同济大学应用数学系编

高等数学习题集(1996年修订本)

习题选解

下册

骆承钦 邱伯驺 李生文 徐鑑青 许新福 编

高等教育出版社

同济大学应用数学系编

高等数学习题集(1996年修订本)

习题选解

下 册

骆承钦 邱伯驺 李生文
徐鑑青 许新福 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集习题选解.下册/骆承钦等编.—北京:高等教育出版社,2000

ISBN 7-04-007895-3

Ⅰ.高… Ⅱ.骆… Ⅲ.高等数学-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 14294 号

高等数学习题集(1996 年修订本)习题选解下册
骆承钦 邱伯驺 李生文 徐锴青 许新福 编

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市东城区沙滩后街 55 号　　邮政编码 100009
电　　话 010—64054588　　传　　真 010—64014048
网　　址 http://www.hep.edu.cn

经　　销 新华书店北京发行所
排　　版 高等教育出版社照排中心
印　　刷 高等教育出版社印刷厂

开　　本 850×1168 1/32　　版　　次 2000 年 5 月第 1 版
印　　张 6.875　　印　　次 2000 年 5 月第 1 次印刷
字　　数 160 000　　定　　价 7.40 元

内容提要

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、多元函数的基本概念

8.1.20.　设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y\ln(x^x)}$，求 $f(x,y)$.

解　$f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y\ln(x^x)}=\dfrac{x-y}{x}\cdot\dfrac{e^x}{xe^y\ln x}$

$$=\frac{(x-y)e^{x-y}}{e^{2\ln x}\ln x},$$

令　$u=x-y, v=\ln x$，则　上式化为

$$f(u,v)=\frac{ue^u}{ve^{2v}}=\frac{ue^{u-2v}}{v},$$

即　　$f(x,y)=\dfrac{xe^{x-2y}}{y}$.

8.1.21.　设 $z=\sqrt{x}+f(\sqrt{y}-1)$，若当 $x=1$ 时，$z=y$. 求函数 $f(u)$ 及 $z=z(x,y)$ 的表达式.

解　当 $x=1$ 时，$z=y$，所以 $y=1+f(\sqrt{y}-1)$，即 $f(\sqrt{y}-1)=y-1$，故有 $z=\sqrt{x}+y-1$.

令 $u=\sqrt{y}-1$，则 $y=(u+1)^2$，从而

$$f(u)=(u+1)^2-1,$$

因此所求函数的表达式为

$$f(u)=u^2+2u, z=z(x,y)=\sqrt{x}+y-1.$$

8.1.26.　求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解 当$(x,y)\neq(0,0)$时，令 $u=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$，则两边取对数，得 $\ln u=x^2y^2\ln(x^2+y^2)$.

当$0<x^2+y^2<1$ 时，由 $x^2y^2\leqslant x^2\leqslant x^2+y^2$，得

$$0<-x^2y^2\ln(x^2+y^2)<-(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2),$$

而 $$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}[-(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)]=0,$$

所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}[-x^2y^2\ln(x^2+y^2)]=0.$$

于是 $$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1.$$

8.1.28. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明:此函数沿着过点 $O(0,0)$的每一条射线 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 趋于 0 时，有

$$\lim_{\rho\to 0}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=0,$$

但在点 O 处不连续.

证 显然对于固定的 θ，都有

$$\lim_{\rho\to 0}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta}=0.$$

即(x,y)沿所有通过原点的直线趋向原点时，$f(x,y)$的极限是存在的，且其极限等于 0.

但沿着曲线 $y=kx^2$ 趋于(0,0)时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=kx^2}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

当 k 取不同值时，极限不同. 即$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)$不存在.

故 $f(x,y)$在点 O 处不连续.

8.1.30. 设 $f(x,y)$在区域 D 内的点 $P(a,b)$处连续，且

$f(a,b)>0$.证明:存在点 P 的一个邻域 U,使得当 $(x,y)\in U$ 时,有 $f(x,y)>0$.

证 因为 $f(x,y)$ 在点 $P(a,b)$ 处连续,由二元函数连续性定义知,对于任意给定的正数 ε,存在点 P 的某个邻域 $U(P,\delta)$,使得当 $(x,y)\in U$ 时,$|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$,即

$$f(a,b)-\varepsilon<f(x,y)<f(a,b)+\varepsilon,$$

又 $f(a,b)>0$,取 $\varepsilon<f(a,b)$,有 $f(x,y)>0$.故存在点 P 的一个邻域 U,使得当 $(x,y)\in U$ 时,有 $f(x,y)>0$.

8.1.31. 判断极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$ 是否存在.

解 因为 $\lim\limits_{\substack{y=-x\\x\to0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x-\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{1-\sec^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x^2}=\infty.$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$ 不存在.

8.1.32. 判断极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 是否存在.

解 因为 $\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}=\dfrac{xy(\sqrt{x+y+1}+1)}{x+y}$,当 (x,y) 沿曲线 $y=-x+ax^2(a\neq0)$ 趋于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=-x+ax^2}}\frac{xy(\sqrt{x+y+1}+1)}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x(-x+ax^2)}{ax^2}(\sqrt{ax^2+1}+1)$$

$$=-\frac{2}{a}.$$

a 取不同的数值,其极限值不同,故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 不存在.

8.1.33. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对变量 x 是连续的,对变量 y 满足李普希茨(Lipschitz)条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$
其中(x,y_1),(x,y_2)为 G 内任意两点,L 为常数. 证明函数$f(x,y)$在 G 内连续.

证 因为$f(x,y)$在 G 内对变量x 连续,依定义,对于任意的$(x,y)\in G$ 及对于任意给定的正数ε,总存在一个正数 δ_1,当$|h|<\delta_1$ 时,有$|f(x+h,y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

又 $f(x,y)$在 G 内对变量 y 满足 Lipschitz 条件,即对任意的$(x,y+k)\in G$,当$|k|<\frac{\varepsilon}{2L}$时,$|f(x,y+k)-f(x,y)|\leqslant L|k|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\}$,则当$|h|<\delta$ 且$|k|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}
&|f(x+h,y+k)-f(x,y)|\\
&=|f(x+h,y+k)-f(x+h,y)+f(x+h,y)-f(x,y)|\\
&\leqslant|f(x+h,y+k)-f(x+h,y)|+|f(x+h,y)-f(x,y)|\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

由于(x,y)为 G 内任一点,故 $f(x,y)$在 G 内连续.

二、偏 导 数

8.2.26. 记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,证明$\Delta(\ln r)=\frac{1}{r^2}$.

证 $\frac{\partial(\ln r)}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r}=\frac{x}{r^2}$,

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)=\frac{r^2-2xr\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4}=\frac{r^2-2xr\frac{x}{r}}{r^4}=\frac{r^2-2x^2}{r^4},$$

由于 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 中，x、y、z 的轮换对称性，类似地，得

$$\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2}=\frac{r^2-2y^2}{r^4},\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2}=\frac{r^2-2z^2}{r^4}.$$

故 $\Delta(\ln r)=\dfrac{3r^2-2(x^2+y^2+z^2)}{r^4}=\dfrac{3r^2-2r^2}{r^4}=\dfrac{1}{r^2}.$

8.2.29. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1) 求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；

(2) 证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

解 (1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

(2) $\lim\limits_{\substack{y\to0\\ x=ky^2}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{ky^4}{k^2y^4+y^4}=\dfrac{k}{k^2+1},$

其极限值随 k 取不同的数值而不同，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$ 不存在. 故函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

注：从本题可以看出，即使二元函数在某点各偏导数都存在，也不能推得函数在该点连续.

8.2.31. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq0,\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

证 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有 $f_x(x,y)=y\dfrac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

$$f_y(x,y)=x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y\left[\frac{-y^4}{y^4}\right]}{y}=-1,$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

因此 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

注：当二阶偏导数存在，但不连续时，不能保证混合偏导数与求导次序无关.

8.2.35. 设 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$.

解 $$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}=\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left[1+\frac{2y}{x-y}\right]=(-1)^m\cdot m!\ \frac{2y}{(x-y)^{m+1}}$$

$$=2(-1)^m m!\ \left[\frac{x}{(x-y)^{m+1}}-\frac{1}{(x-y)^m}\right],$$

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=2(-1)^m m!\ \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[\frac{x}{(x-y)^{m+1}}-\frac{1}{(x-y)^m}\right]$$

$$=2(-1)^m m!\ \left[\frac{x(m+1)(m+2)\cdot\cdots\cdot(m+n)}{(x-y)^{m+n+1}}-\frac{m(m+1)(m+2)\cdot\cdots\cdot(m+n-1)}{(x-y)^{m+n}}\right]$$

$$=2(-1)^m(m+n-1)!\ \left[\frac{x(m+n)}{(x-y)^{m+n+1}}-\frac{m}{(x-y)^{m+n}}\right]$$

$$=2(-1)^m(m+n-1)!\ \frac{x(m+n)-m(x-y)}{(x-y)^{m+n+1}},$$

从而 $$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=2(-1)^m(m+n-1)!\ \frac{nx+my}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

8.2.36. 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$，验证：$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,$

0)，但 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$在点(0,0)处不连续.

解 $f_x(0,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+y^4}-\sqrt[3]{y^4}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x[(x^4+y^4)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}(x^4+y^4)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{8}{3}}]}=0,$$

所以 $f_{xy}(0,0)=0$.

同理可得 $f_{yx}(0,0)=0$，因此 $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

但在 $x^2+y^2\neq0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{4x^3}{3}(x^4+y^4)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{32x^3y^3}{9(x^4+y^4)^{\frac{5}{3}}}.$$

当 $y=x$，且 $x\to0$ 时，

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to0}}f_{xy}(x,y)=\lim_{x\to0}\left(-\frac{2^{\frac{10}{3}}}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)=\infty.$$

即 $f_{xy}(x,y)$在点(0,0)处极限不存在，自然不连续.

同理 $f_{yx}(x,y)$在点(0,0)处也不连续.

8.2.37. 设 $u=\arctan\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$，求$\dfrac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}$.

解 令 $\xi=1-yz$，$\eta=y+z$，则

$$u=\arctan\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=\arctan\frac{x(1-yz)+y+z}{1-yz-x(y+z)}$$

$$=\arctan\frac{x\xi+\eta}{\xi-x\eta}.$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\xi(\xi-x\eta)+\eta(x\xi+\eta)}{(x\xi+\eta)^2+(\xi-x\eta)^2}=\dfrac{\xi^2+\eta^2}{(x\xi+\eta)^2+(\xi-x\eta)^2}$

$$=\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2(1+x^2)+\eta^2(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2},$$

于是 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=0$，$\dfrac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}=0$.

8.2.38. 设函数 $f(x,y)$对每个固定的 y 是变量 x 的连续函数,且有有界的偏导数 $f_y(x,y)$,试证:$f(x,y)$是变量 x,y 的二元连续函数.

证 设 $f(x,y)$在区域 G 内对于固定的 y 是变量 x 的连续函数,且有有界的偏导数 $f_y(x,y)$,不妨设 $M>0$,$|f_y(x,y)|\leqslant M$,因此对于任意的$(x_0,y_0)\in G$,对于任意给定的正数 ε,总存在一个正数 δ_1,使得对于满足$|x-x_0|<\delta_1$ 的一切 x,有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

亦存在一个正数 δ_2,对于满足$|y-y_0|<\delta_2$ 的一切 y,有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant M|y-y_0|,$$

所以对上面给定的正数 ε,总存在 $\delta_3=\frac{\varepsilon}{2M}$,取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,对于满足$|x-x_0|<\delta$ 的所有 x 和满足$|y-y_0|<\delta$ 的所有 y,有

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\&\quad\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\quad\leqslant M|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续,由(x_0,y_0)的任意性,便知 $f(x,y)$是变量 x,y 的二元连续函数.

三、全微分及其应用

***8.3.11.** 计算$\frac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{(1.05)^3}}}$的近似值.

解 设 $f(x,y,z)=\frac{x^2}{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}}}$,

$$\Delta f\approx f_x\Delta x+f_y\Delta y+f_z\Delta z$$

$$=\frac{2x}{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}}}\Delta x-\frac{x^2}{3y^{\frac{4}{3}}z^{\frac{1}{4}}}\Delta y-\frac{x^2}{4y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{5}{4}}}\Delta z.$$

当 $x=1,y=1,z=1,\Delta x=0.03,\Delta y=-0.02,\Delta z=0.05$ 时,

$$f(1,1,1)=1,\frac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{(1.05)^3}}}$$

$$\approx 1+2\cdot(0.03)+\frac{1}{3}\cdot(0.02)-\frac{1}{4}\cdot(0.05)$$

$$\approx 1.054\,2.$$

8.3.15. 假设 x,y 的绝对值很小,证明有下面的近似公式:

$$(1+x)^m(1+y)^n\approx 1+mx+ny.$$

证 设 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n, f(0,0)=1$.

$$f_x(x,0)=m(1+x)^{m-1}, f_y(0,y)=n(1+y)^{n-1}.$$

所以 $\quad f_x(0,0)=m, f_y(0,0)=n$.

于是 $\quad f(x,y)\approx f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y$

$$=1+mx+ny,$$

故 $\quad (1+x)^m(1+y)^n\approx 1+mx+ny$.

8.3.16. 问函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在点(0,0)处的全微分是否存在?

解 由偏导数定义可得 $f_x(0,0)$,$f_y(0,0)$均为0.但 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$在(0,0)处不连续.要考察 $f(x,y)$在点(0,0)处的全微分是否存在,要由全微分定义判定.

$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^2},$$

所以 $\quad \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^2}}{\rho},$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. 令点$(x,y)$沿直线 $y=x$ 趋于点$(0,0)$,则 $\Delta y=\Delta x$,且当 $\rho\to 0$ 时,$\Delta x\to 0$,所以 上式为

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^2}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{[(\Delta x)^4+(\Delta x)^2]\sqrt{2(\Delta x)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{[(\Delta x)^2+1]\sqrt{2}\,|\Delta x|}.$$

当 $\Delta x\to 0+0$,极限为$\frac{1}{\sqrt{2}}$,当 $\Delta x\to 0-0$,极限为$-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 显然极限不为 0,故函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的全微分不存在.

注:由题 8.2.29 知函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续,故该点处的全微分不存在.

8.3.18. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明:$f(x,y)$的各偏导数存在,但在点$(0,0)$的任何邻域内各偏导数无界、不连续,而 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的全微分存在.

证 因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}$
$=0$,当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

显然 $f_x(x,y)$中$\dfrac{2x}{x^2+y^2}$在点$(0,0)$的任何邻域内无界.

所以 $f_x(x,y)$存在,但在点$(0,0)$的任何邻域内无界、不连续.

同理可证　$f_y(0,0)=0$，$f_y(x,y)$存在，但在点$(0,0)$的任何邻域内无界、不连续.

而
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0.$$
故　$f(x,y)$在$(0,0)$处全微分存在.

8.3.19.　设函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中 $g(x,y)$ 在点$(0,0)$的某一邻域内连续. 试问：

(1) $g(0,0)$为何值时，偏导数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$都存在？

(2) $g(0,0)$为何值时，$f(x,y)$在点$(0,0)$处的全微分存在？

解　(1) 由偏导数定义知，只要固定 $y=0$，函数 $f(x,0)=|x|g(x,0)$的左、右导数存在且相等. 则偏导数 $f_x(0,0)$存在.

又
$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x g(\Delta x,0)}{\Delta x}=g(0,0),$$
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x g(\Delta x,0)}{\Delta x}=-g(0,0).$$
欲使 $f_x(0,0)$存在，必有 $g(0,0)=-g(0,0)$，即要 $g(0,0)=0$ 时，才有 $f_x(0,0)=0$. 类似地可得　当 $g(0,0)=0$ 时，$f_y(0,0)=0$.

(2) 根据全微分存在的条件知，欲使 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，必须当 $\rho\to 0$ 时，有
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=0,$$
其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

又 $\Delta f=|\Delta x-\Delta y|g(\Delta x,\Delta y)$，
$$\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\rho}\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\rho}=\frac{|\Delta x|}{\rho}+\frac{|\Delta y|}{\rho}\leqslant 2\text{ 是有界的.}$$