现代数学基础丛书

模型论基础

●王世强著

科学出版社

现代数学基础丛书

模型论基础

王世强 著

科学出版社

1997

内 容 簡 介

本书介绍模型论的基础知识．主要内容有：紧致性定理，省略型定理，内插定理，完全理论与模型完全理论，初等链，超积，模型论力迫法，饱和模型等．并附有模型论方法对经典数学应用的一些例子．

本书可供大学数学专业高年级学生及研究生、数学教师及数学工作者阅读．也可供其他专业有关数理逻辑及理论计算机科学方面的师生及科学工作者参考．

现代数学基础丛书

模 型 论 基 础

王 世 强 著

责任编辑 杨贤英

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年8月第一版 开本：850×1168 1/32

1997年8月第二次印刷 印张：7 7/8

印数：4851—7870 字数：202,000

ISBN 7-03-005995-6/O·930

定价：15.00元

序　言

模型论是数理逻辑的一个分支，是研究形式语言及其解释（模型）之间的关系的理论．它是一个年轻的分支，近年来发展较快，并开始在一些经典数学学科中得到独特的应用．

早在本世纪二十年代，Th. Skolem 等人在数理逻辑研究中就已得到模型论性质的重要结果．但作为较系统的理论，模型论的奠基人应推 A. Tarski. 后来，A. Robinson 也对模型论作过很多贡献．在这方面贡献较多的数学家，主要还有 R. Vaught，A. И. Мальцев，C. C. Chang，H. J. Keisler，M. Morley，S. Shelah，A. Macintyre 等人。

一个形式语言 $\mathscr{L}$ 的解释 $\mathfrak{A}$ 称为此语言的一个模型（或称结构）．$\mathfrak{A}$ 是一个具有若干运算、关系及特指元素的非空集合，也称为泛代数．所以，模型论又被形容为"泛代数加逻辑"．由于所涉及的逻辑系统不同，模型论可分为：一阶模型论，高阶模型论，无穷长语言模型论，具有广义量词的模型论，模态模型论，多值模型论等．由于在数理逻辑中以一阶逻辑发展最成熟，所以，模型论也是以一阶模型论内容最为丰富，应用也最多．

模型论与数理逻辑的其他分支（逻辑演算，证明论，递归论，公理集合论等）有着密切的联系：首先，各种逻辑演算是模型论的基础．此外，例如：在证明论中，有关判定问题的研究，广泛使用着模型论方法．在公理集合论中，除了各种集合论模型之外，还有布尔值模型被应用于各种独立性问题的研究；有关大基数的研究，也与模型论有密切关系；又如，公理集合论中的力迫方法，也被移植于模型论中．在递归论方面，很多重要的递归论概念被应用于研究各种代数结构，近年来并出现了递归模型论，等等．

模型论中的概念与方法，除了主要来源于数理逻辑之外，也有

不少来源于代数，它与抽象代数的联系很密切. 另外，由 A. Robinson 创始的非标准分析，则是模型论与分析数学相结合的产物. 模型论与其他数学学科(例如，数论，拓扑学，概率论等)也有联系. 在不少场合，模型论的成果不但是作为数学性的结论起作用，而且是作为逻辑性的结论而起推理工具的作用.

本书是一本模型论的入门书，主要介绍一阶模型论的基础性内容. 本书是作者在几年来对数学系数理逻辑方向研究生讲授一学期的专业基础课程的讲稿基础上整理而成的. 作者在讲课时，主要参照了 C. C. Chang 和 H. J. Keisler 合写的"Model Theory"一书(见文献[1]，此书，以下简称 MT). 这是目前在国外为数不多的模型论教材中最重要的一本，内容相当丰富. 它不但可作为教材，而且是专业研究工作者的重要参考书.

本书的基础理论部分，主要取材于 MT. 但在内容取舍及讲述详略上，作者根据我国读者情况及个人意向作了较大的变动：目前，公理集合论在我国还不够普及，所以，本书略去了 MT 中与公理集合论有关的内容. 另外，模型论对经典数学的一些应用具有很大的方法论特点，不同于经典数学中传统的逻辑思维. 作者认为这一点很值得强调，以引起更多人们的关注. 所以，根据所讲题材的可能性在本书中加入了较多的数学例子，特别是一些代数方面的联系及应用.

本书所用术语及符号基本依照 MT. 这样，可便于读者兼读两书，也可使本书成为读者学习 MT 中有关部分的一种引导和补充. 在写法上，本书假定读者已学过一阶谓词演算，并且有朴素集合论的基础知识及抽象代数方面的一定素养.

本书除了第一章的基本概念外，第二、三、四章是最基础的部分：紧致性定理及 LST 定理是模型论中关于模型存在性最基本的定理. 完全理论及模型完全理论对不少数学问题有应用. 模型的初等链是构作模型的常用方法. 模型族的超积在代数中应用较多. 这些内容的应用，在这几章所举的例子及后面的章节中都有所体现.

此外，饱和模型、模型论力迫法、以及 Skolem 函数、不可辨元等，在模型论的进一步研究及应用中，也都是重要的工具和方法，本书只作了初步介绍. 本书的其余几章，是选择介绍模型论中一些专题性的内容，读者可以选学.

考虑到本书的入门性质，对模型论中一些进一步的重要内容如形式理论的范畴性、稳定性、模型完全化及其应用等未作介绍.

判定问题是数学中一类重要问题. 在判定问题的研究成果中，除了直接给出判定方法或直接应用递归论证明不可判定性的之外，在很多形式理论不可判定性的证明中，应用着语义性的化约方法. 实质上，后者是一些模型论性质的构作方法. 作者认为，学习一些这方面的内容，对于熟悉形式语言的运用及观摩一些特殊模型的构作技巧都有助益，对于学习模型论是一种很好的能力上的补充训练. 所以，在本书中作为附录选编了这方面一些初步的内容.

最后，作为模型论对数学问题进一步应用的例子，在书末又补充了附录 II 及附录 III. 附录 II 是对于近年来发展的非标准分析的方法大意作一初步介绍. 附录 III 则是用模型论方法讨论一个较专门的代数问题，从而，具体显示模型论方法在数学论证中的一些独特作用.

在本书编写及讲稿试用的过程中，胡静婉同志及罗里波、卢景波、沈复兴、程翰生、孙晓岚、饶炬、岳其静等同志提出了不少有益的意见. 黄且圆同志参加过备课讨论并承担了书稿的审查工作，也提出了不少有益的意见. 在此一并志谢.

因限于作者水平及编写时间仓促，本书难免有不少不妥之处，希望广大读者批评指正.

王世强

1985 年 10 月于北京师范大学

目　　录

第一章　形式语言及其模型

一个(**形式**)**语言** $\mathscr{L}$ 是一个由一些符号构成的集合．这些符号分为三组(可以是空组)，分别称为关系符号，函数符号及(个体)常量符号．每一关系符号 P 有一个确定的元数 $n \geqslant 1$，称 P 为 n 元关系符号．每一函数符号 F 有一个确定的元数 $m \geqslant 1$，称 F 为 m 元关系符号．

设 $\mathscr{L}$ 为一语言．为了定义 $\mathscr{L}$ 中的(一阶的)合式公式，我们引入下列逻辑符号：

括号　(,)；

(个体)变量 $v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots\cdots$($n$ 为自然数)；

连接词　$\wedge$(与)，$\neg$(非)；

量词　$\forall$(对一切)；

以及一个 2 元关系符号 $\equiv$(等号)．(我们约定，$\mathscr{L}$ 中不包含这些符号．)

$\mathscr{L}$ 中的**项**定义如下：(i) 变量是项．(ii) 常量符号是项．(iii)若 $t_1, \cdots, t_m$ 是项，而 F 是一个 m 元函数符号，则 $F(t_1 \cdots t_m)$ 是项．

$\mathscr{L}$ 中的**原子公式**定义如下：(i) 若 t_1, t_2 是项，则 $t_1 \equiv t_2$ 是原子公式．(iii) 若 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，而 P 是一个 n 元关系符号，则 $P(t_1 \cdots t_n)$ 是原子公式．

$\mathscr{L}$ 中的**合式公式**(或称**公式**，表达式)定义如下：(i) 原子公式是合式公式．(ii) 若 φ 和 ψ 是合式公式，则$(\varphi \wedge \psi)$和$(\neg \varphi)$是合式公式．(iii) 若 φ 是合式公式而 x 是变量；则 $(\forall x)\varphi$ 是合式公式．

以上是 $\mathscr{L}$ 中合式公式的正式定义（它是形式语言中的精确概念)，但在对 $\mathscr{L}$ 中合式公式进行数学讨论时，为了方便，可以引

入一些简记法．例如可以省略一些括号． 又如可以用 $(\varphi\vee\psi)$，$(\varphi\rightarrow\psi)$，$(\varphi\leftrightarrow\psi)$，$(\exists x)\varphi$ 分别代表 $\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$，$(\neg\varphi)\vee\psi$，$(\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi)$，$\neg(\forall x)\neg\varphi$．

对于 $\mathscr{L}$ 中的公式 φ，可以按照通常方式定义其中变量的自由出现及约束出现，以及 φ 中的自由变量，约束变量．不含自由变量的公式特称为 $\mathscr{L}$ 中的**语句**．

如果一个项 t 中出现的自由变量都属于集合 $\{x_0,\cdots,x_n\}$（但 $x_0,\cdots,x_n$ 未必都在 t 中出现），则 t 也可记作 $t(x_0\cdots x_n)$．如果一个公式 φ 中的自由变量都属于集合 $\{x_0,\cdots,x_n\}$，则 φ 也可记作 $\varphi(x_0,\cdots,x_n)$．

语言 $\mathscr{L}$ 的幂或基数 $\|\mathscr{L}\|$ 定义为 $|\mathscr{L}|+\omega$．其中，$|\mathscr{L}|$ 为集合 $\mathscr{L}$ 的基数，ω 为自然数集的基数．（容易看出，$\|\mathscr{L}\|$ 就是 $\mathscr{L}$ 中合式公式的个数，也是 $\mathscr{L}$ 中语句的个数．）

设 $\mathscr{L}$ 为一语言．我们来考虑 $\mathscr{L}$ 在数学中的解释．

设 A 是一个非空集合．如果对于 $\mathscr{L}$ 中每一个关系符号 P（设为 n 元的）都有 A 上一个指定的关系 R（也是 n 元的）来解释它；对于 $\mathscr{L}$ 中每一个函数符号 F（设为 m 元的）都有 A 上一个指定的（全）函数 G（也是 m 元的）来解释它；对于 $\mathscr{L}$ 中每一个常量符号 c，都有 A 中一个指定的元素 a 来解释它；这样就构成了在 A 中对于 $\mathscr{L}$ 的一个解释 $\mathscr{I}$．（$\mathscr{I}$ 可以看作是由 $\mathscr{L}$ 中符号到 A 上的一些关系、函数及 A 中一些元素的映射．）（注意：不同的符号可以有相同的解释．）

$\mathfrak{A}=(A,\mathscr{I})$ 可以看作一种数学体系，称为语言 $\mathscr{L}$ 的一个**模型**（或称**结构**）．A 称为 $\mathfrak{A}$ 的论域．A 的基数 $|A|$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的基数或幂．（一般，我们把模型 $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\cdots,\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\cdots\cdots$ 的论域分别记为 $A,B,C,\cdots,A_1,A_2,\cdots\cdots$．）

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 是同一语言 $\mathscr{L}$ 的两个模型． 如果存在一个由 $\mathfrak{A}$ 的论域 A 到 $\mathfrak{A}'$ 的论域 A' 上的 1-1 映射 f 适合下列条件 (i)，(ii)，(iii)，则称 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 是**同构的**，记作 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{A}'$．条件是：

(i) 对 $\mathscr{L}$ 中每一 n 元关系符号 P，设它在 $\mathfrak{A}$ 及 $\mathfrak{A}'$ 中的解释

各为R及R',则对A中每一n元组(指n元序列,序列中可以有重复的元)$a_1,\cdots,a_n$都有:$R(a_1\cdots a_n)$真当且只当$R'(f(a_1)\cdots f(a_n))$真.

(ii) 对$\mathscr{L}$中每一m元函数符号F,设它在$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{A}'$中的解释各为G及G',则对A中每一m元组$a_1,\cdots,a_m$都有:$f(G(a_1\cdots a_m))=G'(f(a_1)\cdots f(a_m))$.

(iii) 对$\mathscr{L}$中每一常量符号c,设它在$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{A}'$中的解释各为a及a',则有:$f(a)=a'$.

如上的f,称为由$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}'$上的一个**同构对应**,记作$f:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{A}'$.

如果对上述的f去掉"1 - 1"的条件及(i)中"当且"二字,则称f为由$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}'$上的一个**同态对应**.这时$\mathfrak{A}'$称为$\mathfrak{A}$的一个同态象.

设$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{A}'$是同一语言$\mathscr{L}$的两个模型.如果$A'\subseteq A$并且适合下列条件(i),(ii),(iii),则称$\mathfrak{A}'$为$\mathfrak{A}$的**子模型**,也称$\mathfrak{A}$为$\mathfrak{A}'$的**扩张(模型)**,记作$\mathfrak{A}'\subseteq\mathfrak{A}$.条件是:

(i) 对$\mathscr{L}$中每一n元关系符号P,设它在$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{A}'$中的解释各为R及R',则对A'中每一n元组$a_1,\cdots,a_n$都有:$R'(a_1\cdots a_n)$真当且只当$R(a_1\cdots a_n)$真.

(ii) 对$\mathscr{L}$中每一m元函数符号F,设它在$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{A}'$中的解释各为G及G',则对A'中每一m元组$a_1,\cdots,a_m$都有:$G'(a_1\cdots a_m)=G(a_1\cdots a_m)$.

(iii) 对$\mathscr{L}$中每一常量符号c,设它在$\mathfrak{A}$及$\mathfrak{A}'$中的解释各为a及a',则有:$a=a'$.

设语言$\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}_1$.我们称$\mathscr{L}_1$为$\mathscr{L}$的膨胀,称$\mathscr{L}$为$\mathscr{L}_1$的归约.如果$\mathfrak{A}_1=(A,\mathscr{I}_1)$是$\mathscr{L}_1$的模型,则当由$\mathscr{I}_1$中略去对$\mathscr{L}_1\setminus\mathscr{L}$(\表示集合差)中符号的解释后,可得一个对于$\mathscr{L}$的解释$\mathscr{I}$.我们称$\mathscr{L}$的模型$\mathfrak{A}=(A,\mathscr{I})$为$\mathfrak{A}_1$在$\mathscr{L}$中的**归约**,也称$\mathfrak{A}_1$为$\mathfrak{A}$在$\mathscr{L}_1$中的**膨胀**.(注意区分模型的膨胀与模型的扩张这两个不同的概念.)

设$\mathfrak{A}$是语言$\mathscr{L}$的模型,$\varphi(x_0\cdots x_n)$是$\mathscr{L}$中的公式,其自由变量都在$x_0,\cdots,x_n$中.对于A中的任一$n+1$元组$a_0,\cdots,a_n$,

下面将定义 $a_0,\cdots,a_n$ 在 $\mathfrak{A}$ 中是否"适合 φ"的概念. 由于技术性的原因, 我们将暂时把记号 $\varphi(x_0\cdots x_n)$ 理解为: φ 中的自由变量及约束变量都在 $x_0,\cdots,x_n$ 中. 这主要是为了在命题 1·0 的证明中比较方便. 在给出了该命题之后,我们再回到对 $\varphi(x_0\cdots x_n)$ 的通常理解. (即: 只要求 φ 的自由变量都在 $x_0,\cdots,x_n$ 中.)

设 $\mathfrak{A}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型. 对于 $\mathscr{L}$ 中的项 $t(x_0\cdots x_n)$ 及 A 中的 $n+1$ 元组 $a_0,\cdots,a_n$, 我们归纳地定义 t 在 $a_0,\cdots,a_n$ 处的值 $t[a_0\cdots a_n]$ 如下:

(i) 若 $t=v_i$, 则 $t[a_0\cdots a_n]=a_i$.

(ii) 若 t 是一常量符号 c,则 $t[a_0\cdots a_n]$ 为 c 在 $\mathfrak{A}$ 中的解释 a.

(iii) 若 $t=F(t_1\cdots t_m)$,而 F 在 $\mathfrak{A}$ 中的解释为 G, 则 $t[a_0\cdots a_n]=G(t_1[a_0\cdots a_n]\cdots t_m[a_0\cdots a_n])$.

设 $\mathfrak{A}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型,$\varphi(x_0\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的公式,其自由变量及约束变量都在 $x_0,\cdots,x_n$ 中. 对于 A 中的任一 $n+1$ 元组 $a_0,\cdots,a_n$,我们归纳地定义"$a_0,\cdots,a_n$ 在 $\mathfrak{A}$ 中适合 $\varphi(x_0\cdots x_n)$"(记作 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$)这一概念如下:

(i) 若 φ 为 $t_1(x_0\cdots x_n)\equiv t_2(x_0\cdots x_n)$, 则: $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$ 当且只当 $t_1[a_0\cdots a_n]=t_2[a_0\cdots a_n]$.

(ii) 若 φ 为 $P(t_1(x_0\cdots x_n)\cdots t_m(x_0\cdots x_n))$,则: $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$ 当且只当 $R(t_1[a_0\cdots a_n]\cdots t_m[a_0\cdots a_n])$ 真. (其中 R 为 P 在 $\mathfrak{A}$ 中的解释.)

(iii) 若 φ 为 $\theta_1(x_0\cdots x_n)\wedge\theta_2(x_0\cdots x_n)$, 则: $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$ 当且只当"$\mathfrak{A}\models\theta_1[a_0\cdots a_n]$ 并且 $\mathfrak{A}\models\theta_2[a_0\cdots a_n]$".

(iv) 若 φ 为 $\neg\theta(x_0\cdots x_n)$, 则: $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$ 当且只当 $\mathfrak{A}\models\theta[a_0\cdots a_n]$ 不成立.

(v) 若 φ 为 $(\forall x_i)\phi(x_0\cdots x_n)$, $(i\leqslant n)$,则: $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$ 当且只当对每一 $a\in A$ 都有 $\mathfrak{A}\models\phi[a_0\cdots a_{i-1}aa_{i+1}\cdots a_n]$.

命题 1.0 设 $\mathfrak{A}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型.

(i) 设 $t(x_0\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项，$a_0,\cdots,a_r(r\geqslant n)$ 及 $b_0,\cdots,b_s(s\geqslant n)$ 是 A 中的元素序列，适合：若 x_i 在 t 中出现，则 $a_i=b_i$. 在此条件下，有：

$$t[a_0\cdots a_r]=t[b_0\cdots b_s].$$

(ii) 设 $\mathscr{L}$ 中公式 φ 的自由变量及约束变量都在 $x_0,\cdots,x_n$ 中，又设 $a_0,\cdots,a_r(r\geqslant n)$ 及 $b_0,\cdots,b_s(s\geqslant n)$ 是 A 中的元素序列，适合：若 x_i 是 φ 中的自由变量，则 $a_i=b_i$. 在此条件下，有：

$$\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_r] \text{ 当且只当 } \mathfrak{A}\models\varphi[b_0\cdots b_s].$$

证明 对于 (i) 及 (ii)，可以分别按项或公式的定义步骤进行归纳证明. 繁而不难，略去.

设 $\mathfrak{A}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型，$\varphi(x_0\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的公式，其自由变量都在 $x_0,\cdots,x_n$ 中，其约束变量都在 $x_0,\cdots,x_r$ $(r\geqslant n)$ 中. 对于 A 中的元素序列 $a_0,\cdots,a_n$，如果存在 A 中的元素序列 $a_{n+1},\cdots,a_r$，能使 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_r]$ 成立，则称 $a_0,\cdots,a_n$ 在 $\mathfrak{A}$ 中适合 $\varphi(x_0\cdots x_n)$，记作 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$. (由命题 1.0 可知，这一定义与 $a_{n+1},\cdots,a_r$ 的取法无关.) 特别地，当 φ 是 $\mathscr{L}$ 中的语句时，若存在 A 中的元素序列 $a_0,\cdots,a_r$，能使 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_r]$ 成立，则称 $\mathfrak{A}$ 适合 φ，记作 $\mathfrak{A}\models\varphi$.

设 $\varphi(x_0\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中一个公式. 如果对于 $\mathscr{L}$ 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 及 A 中每一个 $n+1$ 元组 $a_0,\cdots,a_n$，都有 $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0\cdots a_n]$，则称 $\varphi(x_0\cdots x_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中一个恒真公式（或永真公式）. 当恒真公式 φ 为语句时，称为 $\mathscr{L}$ 中的恒真语句(或永真语句).

设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 中一个语句集，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个模型. 如果对每一 $\sigma\in\Sigma$ 都有 $\mathfrak{A}\models\sigma$，则记作 $\mathfrak{A}\models\Sigma$. 并称 $\mathfrak{A}$ 是 Σ 的一个**模型**.

设 Σ 是 $\mathscr{L}$ 中一个语句集，σ 是 $\mathscr{L}$ 中一个语句. 如果对于 Σ 的每一模型 $\mathfrak{A}$ 都有 $\mathfrak{A}\models\sigma$，则称 σ 是 Σ 的一个属性，记作 $\Sigma\models\sigma$. (特别地，若 Σ 为空集，则把 $\Sigma\models\sigma$ 简记作 $\models\sigma$. 这样的 σ 也就是上面所说的恒真语句.)

设 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{L}$ 的两个模型. 如果对于 $\mathscr{L}$ 中每一语句 σ 都

有：$\mathfrak{A}\models\sigma$ 当且只当 $\mathfrak{B}\models\sigma$. 则称 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是**初等等价**的，记作 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$.

命题 1.1 设 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 是语言 $\mathscr{L}$ 的模型.

(i) 如果 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$,则 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$.

(ii) 如果 $\mathfrak{A}$ 是有限模型（指：A 是有限集），并且 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$,则 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

证明 1.(i) 的证明思路很直接.（详述时，可按 $\mathscr{L}$ 中公式的结构作归纳论证.）

2. 现在概述 (ii) 的证明思路.

2.1. 当 $\mathscr{L}$ 有限时. $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 各只有有限多个关系、函数及解释常量符号的元素(以下称特指元素). 这时可以用 $\mathscr{L}$ 中一个语句完整地表达 $\mathfrak{A}$ 的元素个数,诸关系表,运算表及特指元素，从而，由 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ 易见,有 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.

2.2. 当 $\mathscr{L}$ 无限时,由 $\mathfrak{A}$ 有限及 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ 易知,$\mathfrak{B}$ 有限且二者的论域 A,B 元数相同. 从而，由 A 到 B 上只有有限多个不同的 1-1 对应,设为 $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_r$.

假若 $\mathfrak{A}\ncong\mathfrak{B}$,则对于每个 $\tau_i(0\leqslant i\leqslant r)$,有 $\mathscr{L}$ 中(至少)一个符号 s_i (不论为何种符号)使 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 中对于 s_i 的相应解释在 τ_i 下不保持. 令 $\mathscr{L}_1=\{s_0,\cdots,s_r\}(\subseteq\mathscr{L})$, 并令 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 在 $\mathscr{L}_1$ 中的归约各为 $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{B}_1$. 由 $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ 易见,有 $\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{B}_1$,从而由 2.1. 知,存在由 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{B}_1$ 的同构对应 ρ. ρ 为由 A 到 B 上的 1-1 对应并且保持 $s_0,\cdots,s_r$. 所以 $\rho\neq\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_r$. 此为矛盾. 故必 $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}$.（证毕）

设 $\mathscr{L}$ 为一语言. 现在,给出关于 $\mathscr{L}$ 中某些公式的一个形式推演系统 Π. 可以证明，Π 是关于 $\mathscr{L}$ 中恒真公式的形式推演系统,也就是 $\mathscr{L}$ 中的一阶谓词演算.

Π 的公理分为三组:

命题公理 如果 $\mathscr{L}$ 中的公式 φ 能看作是由命题演算中一个恒真公式经过把命题变元代换为 $\mathscr{L}$ 中公式而得到的，则 φ 是 Π 的一个命题公理.

量词公理

(i) 若φ和ψ是（$\mathscr{L}$ 中的）公式，而变量x不在φ中自由出现，则 $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$ 是Π的公理.

(ii) 若φ和ψ是（$\mathscr{L}$ 中的）公式，而ψ是经过用项t自由地代换变量x在φ中的每一自由出现而得到的.（“自由地”代换是指：对每一个这样引入ψ中的t而言，t中每一变量y在ψ中都是自由出现的.）则 $(\forall x)\varphi \to \psi$ 是Π的公理.

等词公理 设x, y是变元，$t(x_0 \cdots x_n)$ 是项，$\varphi(x_0 \cdots x_n)$是原子公式. 则:

$$x \equiv x;$$

$$x \equiv y \to t(x_0 \cdots x_{i-1} x x_{i+1} \cdots x_n) \equiv t(x_0 \cdots x_{i-1} y x_{i+1} \cdots x_n);$$

$$x \equiv y \to (\varphi(x_0 \cdots x_{i-1} x x_{i+1} \cdots x_n) \to \varphi(x_0 \cdots x_{i-1} y x_{i+1} \cdots x_n))$$

是Π的公理.

Π的推演规则有两条:

分离规则: 由φ和$\varphi \to \psi$推出ψ.

推广规则: 由φ推出$(\forall x)\varphi$.

以上给出了Π的公理及推演规则. 然后就可按照通常方式引入Π中的(形式)定理,(形式)证明等概念.

设φ是$\mathscr{L}$ 中的公式,以$\vdash \varphi$表示: φ是Π中的定理（也称为$\mathscr{L}$ 中的定理).

设Σ是由$\mathscr{L}$ 中语句构成的任一集合，φ是$\mathscr{L}$ 中的公式，以$\Sigma \vdash \varphi$表示：由Σ及Π的公理，用Π的推演规则，可以推出φ.（简称：由Σ可推出φ.）

由$\mathscr{L}$ 中语句构成的任一集合Σ也称为$\mathscr{L}$ 中的一个**理论**.如果$\mathscr{L}$ 中每一公式都能由Σ推出，则称理论Σ是不和谐的，否则称Σ是**和谐**的. 如果理论Σ是和谐的，而$\mathscr{L}$ 中任何真包括Σ的理论都不再是和谐的，则称Σ是**极大和谐**的.

命题 1.2 设Σ是$\mathscr{L}$ 中的理论.

(i) Σ是和谐的当且只当Σ的每一有限子集都是和谐的.

(ii)（演绎定理）设σ为$\mathscr{L}$ 中的语句，τ为$\mathscr{L}$ 中的公式，则：$\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau$ 当且只当 $\Sigma \vdash \sigma \to \tau$.

(iii) 设σ为 $\mathscr{L}$ 中的语句，则：$\Sigma\cup\{\sigma\}$不和谐当且只当$\Sigma\vdash\neg\sigma$.

(iv) 若Σ是极大和谐的，则对 $\mathscr{L}$ 中任何语句σ，τ都有：$\Sigma\vdash\sigma$当且只当 $\sigma\in\Sigma$；$\sigma\wedge\tau\in\Sigma$ 当且只当"$\sigma\in\Sigma$ 且 $\tau\in\Sigma$"；$\neg\sigma\in\Sigma$当且只当 $\sigma\notin\Sigma$.

证明 甚易，略去.

命题 1.3 (Lindenbaum 定理) $\mathscr{L}$ 中每一个和谐的理论Σ都能扩张为一个极大和谐的理论.

证明 把 $\mathscr{L}$ 中全部语句任依一方式排为良序集（由选择公理知此可能），设其序型为 α:

$$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_\beta,\cdots\cdots\qquad(\beta<\alpha).$$

我们由Σ开始，作一系列递增的和谐理论：

$$\Sigma=\Sigma_0\subseteq\Sigma_1\subseteq\Sigma_2\subseteq\cdots\subseteq\Sigma_\beta\subseteq\cdots\cdots(\beta<\alpha).$$

作法如下：

1. 令 $\Sigma_0=\Sigma$.

2. 对任何 $\beta<\alpha$，设对一切序数 $\delta<\beta$，Σ_δ 都已有定义且和谐. 现在据此定义 Σ_β.

2.1. 当β为后继序数$\gamma+1$时. 若 $\Sigma_\gamma\cup\{\varphi_\gamma\}$和谐，令 $\Sigma_\beta=\Sigma_\gamma\cup\{\varphi_\gamma\}$；否则令 $\Sigma_\beta=\Sigma_\gamma$.

2.2. 当β为极限序数时，令 $\Sigma_\beta=\bigcup\limits_{\delta<\beta}\Sigma_\delta$.（由诸$\Sigma_\delta$和谐及其随$\delta$递增易知，$\Sigma_\beta$和谐.）

理论系列 $\Sigma_\beta(\beta<\alpha)$ 的归纳定义至此完成.

令 $\Gamma=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\Sigma_\beta$. 现在证明，$\Gamma$为极大和谐理论.

假若Γ不和谐，则由命题 1.2 知，存在Γ的有限子集Γ_1不和谐. 由 $\Gamma_1\subseteq\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\Sigma_\beta$ 及Γ_1有限及诸Σ_β递增可知，存在 $\beta_1<\alpha$ 使 $\Gamma_1\subseteq\Sigma_{\beta_1}$，从而$\Sigma_{\beta_1}$不和谐，与$\Sigma_{\beta_1}$的定义矛盾. 所以$\Gamma$和谐.

假若存在 $\mathscr{L}$ 中的和谐理论Δ适合$\Gamma\subseteq\Delta$且 $\Gamma\neq\Delta$，则存在 $\mathscr{L}$ 中语句$\varphi\in\Delta$而$\varphi\notin\Gamma$. 设φ在上述良序中为 $\varphi_\xi(\xi<\alpha)$. 则

$\Sigma_\xi \cup \{\varphi_\xi\}$为$\Delta$的子集，故为和谐。从而由 2 知，$\Sigma_{\xi+1} = \Sigma_\xi \cup \{\varphi_\xi\}$，从而 $\varphi_\xi \in \Gamma$，与上述的$\varphi \notin \Gamma$矛盾。所以，上述的Δ不存在。再由上段即知，Γ是 $\mathscr{L}$ 中的极大和谐理论。（证毕）