

高等学校教材

# 高等数学

第四版 上册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

高等教育出版社

高等学校教材

# 高等数学

第四版 上册

同济大学数学教研室 主编

高等教育出版社

11.10.02

**(京)112号**

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学 上册/同济大学数学教研室主编. —4版.  
—北京:高等教育出版社,(1998重印).

ISBN 7-04-005803-0

I. 高… II. 同… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 09305 号

\*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

高等教育出版社印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 16.25 字数 410 000

1978 年 3 月第 1 版

1996 年 12 月第 4 版 1998 年 4 月第 5 次印刷

印数 386 149—476 158

定价 14.50 元

凡购买高等教育出版社的图书,如遇缺页、倒页、脱页等  
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

**版权所有,不得翻印**

## 内 容 提 要

本书第四版是在全国高校工科数学课程教学指导委员会指导下,遵照国家教委“对质量较高,基础较好,使用面较广的教材要进行锤炼”的精神,并结合修订的《高等数学课程教学基本要求》在第三版的基础上修改成的。这次修改广泛吸取了全国同行的意见,从教学角度出发进行仔细推敲,改写了一些重要概念的论述,调整了习题的配置,每章增加总习题,使内容和系统更加完整,也便于教学。

本书分上、下两册出版。上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等七章,书末还附有二、三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。

本书仍保持了第三版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、便于自学等优点,又在保证教学基本要求的前提下,扩大了适应面,增强了伸缩性,供高等工科院校不同专业的学生使用。

## 第四版前言

关于本书的修订问题,全国高校工科数学课程教学指导委员会曾于1992年5月的工作会议上进行了讨论,与会代表们希望本书修改后能更加适应大多数院校的需要,这也正是我们的愿望.因此,我们在修订时,对不标\*号的部分,注意控制其深广度,以期使它尽量符合高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》;同时仍保留标\*号的内容,这些内容都是超出《基本要求》的,可供对数学要求稍高的专业采用.

兄弟院校的同行,对本书此次修订也提出了不少具体意见,修订时我们都作了认真考虑.在此,我们对课委会及同行们表示衷心的感谢.齐植兰、赵中时、谢树艺三位教授审阅了本书第四版稿,并提出不少宝贵意见,对此我们表示感谢.

本版在每章末增加了总习题,希望这些总习题在检查学习效果以及复习方面能发挥作用.

本书中用到二、三阶行列式的一些知识,部分读者由于阅读本书前尚未学过这方面的内容,因而产生学习上的困难.为此,本版上册增加了一个附录,用尽可能少的篇幅介绍有关二、三阶行列式的一些简单知识.

本书从第二版起的修订工作均由同济大学承担.第二版修订工作的正文部分由王福檀、邱伯驹完成,习题部分由宣耀焕、郭镜明、黄忠湛、王章炎完成.参加第三版修订工作的有王福檀、邱伯驹、骆承钦、王章炎.参加第四版修订工作的有王福檀、邱伯驹、骆承钦.

编 者

一九九三年十二月

• 1 •

## 第一版前言

本书分上、下两册.上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数,下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论.各章配有习题,书末附有习题答案.

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书.

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驹,上海交通大学王嘉善,上海纺织工学院巫锡禾,上海科技大学蔡天亮,上海机械学院王敦珊、周继高,上海铁道学院李鸿祥等同志.

本书由上海海运学院陆子芬教授主审.参加审稿的还有大连工学院刘锡琛,合肥工业大学万迪生、何继文,成都电讯工程学院冯潮清,西北工业大学王德如,浙江大学盛骤、孙玉麟,太原工学院徐永源、张宝玉,上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志.

审稿同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢.

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正.

编者

一九七八年三月

责任编辑	郭思旭
封面设计	王  睢
责任绘图	陈玉珍
版式设计	马静如
责任校对	许月萍
责任印制	杨  明

# 目 录

第四版前言	1
第一版前言	2
第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合 常量与变量(1) 二、函数概念(5) 三、函数的几种特性(10) 四、反函数(13) 习题 1-1(16)	
第二节 初等函数	18
一、幂函数(18) 二、指数函数与对数函数(19) 三、三角函数与反三角函数(20) 四、复合函数 初等函数(24) 五、双曲函数与反双曲函数(26) 习题 1-2(31)	
第三节 数列的极限	33
习题 1-3(42)	
第四节 函数的极限	42
一、自变量趋于有限值时函数的极限(43) 二、自变量趋于无穷大时函数的极限(48) 习题 1-4(50)	
第五节 无穷小与无穷大	50
一、无穷小(50) 二、无穷大(52) 习题 1-5(54)	
第六节 极限运算法则	55
习题 1-6(63)	
第七节 极限存在准则 两个重要极限	64
* 柯西(Cauchy)极限存在准则(70) 习题 1-7(71)	
第八节 无穷小的比较	71
习题 1-8(74)	
第九节 函数的连续性与间断点	74
一、函数的连续性(74) 二、函数的间断点(78) 习题 1-9(80)	



第十节	连续函数的运算与初等函数的连续性	81
	一、连续函数的和、积及商的连续性(81) 二、反函数与复合函数的连续性(82) 三、初等函数的连续性(84) 习题 1—10(85)	
第十一节	闭区间上连续函数的性质	86
	一、最大值和最小值定理(86) 二、介值定理(88) *三、一致连续性(89) 习题 1—11(91)	
	总习题一	91
<b>第二章</b>	<b>导数与微分</b>	94
第一节	导数概念	94
	一、引例(94) 二、导数的定义(96) 三、求导数举例(99) 四、导数的几何意义(102) 五、函数的可导性与连续性的关系(104) 习题 2—1(105)	
第二节	函数的和、差、积、商的求导法则	107
	习题 2—2(110)	
第三节	反函数的导数 复合函数的求导法则	112
	一、反函数的导数(112) 二、复合函数的求导法则(114) 习题 2—3(118)	
第四节	初等函数的求导问题 双曲函数与反双曲函数的导数	119
	一、初等函数的求导问题(119) 二、双曲函数与反双曲函数的导数(120) 习题 2—4(121)	
第五节	高阶导数	122
	习题 2—5(126)	
第六节	隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	127
	一、隐函数的导数(127) 二、由参数方程所确定的函数的导数(132) *三、曲线的切线与切点和极点的连线间的夹角(136) 四、相关变化率(138) 习题 2—6(138)	
第七节	函数的微分	140
	一、微分的定义(140) 二、微分的几何意义(144) 三、基本	

初等函数的微分公式与微分运算法则(145) 习题 2-7(148)	
第八节 微分在近似计算中的应用 .....	149
习题 2-8(154)	
总习题二 .....	156
<b>第三章 中值定理与导数的应用</b> .....	<b>158</b>
第一节 中值定理 .....	158
一、罗尔定理(158) 二、拉格朗日中值定理(160) 三、柯西 中值定理(164) 习题 3-1(166)	
第二节 洛必达法则 .....	167
习题 3-2(171)	
第三节 泰勒公式 .....	172
习题 3-3(177)	
第四节 函数单调性的判定法 .....	178
习题 3-4(182)	
第五节 函数的极值及其求法 .....	183
习题 3-5(189)	
第六节 最大值、最小值问题 .....	190
习题 3-6(194)	
第七节 曲线的凹凸与拐点 .....	195
习题 3-7(200)	
第八节 函数图形的描绘 .....	201
习题 3-8(206)	
第九节 曲率 .....	207
一、弧微分(207) 二、曲率及其计算公式(208) 三、曲率圆 与曲率半径(213) *四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸 线(214) 习题 3-9(217)	
第十节 方程的近似解 .....	218
一、二分法(219) 二、切线法(221) 习题 3-10(223)	
总习题三 .....	223
<b>第四章 不定积分</b> .....	<b>226</b>

