现代数学手册

·经典数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

经典数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·
（华中理工大学出版社）
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·经典数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2000年12月
ISBN 7-5609-2172-8

Ⅰ.现…
Ⅱ.现…
Ⅲ.①数学-手册 ②古典数学-手册
Ⅳ.O 1-62

现代数学手册·经典数学卷 《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:周芬娜 李立鹏 余健棠 封面设计:刘 卉
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:33.5 插页:6 字数:1 280 000
版次:2000年12月第1版 印次:2000年12月第1次印刷 印数:1—8 000
ISBN 7-5609-2172-8/O·205 定价:90.00元

《现代数学手册》编纂委员会

前　言

在人类开始跨入21世纪的历史时期，人们已普遍地看到了一种历史现象，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期，伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展，此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国，"科学技术是第一生产力"（邓小平名言）已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是，如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具，当然也就不会有现代科技。因此"国家富强必须要依靠数学发达"这句经典名言（拿破仑(Napoleon)名言），自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识，在华中理工大学出版社的倡议与委托下，我们通过集体协作，努力编纂了这部《现代数学手册》巨著，其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望，而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来，这部工具性巨著服务的读者（或使用者）对象，包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么，作为数学工具书，这部巨型手册要求具备哪些特点呢？在编写过程中，出版社负责人和我们达成了一项共识，即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200余位撰稿人与审稿人（来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等40多所高校与研究所）按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力，使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便，本手册分5卷出版，分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”。需要指出的是，各个分支（篇目）的归属是相对的，这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如，“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生，以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后，还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作，深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编　徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

近代数学卷

计算机数学卷

随机数学卷

经济数学卷

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

MODERN MATHEMATICS

COMPUTER MATHEMATICS

STOCHASTIC MATHEMATICS

ECONOMIC MATHEMATICS

目　　录

·经典数学卷·

第1篇

微积分

编　者　陆传务　胡适耕
审校者　肖伊莘

目　录

引　言

近代数学的伟大变革是从引进变量开始的，而微积分学的创建正是变量数学的第一个重大成就．微积分学的出现不仅整个地更新了数学的面貌，而且显著地促进了近代科学技术的发展．没有微积分这一强大的新数学工具，力学、物理学、天文学等领域的近代理论的形成是不可能的．微积分学的伟大开创者牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)等人的名字，不仅与数学联系在一起，而且与整个近代科学联系在一起．

微积分学为研究变量提供了一个方法系统，其基本内容是微分与积分这两种互相关联的运算．微分与积分分别源于有重大现实意义的速率问题与求积(面积、体积等)问题，且都建立在极限概念的基础上．微分学研究变量的局部性质，而积分学则处理变量在一定范围内的“求和”，因而是一整体问题．自然，局部与整体的对立与联系，充分体现于微分与积分的相互关系中．

微积分学已成为经典数学的重要部分，在它的基础上成长出一系列重要学科，如微分方程、复变函数、实变函数、变分法等．微积分学的理论与方法，已广泛应用于自然科学、工程技术乃至社会科学的多个部门．对微积分学的一定程度的掌握，不仅是对科技工作者的数学训练中的必备要素，而且也愈来愈成为对工程师、经济学家及许多社会工作者的基本要求．

1　极限与连续性

1.1　函　　数

1.1.1　n 维空间

(1) 空间 $\mathbf{R}^n$　n 个实数的有序组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之全体称为 n 维欧几里得(Euclid)空间，记作 $\mathbf{R}^n$．$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为点，记作 $\boldsymbol{x}$ 或大写字母 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}$ 等．$\mathbf{R}^1$ 就是实直线，也写作 $\mathbf{R}$ 或 $(-\infty, +\infty)$；$\mathbf{R}^2$ 就是实平面；$\mathbf{R}^3$ 可解释为通常的空间．

(2) 线性运算　任给 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \cdots, \alpha x_n + \beta y_n).$$

令
$$L = \{(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$
称 L 为从点 $\boldsymbol{x}$ 到点 $\boldsymbol{y}$ 的线段，记作 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$．

(3) 距离　任给 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,称

$$|\boldsymbol{x}|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

为点 $\boldsymbol{x}$ 的模.任给 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^n$,称 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$ 为点 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的距离,记作 $|\boldsymbol{AB}|$.

(4) 球　任给 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^n$,$r>0$,令

$$N(\boldsymbol{P},r)=\{\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{PQ}|<r\}.$$

称 $N(\boldsymbol{P},r)$ 为以 $\boldsymbol{P}$ 为心、以 r 为半径的 n 维球,或称它为点 $\boldsymbol{P}$ 的 r 邻域.

1.1.2　区域

设 $D(\subset\mathbf{R}^n)$ 是一非空集合.

(1) 内部　若 $\boldsymbol{P}\in D$,且存在 $r>0$,使 $N(\boldsymbol{P},r)\subset D$,则称 $\boldsymbol{P}$ 为 D 的内点;D 的全体内点构成 D 的内部.

(2) 边界　若 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^n$,对任给 $r>0$,$N(\boldsymbol{P},r)$ 中同时含有 D 中的点与不在 D 中的点,则称 $\boldsymbol{P}$ 为 D 的边界点;D 的全体边界点构成 D 的边界,记作 ∂D.

(3) 区域　若 D 只含内点,且其中任两点可用 D 内的折线(相继连接的有限条线段之并)连接,则称 D 为开区域;开区域连同其边界一起构成闭区域.习惯上,开区域连同其部分边界也构成区域.一维区域就是区间.

(4) 有界性　若 D 包含在某个球内,则说 D 有界;否则说 D 无界.

若说到区域 D 而未加限定,则 D 可以是开区域或闭区域,亦可非开非闭;可以有界亦可无界.区域通常用不等式表示.

例 1　给定 $\mathbf{R}^2$ 中的 3 个集合:

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\};$$
$$E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x>0,y>0\};$$
$$F=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\leqslant x<1,y>0\}.$$

则 D 是有界闭区域;E 是无界开区域;F 是非开非闭的无界区域.

1.1.3　函数

(1) 一般定义　设 X,Y 是两个非空集.若对每个 $x\in X$,按某个法则 f 有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 为定义于 X 上而取值于 Y 中的函数,或称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作 $f: X\to Y$.以 $f(x)$ 记 x 所对应的 y,称它为 f 在 x 所取的值.称 X 为 f 的定义域,称 $\{f(x): x\in X\}$ 为 f 的值域.

(2) n 元实函数　若 $D\subset\mathbf{R}^n$(D 通常是某个区域),则称任何函数 $f: D\to\mathbf{R}$ 为 n 元实函数,记作 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,也缩写成 $y=f(\boldsymbol{x})$ 或 $y=f(\boldsymbol{P})$,其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 f 的自变量;称 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)) \mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$$

为 f 的图形,当 $n=1$ 或 2 时,它通常是一曲线或曲面.

(3) 向量值函数　设 $I\subset\mathbf{R}$ 是一区间.设 $x(t),y(t),z(t)$ 是定义于 I 上的 3 个实函数.令

$$\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},\quad t\in I,$$
称 $\boldsymbol{r}(t)$ 为定义于 I 上的一个向量值函数.因此,给出一个向量值函数 $\boldsymbol{r}(t)$,相当于给出一组实函数:
$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad t\in I.$$
以上函数组常用来表示空间曲线.

(4) 向量场　设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 是一区域.设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 是定义于 D 上的3个实函数,令
$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\},$$
称 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 为定义于 D 上的一个**向量场**.因此,给出向量场 $\boldsymbol{F}$,相当于给出三元函数组:
$$u=P(x,y,z),\quad v=Q(x,y,z),\quad w=R(x,y,z).$$
习惯上,将 $\boldsymbol{F}$ 写成 $\boldsymbol{F}=\{P,Q,R\}$.

1.1.4 复合函数与反函数

(1) 复合函数　给定函数 $f:X\to Y$ 与 $g:D\to Z$.若 f 的值域含于 D,则 $g(f(x))$ 是一个定义于 X 上的函数,称它为 g 与 f 的复合函数,记作 $g\circ f$.

(2) 反函数　设函数 $y=f(x)$ 以 X 为定义域,以 Y 为值域.若 $\forall x_1,x_2\in X$,当 $x_1\neq x_2$ 时 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则存在唯一的函数 $g:Y\to X$,满足
$$g(f(x))=x,\quad f(g(y))=y,\quad x\in X,y\in Y.$$
称此函数 g 为 f 的反函数,记作 $g(y)=f^{-1}(y)$.

例2　设 $F(x,y)=(x+y,y/x),f(F(x,y))=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

解　令 $x+y=u,y/x=v$,则可解出
$$x=\frac{u}{v+1},\quad y=\frac{uv}{v+1}.$$
于是
$$f(u,v)=\left(\frac{u}{v+1}\right)^2-\left(\frac{uv}{v+1}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$
换回字母 x,y,得
$$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{(1+y)}.$$

1.1.5 函数的初等性质

设 f 是定义于 D 上的实函数.

(1) 有界性　若存在 $M\in\mathbf{R}$,使得 $\forall x\in D:f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant M$),则说 f 在 D 上有上界(或有下界).若 f 在 D 上同时有上界与下界,则说 f 有界.

(2) 奇偶性　若 $f(-x)\equiv-f(x)$,则称 f 为奇函数;若 $f(-x)\equiv f(x)$,则称 f 为偶函数.

(3) 齐次性　若 $f(tx)\equiv t^mf(x)(t>0,x\in D)$,则称 f 为 m 次齐次函数,当 $m=0$ 时就称为齐次函数.

(4) 周期性　设 $D \subset \mathbf{R}$. 若存在 $T > 0$, 使得 $f(x+T) \equiv f(x)(x \in D)$, 则称 f 为以 T 为周期的周期函数.

(5) 单调性　设 $D \subset \mathbf{R}$ 是一区间. 若 $\forall x, y \in D$, 当 $x < y$ 时 $f(x) \leqslant f(y)$ $(f(x) < f(y))$, 则称 f 为**单调增**(严格单调增)**函数**. 而称 $-f(x)$ 为**单调减**(严格单调减)函数.

1.1.6　初等函数

最基本的初等函数是指数函数 e^x, 正弦函数 $\sin x$ 及其反函数 $\ln x$, $\arcsin x$. 由这些函数生成以下初等函数:

余弦　$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (|x| < \infty)$;

正切　$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \cdots\right)$;

余切　$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \cdots)$;

双曲正弦　$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (|x| < \infty)$;

双曲余弦　$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (|x| < \infty)$;

双曲正切　$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (|x| < \infty)$;

双曲余切　$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0)$;

幂函数　$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$;

反余弦　$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad (|x| \leqslant 1)$;

反正切　$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (|x| < \infty)$;

反余切　$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad (|x| < \infty)$;

反双曲正弦　$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (|x| < \infty)$;

反双曲余弦　$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x > 1)$;

反双曲正切　$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \quad (|x| < 1)$.

习惯上, 以上所列函数皆称为基本初等函数. 由基本初等函数经有限次四则运算与复合而得之函数称为初等函数.

1.2　极　　限

1.2.1　极限的描述

微积分学中用到的**极限**主要有如下 6 种: