭的无界区域.

1.1.3 函数

(1) 一般定义 设 X, Y 是两个非空集. 若对每个 $x \in X$, 按某个法则 f 有唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为定义于 X 上而取值于 Y 中的函数, 或称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作 $f: X \rightarrow Y$. 以 $f(x)$ 记 x 所对应的 y , 称它为 f 在 x 所取的值. 称 X 为 f 的定义域, 称 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 为 f 的值域.

(2) n 元实函数 若 $D \subset \mathbf{R}^n$ (D 通常是某个区域), 则称任何函数 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为 n 元实函数, 记作 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 也缩写成 $y = f(x)$ 或 $y = f(P)$, 其中 $x = P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 称 x_1, x_2, \dots, x_n 为 f 的自变量; 称 \mathbf{R}^{n+1} 中的集合

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\}$$

为 f 的图形, 当 $n = 1$ 或 2 时, 它通常是一曲线或曲面.

(3) 向量值函数 设 $I \subset \mathbf{R}$ 是一区间. 设 $x(t), y(t), z(t)$ 是定义于 I 上的 3 个实函数. 令

$$\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, \quad t \in I,$$

称 $\mathbf{r}(t)$ 为定义于 I 上的一个向量值函数. 因此, 给出一个向量值函数 $\mathbf{r}(t)$, 相当于给出一组实函数:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I.$$

以上函数组常用来表示空间曲线.

(4) 向量场 设 $D \subset \mathbf{R}^3$ 是一区域. 设 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 是定义于 D 上的 3 个实函数, 令

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\},$$

称 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 为定义于 D 上的一个向量场. 因此, 给出向量场 \mathbf{F} , 相当于给出三元函数组:

$$u = P(x, y, z), \quad v = Q(x, y, z), \quad w = R(x, y, z).$$

习惯上, 将 \mathbf{F} 写成 $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$.

1.1.4 复合函数与反函数

(1) 复合函数 给定函数 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: D \rightarrow Z$. 若 f 的值域含于 D , 则 $g(f(x))$ 是一个定义于 X 上的函数, 称它为 g 与 f 的复合函数, 记作 $g \circ f$.

(2) 反函数 设函数 $y = f(x)$ 以 X 为定义域, 以 Y 为值域. 若 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则存在唯一的函数 $g: Y \rightarrow X$, 满足

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y, \quad x \in X, y \in Y.$$

称此函数 g 为 f 的反函数, 记作 $g(y) = f^{-1}(y)$.

例 2 设 $F(x, y) = (x + y, y/x), f(F(x, y)) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 令 $x + y = u, y/x = v$, 则可解出

$$x = \frac{u}{v+1}, \quad y = \frac{uv}{v+1}.$$

于是

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{v+1}\right)^2 - \left(\frac{uv}{v+1}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

换回字母 x, y , 得

$$f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{(1+y)}.$$

1.1.5 函数的初等性质

设 f 是定义于 D 上的实函数.

(1) 有界性 若存在 $M \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in D: f(x) \leq M$ (或 $f(x) \geq M$), 则说 f 在 D 上有上界 (或有下界). 若 f 在 D 上同时有上界与下界, 则说 f 有界.

(2) 奇偶性 若 $f(-x) \equiv -f(x)$, 则称 f 为奇函数; 若 $f(-x) \equiv f(x)$, 则称 f 为偶函数.

(3) 齐次性 若 $f(tx) \equiv t^m f(x)$ ($t > 0, x \in D$), 则称 f 为 m 次齐次函数, 当 $m = 0$ 时就称为齐次函数.

(4) 周期性 设 $D \subset \mathbf{R}$. 若存在 $T > 0$, 使得 $f(x+T) \equiv f(x) (x \in D)$, 则称 f 为以 T 为周期的周期函数.

(5) 单调性 设 $D \subset \mathbf{R}$ 是一区间. 若 $\forall x, y \in D$, 当 $x < y$ 时 $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$), 则称 f 为单调增 (严格单调增) 函数. 而称 $-f(x)$ 为单调减 (严格单调减) 函数.

1.1.6 初等函数

最基本的初等函数是指数函数 e^x , 正弦函数 $\sin x$ 及其反函数 $\ln x, \arcsin x$. 由这些函数生成以下初等函数:

$$\text{余弦} \quad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{正切} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \dots\right);$$

$$\text{余切} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \dots);$$

$$\text{双曲正弦} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{双曲余弦} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{双曲正切} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{双曲余切} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0);$$

$$\text{幂函数} \quad x^a = e^{a \ln x} \quad (x > 0);$$

$$\text{反余弦} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad (|x| \leq 1);$$

$$\text{反正切} \quad \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{反余切} \quad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{反双曲正弦} \quad \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (|x| < \infty);$$

$$\text{反双曲余弦} \quad \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x > 1);$$

$$\text{反双曲正切} \quad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

习惯上, 以上所列函数皆称为基本初等函数. 由基本初等函数经有限次四则运算与复合而得之函数称为初等函数.

1.2 极 限

1.2.1 极限的描述

微积分学中用到的极限主要有如下 6 种: