



高等学校教材

物理化学实验

杨百勤 主编

33

化学工业出版社
教材出版中心

(京) 新登字 039 号

图书在版编目(CIP)数据

物理化学实验/杨百勤主编. —北京: 化学工业出版社, 2001.1
高等学校教材
ISBN 7-5025-3134-3

I. 物… II. 杨… III. 物理化学-实验-高等学校-教材 IV. 064-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 82293 号

高等学校教材
物理化学实验
杨百勤 主编

责任编辑: 陈有华
责任校对: 李 丽 郑 捷
封面设计: 蒋艳君

*

化学工业出版社 出版发行
教材出版中心
(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)
发行电话: (010) 64982511
[http:// www.cip.com.cn](http://www.cip.com.cn)

*

新华书店北京发行所经销
北京市彩桥印刷厂印刷
北京市彩桥印刷厂装订
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 6 字数 161 千字
2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月北京第 1 次印刷
印 数: 1—4000
ISBN 7-5025-3134-3/G·801
定 价: 13.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前 言

目前,国内已出版了好几种版本的《物理化学实验》,编者的水平都比较高,内容比较丰富。但对工科院校来讲,考虑到物理化学实验学时的限制、实验经费的有限投入,加之物理化学课程内容的要求,很多有难度的、更先进的实验一般工科院校还难以开出。为此,我们在经过多年教学实践及我院各专业(制浆造纸、皮革工程、材料工程、硅酸盐工程、食品工程、生物化工、化学工程、应用化学等)对物理化学实验的要求,并参考国内外诸家教材的基础上编写了这本《物理化学实验》,除在我院各轻化工类专业使用外,还可供工科类高职高专院校师生参考。

本书分绪论、实验、附录三部分。绪论部分(必读内容)介绍了物理化学实验的目的和要求、误差及数据处理。附录部分除了对实验中所用仪器的基本原理和使用方法做了介绍外,还编有实验室安全知识一节(必读内容)及物理化学常用数据表,供学生在处理实验数据时查用。实验内容共二十三个,各实验均经过反复试做,内容比较成熟,方法可靠。内容涉及到化学热力学、电化学、化学动力学、表面化学和胶体化学等,不同专业按本专业要求可从中选做。每个实验均写有实验目的、预习要求、实验原理、仪器和药品、实验步骤、实验注意事项、实验记录 and 数据处理、思考题及参考资料等九项。格式新颖,条理清楚,便于学生阅读。思考题以启发引导学生深入思考,提高实验技术。本书在维持物理化学实验基本体系前提下,力求增加一些实用性实验,以满足工科学生的要求。如氟离子选择电极的测试和应用(在电化学分析实验中开设),乳状液的制备和性质(在胶体化学实验中开设)等等,而很多专业不开这些课程,所以就接触不到这些实验,增加了这方面的内容,可以让学生感到物理化学课并非是纯理论,物理化学实验并非是对理论的验证,让学生进一步领会理论与

实践的关系。再如，弱电解质电离常数的测定，根据物理化学课程中讲授的电导测定应用内容，没有沿用多种实验书中介绍的实验方法，直接变为测一系列不同浓度 HAc 溶液的电导率，通过线性关系处理数据，更体现出物理化学实验数据处理的特点。编写的二十三个实验，不可能涵盖物理化学的全部内容，但我们想在提高实用性上作一些尝试。

本书编写采用国际单位制及国家法定计量单位名称、符号及表示法。

本书由杨百勤主编，参加编写的还有王保和、樊国栋、黄宁选。其中实验四、十一、十二、十四、十五、十六、十九、二十、二十一、二十三由杨百勤执笔；实验一、十、十三、十八、二十二由王保和执笔；实验二、六、八、九由樊国栋执笔；实验三、五、七、十七由黄宁选执笔；王保和绘制了部分插图，全书由杨百勤统稿。

西北轻工业学院王可鉴教授审阅了初稿的全部内容，杜宝中副教授审阅了部分内容，并提出了宝贵的指导意见，借此机会，对他们深致谢意。同时，在编写过程中，曾参考了国内外诸家教材，在此向教材作者深表感谢。

本书的正式出版得益于化学工业出版社及西北轻工业学院教务处的支持，在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限，书中的缺点和错误在所难免，热忱欢迎批评指正，以便再版时得以更正。

编 者

2000 年 10 月

内 容 提 要

本书分绪论、实验、附录三部分。其中选编了 23 个实验，内容涉及化学热力学、电化学、化学动力学、表面化学和胶体化学等。每个实验均写有实验目的、预习要求、实验原理、仪器和药品、实验步骤、实验注意事项、实验记录 and 数据处理、思考题和参考资料等内容。

本书可供高等院校制浆造纸、皮革工程、材料工程、硅酸盐工程、食品工程、生物化工、化学工程、应用化学等专业使用，也可供工科类的高职高专院校师生参考。

目 录

I 绪论	1
第一节 物理化学实验的目的和要求	1
第二节 物理化学实验中的误差及数据处理	2
II 实验	21
实验一 恒温槽装配和性能测试	21
实验二 蒸气密度及摩尔质量的测定	26
实验三 燃烧热的测定	30
实验四 液体饱和蒸气压的测定	36
实验五 化学平衡常数及分配系数的测定	39
实验六 配合物组成和不稳定常数的测定——等摩尔系列法	43
实验七 凝固点降低法测定摩尔质量	49
实验八 挥发性双液系沸点-组成相图的绘制	53
实验九 三液系(苯-水-乙醇)相图的绘制	57
实验十 原电池电动势的测定	62
实验十一 弱电解质电离常数的测定	68
实验十二 氟离子选择电极的测试和应用	72
实验十三 阳极极化曲线的测定	76
实验十四 过氧化氢的催化分解	80
实验十五 蔗糖水解速率常数的测定	84
实验十六 乙酸乙酯皂化反应速率常数的测定	90
实验十七 溶液表面张力的测定	94
实验十八 溶液中的等温吸附	99
实验十九 粘度法测高分子化合物的摩尔质量	104
实验二十 溶胶的制备、净化及其性质的研究	109
实验二十一 溶胶电性的研究——电泳	115
实验二十二 临界胶团浓度的测定	119
实验二十三 乳状液的制备和性质	124

Ⅲ 附录	129
附录一 实验室安全知识	129
附录二 气体钢瓶和减压器的使用技术	134
附录三 水银温度计和贝克曼温度计	137
附录四 福廷式气压计	142
附录五 UJ-25 型高电势直流电位差计	144
附录六 电导率仪	147
附录七 恒电势仪	150
附录八 pHs-3C 型数字式酸度计	152
附录九 PXJ-1B 数字式离子计	153
附录十 显微镜	154
附录十一 旋光仪	156
附录十二 阿贝折射仪	160
附录十三 722 型光栅分光光度计	163
附录十四 单盘光学天平	166
附录十五 法定计量单位	169
附录十六 物理化学常用数据表	172

I 绪 论

第一节 物理化学实验的目的和要求

物理化学实验课的目的，在于培养学生开展有关物理化学研究工作的实验能力，了解物化实验中常见的物理量（如温度、压力、电性质、光性质等）测量与控制的原理和方法，掌握有关仪器的正确使用，学习对测量结果的数据进行科学的分析与处理。同时，通过实验验证有关理论，巩固与加深对物化原理的理解，为今后从事科研工作打下必要的基础。物化实验大多带有综合性，涉及化学领域中各分支所需的基本研究工具和方法，为了使學生通过物化实验有所收获，必须对学生进行正确的严格的基本操作训练并提出明确的要求，具体要求如下。

一、实验前的准备

1. 准备一本实验预习报告本。
2. 对实验内容及有关附录必须充分预习，了解本实验的目的，掌握实验所依据的基本理论，明确需要进行测量的项目和数据的记录，了解所用仪器的构造和操作规程，做到心中有数。
3. 写出实验预习报告，内容包括实验目的、简单的操作步骤，实验时要记录的数据，可设计成原始数据记录表，预习报告在实验前经指导教师检查。

二、实验过程

1. 进入实验室后按编号到指定的实验台，先按仪器使用登记本核对仪器。
2. 不了解仪器使用方法时，不得乱试，不得擅自拆卸仪器，仪器装置安装好后，必须先经指导教师检查无误后，方可进行实验。
3. 遇有仪器损坏，应立即报告教师，查明原因，并登记之。

4. 实验应按实验教材进行操作, 不得随意更改, 若有更改意见, 需经指导教师同意后方可进行。

5. 公用仪器及试剂瓶不得随意更动原有位置, 用毕要立即放回原处。

6. 实验数据应随时记在记录本上, 不要用单张零纸, 记录数据要详细准确, 且注意整洁清楚, 尽量采用表格形式, 养成良好的记录习惯。

7. 充分利用实验时间, 观察现象, 记录数据, 分析和思考问题。不得大声喧哗等。

8. 实验完毕后, 实验数据交指导教师检查并签名, 如不合格, 需补做或重做。

9. 实验完毕后, 应清理实验桌、拆卸实验装置、洗净仪器, 保持实验室整洁。经指导教师同意后, 方可离开实验室。

10. 对实验室安全操作应予以高度重视, 请仔细阅读附录一“实验室安全知识”。

三、实验报告

1. 搞清数据处理的原理、方法、步骤及单位, 仔细进行计算, 正确表达数据结果, 处理实验数据应各人独立进行, 不得两人合写一份报告。

2. 报告内容包括: 实验目的、简单原理、仪器装置示意图、实验条件(室温、大气压等)、实验数据、结果处理、思考题及讨论等。

实验数据尽可能采用表格形式, 作图必须用坐标图纸, 重点应放在对实验数据的处理和对实验结果的分析讨论上。一份好的实验报告应该目的明确、原理清楚、数据准确、作图合理、讨论深入、字迹清楚等。

第二节 物理化学实验中的误差及数据处理

一、误差的分类及其特点

在实验中, 我们直接测定一个物理量, 由于测量技术和人们观察能力的局限, 测量值(X_i)与客观真值(X)不可能完全一致, 其差值($X_i -$

X)即为误差^①。根据引起误差的原因及其特点,可分为以下三类。

(一) 系统误差

此误差可由仪器刻度不准、试剂不纯、实验者操作不合理以及计算公式的近似性等引起。系统误差的特点是单向性,即在多次测量中,其误差常保持同一大小与符号,偏大始终偏大,偏小总是偏小。所以不能单纯依靠增加测量次数取平均值来消除。但是通过对仪器的校正、试剂的提纯、实验者操作偏向的改正等措施可使之减少到最小程度。也可以采用不同的仪器与方法测同一物理量,看结果是否一样,以达到识别系统误差的目的。

(二) 偶然误差

这是一种不能控制的偶然因素引起的误差,如外界条件不能维持绝对恒定(如电路中电压、恒温槽中温度的波动等)以及实验者对仪器最小分度值以下数值估计的出入等。偶然误差的数据有时大,有时小,可以正,也可以负。其出现完全出于偶然,其规律受着统计学的概率支配。因此,在同一条件下可以通过增加测量次数,使误差相消,测量的平均值就可接近于真值。

设每次测量的偶然误差为 δ_i , $X_i = X + \delta_i$ (δ_i 可正可负),若测量 n 次,则

$$\sum_{i=1}^n X_i = nX + \sum_{i=1}^n \delta_i \quad \text{或} \quad X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n}$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{n} = 0$$

所以

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \bar{X}$$

显然,在实验中测量次数 n 越大,算术平均值 $\bar{X}$ 越接近真

① 因真值不能测得,只能在最佳条件下,在有限测量中求得接近真值的算术平均值($\bar{X}$),习惯上,都用测量值与平均值(或文献、手册上的公认值)之差,即偏差($X_i - \bar{X}$)来代替误差。

值 X 。

(三) 过失误差

此误差是由于实验条件突然变化或实验者操作、计算的差错引起。这实属一种错误，过失误差无规可循，只要认真工作，便可避免。

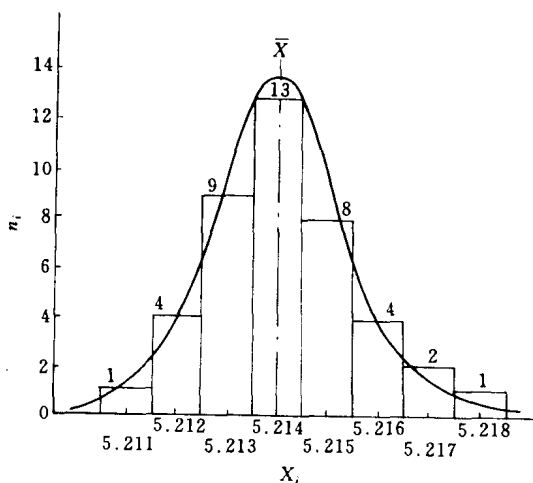
总之，上述三类误差的大小不外是取决于设备的优劣、条件控制的好坏以及实验者操作水平的高低。在实验中系统误差应减少到最小程度，过失误差不允许存在，偶然误差却难于避免。这正是在最佳条件下测定还存在误差的原因所在。因此，一个好的测量结果应该只包含偶然误差。

二、偶然误差的正态分布

上面已述及偶然误差虽出于偶然因素，但若在相同条件下，用同一方法对某物理量进行多次测量时，发现其大小与符号的分布完全受概率支配。例如，用读数显微镜测量某一毛细管长度 X_i ，共 42 次，在排除系统误差后，测得数据 X_i 及相应出现次数如下：

5.211 (1 次)、5.212 (4 次)、5.213 (9 次)、5.214 (13 次)

5.215 (8 次)、5.216 (4 次)、5.217 (2 次)、5.218 (1 次)

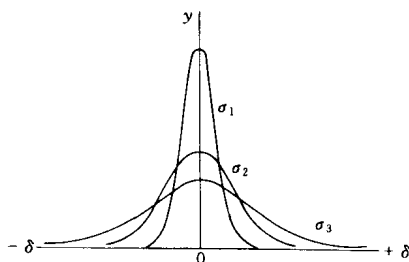


绪论图 1 测量值分布

$$\text{平均值 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{42} \sum_{i=1}^{42} X_i = 5.214$$

若以测量值 X_i 为横坐标, X_i 出现的次数 n_i 为纵坐标, 设间距 $\Delta X = \pm 0.0005$, 可得长方形组成的塔形分布 (绪论图 1)。若用频率 $\frac{n_i}{N}$ 为纵坐标 (N 为总的测量次数, 在 N 次测量中 X_i 出现的次数为 n_i) 也可以得到同样的分布。随着测量次数的增加, 间距 ΔX_i 的缩小便可得一光滑曲线。当测量次数无限多, 频率即概率。因此上述分布曲线即概率分布曲线。

偶然误差的出现受概率支配, 因此, 在偶然误差分析中我们常常是将绪论图 1 坐标变换为绪论图 2 坐标进行讨论的。即将 y 轴移到 X 处, 横坐标用偶然误差 δ_i 代替 X_i , 用 δ_i 的概率密度 $y = \frac{n_i}{N \Delta \delta_i}$ 为纵坐标。这类分布曲线称为正态分布 (或高斯分布)。用数学方程式表示:



绪论图 2 偶然误差正态分布曲线

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{X_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

式中 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{N}}$ 定义为均方根误差。

显然, 曲线以下的面积代表出现可能误差的全部可能性。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y d\delta_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{n_i}{N \Delta \delta_i} \right) \Delta \delta_i = 1$$

从绪论图 1、绪论图 2 中, 我们可以看到:

1. 在相同条件下, 某一测量结果的误差, 若符合正态分布, 则说明这组测量值中只包含偶然误差。

2. 偶然误差的分布特点如下。

(1) $\delta_i = 0$ 的 X_i 出现概率最大, 此 X_i 相当于平均值 $\bar{X}$, 并以此 X_i 为最高点形成对称分布。

(2) 绝对值相等的正、负误差出现的机会相等。某误差出现的概率与误差大小有关, 小的误差比大的误差出现机会多。

(3) 超过某一极限的误差值一般是不可能出现的。从概率论可知, 当 $\delta > 2\sigma$, 其出现的概率只出现所有可能误差的 0.3%, 所以, 测量的真值 X 是在 $X \pm 3\sigma$ 时, 此误差就认为不属于偶然误差的范畴, 此测量值应予舍弃。

3. 当 $\delta_i = 0$, 即 $X_i = X$, 此时 y 值最大。但同一物理量若测量的条件与方法不同, 可得不同形状的分布曲线。曲线越陡窄, 说明 σ 越小, 则测量的精密度越高。

三、误差的表示

(一) 准确度与精密度

准确度反映了测量值与真值之间的符合程度, 即测量准不准问题。精密度则反映测量结果的重复性, 例如在 101.325kPa 下测得纯苯沸点, 若每次测定的前 3 个有效数字都是 81.3, 差别都只在小数点第二位, 这组数据是很精密的, 但是准确度很低。因为 101.325kPa 下纯苯的沸点应为 80.1℃, 所以高精密度不能说明准确度好, 而高准确度的数据却要足够的精密度来保证。

应该指出, 测量中系统误差小, 准确度就好, 偶然误差小, 精密度就高。

(二) 绝对误差与相对误差

测量值与真值之差, 称为绝对误差 $\delta_i = X_i - X = X_i - \bar{X}$ 。

绝对误差与真值之比, 称为相对误差 $A_i = \frac{\delta_i}{X} = \frac{X_i - X}{X} \times 100\%$ 。

可见, 相对误差不仅与绝对误差有关, 而且还取决于被测量值的大小, 因而便于比较不同的测量结果, 所以, 普遍被采用。

(三) 算术平均误差 ($\Delta\bar{X}$) 与标准误差 (σ)

算术平均误差定义为:

$$\Delta \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$$

此外，还可利用相对平均误差公式 $\frac{\Delta \bar{X}}{\bar{X}} \times 100\%$ 来表示。

标准误差（又称均方根误差）在有限次的测量中表示为：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$

算术平均误差计算方便，但在反映测定精密度时不够灵敏。若对同一测定量有两组数据，甲组每次的绝对误差彼此接近，乙组每次测量的绝对误差有大、中、小之别，如取 ΔX 表示，可能得到同一结果，如用标准误差（ σ ）表示，就易反映出它们之间的差别。

例如，在 CO 变换的催化反应中，若测得 CO 的转化率（%）有如下的一组数据：15.12、15.15、15.06、15.30、14.98、15.21。则

算术平均值：

$$\bar{X} = \frac{1}{6}(15.12 + 15.15 + 15.06 + 15.30 + 14.98 + 15.21) = 15.14$$

算术平均误差：

$$\Delta \bar{X} = \frac{1}{6}(0.02 + 0.01 + 0.08 + 0.16 + 0.16 + 0.07) = 0.08$$

标准误差：

$$\sigma = \left[\frac{1}{6-1} (4 + 1 + 64 + 256 + 256 + 49) \times 10^{-4} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.11$$

所以，CO 的转化率用算术平均误差表示：(15.14 ± 0.08)%

用标准误差表示：(15.14 ± 0.11)%

(四) 仪器读数的精度

误差的计算，通常要求一定的测量次数，因此甚感不便，在系统误差已被克服的直接测量中，可根据使用仪器的精度来估计测量的可能误差范围。例：

一等分析天平 $\Delta \bar{X} = \pm 0.0001\text{g}$ ； $\frac{1}{10}$ 温度计 $\Delta \bar{X} = \pm 0.02^\circ\text{C}$ ；二

等 50mL 移液管 $\Delta\bar{X} = \pm 0.12\text{mL}$ ；一等 100mL 容量瓶 $\Delta\bar{X} = \pm 0.10\text{mL}$ 。

如用 $\frac{1}{10}$ 温度计测得温度为 28.48°C ，可表示为 $(28.48 \pm 0.02)^\circ\text{C}$ 。

四、测量结果的正确记录 and 有效数字

测量的误差问题紧密地与正确记录测量结果联系在一起，由于测得的物理量或多或少都有误差，那么，一个物理量的数值和数学上的数值就有着不同的意义。例如：

数学上 $1.35 = 1.35000\cdots$

物理上 $(1.35 \pm 0.01) \text{ m} \neq (1.3500 \pm 0.0001) \text{ m}$ ，因为物理量的数值不仅能反映出量的大小，数据的可靠程度，而且还反映了仪器的精确程度和实验方法。如 $(1.35 \pm 0.01) \text{ m}$ 可用普通米尺测量，而 $(1.3500 \pm 0.0001) \text{ m}$ 则只能采用更精密的仪器才行。因此物理量的每一位都是有实际意义的。有效数字的位数就指明了测量精确的幅度，它包括测量中可靠的几位和最后估计的一位数。

现将与有效数字有关的一些规则和概念分条综述如下。

(1) 误差（绝对误差和相对误差）一般只有一位有效数字，至多不超过二位。

(2) 任何一物理量数据，其有效数字的最后一位，在位数上应与误差的最后一位划齐，如：

1.35 ± 0.01 正确

1.351 ± 0.01 夸大了结果的精确度

1.3 ± 0.01 缩小了结果的精确度

(3) 有效数字的位数越多，数值的精确程度也越大，即相对误差越小，如：

$(1.35 \pm 0.01) \text{ m}$ ，三位有效数字，相对误差 0.7%；

$(1.3500 \pm 0.0001) \text{ m}$ ，五位有效数字，相对误差 0.007%。

(4) 有效数字的位数与十进位制单位的变换无关，与小数的位数无关，如 $(1.35 \pm 0.01) \text{ m}$ ，与 $(135 \pm 1) \text{ cm}$ 完全一样，反映了

同一个实际情况，都有 0.7% 的误差。但在另一种情况下，例如 148000 这个数值就无法判断后面三个 0 究竟是用来表示有效数字的，还是用以标志小数点位置的。为了避免这种困难，我们常常采用指数表示法。例如 158000 若表示三位有效数字，则可写成 1.58×10^5 ；若表示四位有效数字，则可写成 1.580×10^5 。所以指数表示法不但避免了与有效数字的定义发生矛盾，也简化了数值的写法，便于计算。

(5) 若第一位的数值等于或大于 8，则有效数字的总位数可以多算一位，例如 9.15 虽然实际上只有三位有效数字，但在运算时，可以看做四位。

(6) 计算平均值时，若为四个数或超过四个数相平均，则平均值的有效数字位数可增加一位。

(7) 任何一次直接量度值都要记到仪器刻度的最小估计读数，即记到第一位可疑数字。如用滴定管时，最小刻度数为 0.1mL，它的最后一位估计读数要记到 0.01mL。

(8) 加减运算时，各数值小数点后面所取的位数与其中最少者相同。

$$0.254 + 21.2 + 1.23 = 0.3 + 21.2 + 1.2 = 22.7$$

$$21.21 - 0.2234 = 21.21 - 0.22 = 20.99$$

乘除运算时，所得的积或商的有效数字，应以各值中有效数字位数最少的值为标准，如：

$$2.3 \times 0.524 = 2.3 \times 0.52 = 1.196 = 1.2$$

$$5.32 \div 2.801 = 5.32 \div 2.80 = 1.90$$

用对数作运算时，对数尾部的位数应与真数的有效数字相等。如

$$\lg(1.32 \times 10^3) = 3.12$$

对于如 π 、 $\sqrt{2}$ 及有关常数可按需要任意取其有效数字。

五、函数的相对平均误差分析及应用

在实际工作中，我们的目的常常不是要得到如长度、体积之类的可以直接测量的数据，而是通过对几个物理量的直接测量，然后按照一定的函数关系进行计算。如由实验测得 m 、 p 、 V 、 T 值，通过

$M = \frac{mRT}{pV}$ 公式求得某气体的摩尔质量 M ，显然，这类间接测量的函数误差是由各直接测量值的误差大小决定的。

令一函数 $u = f(x, y, z \cdots)$ 。 x 、 y 、 $z \cdots$ 为各直接测量量，其相应的绝对平均误差为 Δx 、 Δy 、 Δz 。

取 u 全微分

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y,z \cdots} dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x,z \cdots} dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{x,y \cdots} dz + \cdots$$

由于 (1) Δx 、 Δy 、 Δz 的值都很小，上式中 dx 、 dy 、 dz 可用之代替。(2) 估计函数 u 的最大误差时，是取各测定值误差的积累，即取其误差绝对值相加。所以

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{1}{f(x, y, z \cdots)} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \cdot |\Delta z| + \cdots + \cdots \right]$$

此式即为求各种形式函数相对平均误差的普遍式。

同样， $\frac{\Delta u}{u} \approx d \ln u = d \ln f(x, y, z \cdots)$

由此可见，欲求任一函数的相对平均误差，也可先取其函数的自然对数，然后再微分之，这种求法是比较方便的。

例 $u = x + y + z$

$$d \ln u = d \ln(x + y + z)$$

所以
$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{|\Delta y|}{y} + \frac{|\Delta z|}{z}$$

例 $u = x \cdot y \cdot z$

$$d \ln u = d \ln(x \cdot y \cdot z)$$

所以
$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{|\Delta x|}{x} + \frac{|\Delta y|}{y} + \frac{|\Delta z|}{z}$$

例 $u = x^n$

$$d \ln u = n d \ln x$$

所以
$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{|\Delta x|}{x}$$

函数的算术平均误差 Δu 可由相对误差而得，即