第一节 不定积分的概念与性质 .....	226
一、原函数与不定积分的概念(226) 二、基本积分表(231)	
三、不定积分的性质(233) 习题 4-1(236)	
第二节 换元积分法 .....	237
一、第一类换元法(237) 二、第二类换元法(245) 习题 4-2(252)	
第三节 分部积分法 .....	254
习题 4-3(258)	
第四节 几种特殊类型函数的积分 .....	259
一、有理函数的积分(259) 二、三角函数有理式的积分(265)	
三、简单无理函数的积分(267) 习题 4-4(268)	
第五节 积分表的使用 .....	269
习题 4-5(272)	
总习题四 .....	272
<b>第五章 定积分</b> .....	<b>274</b>
第一节 定积分概念 .....	274
一、定积分问题举例(274) 二、定积分定义(277) 习题 5-1(281)	
第二节 定积分的性质 中值定理 .....	282
习题 5-2(286)	
第三节 微积分基本公式 .....	287
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(287)	
二、积分上限的函数及其导数(288) 三、牛顿-莱布尼茨公式(290) 习题 5-3(294)	
第四节 定积分的换元法 .....	296
习题 5-4(302)	
第五节 定积分的分部积分法 .....	303
习题 5-5(306)	
第六节 定积分的近似计算 .....	306
一、矩形法(307) 二、梯形法(308) 三、抛物线法(310)	

习题 5-6(314)	
第七节 广义积分 .....	314
一、无穷限的广义积分(315) 二、无界函数的广义积分(318)	
习题 5-7(320)	
* 第八节 广义积分的审敛法 $\Gamma$ -函数 .....	321
一、无穷限的广义积分的审敛法(321) 二、无界函数的广义	
积分的审敛法(326) 三、 $\Gamma$ -函数(328) * 习题 5-8(330)	
总习题五 .....	331
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	334
第一节 定积分的元素法 .....	334
第二节 平面图形的面积 .....	337
一、直角坐标情形(337) 二、极坐标情形(340) 习题 6-2	
(342)	
第三节 体积 .....	344
一、旋转体的体积(344) 二、平行截面面积为已知的立体的	
体积(348) 习题 6-3(350)	
第四节 平面曲线的弧长 .....	351
一、平面曲线弧长的概念(351) 二、直角坐标情形(352) 三、	
参数方程情形(354) 四、极坐标情形(355) 习题 6-4(356)	
第五节 功 水压力和引力 .....	357
一、变力沿直线所作的功(357) 二、水压力(360) 三、引	
力(361) 习题 6-5(362)	
第六节 平均值 .....	364
一、函数的平均值(364) 二、均方根(366) 习题 6-6(367)	
总习题六 .....	368
<b>第七章 空间解析几何与向量代数</b> .....	370
第一节 空间直角坐标系 .....	370
一、空间点的直角坐标(370) 二、空间两点间的距离(372)	
习题 7-1(374)	
第二节 向量及其加减法 向量与数的乘法 .....	375

一、向量概念(375)	二、向量的加减法(376)	三、向量与数的乘法(378)	习题 7-2(380)		
第三节	向量的坐标	.....	381		
一、向量在轴上的投影(381)	二、向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标(385)	三、向量的模与方向余弦的坐标表示式(389)	习题 7-3(391)		
第四节	数量积 向量积 *混合积	.....	392		
一、两向量的数量积(392)	二、两向量的向量积(396)	*三、向量的混合积(400)	习题 7-4(402)		
第五节	曲面及其方程	.....	403		
一、曲面方程的概念(403)	二、旋转曲面(406)	三、柱面(408)	习题 7-5(410)		
第六节	空间曲线及其方程	.....	411		
一、空间曲线的一般方程(411)	二、空间曲线的参数方程(412)	三、空间曲线在坐标面上的投影(414)	习题 7-6(416)		
第七节	平面及其方程	.....	417		
一、平面的法式方程(417)	二、平面的一般方程(418)	三、两平面的夹角(420)	习题 7-7(423)		
第八节	空间直线及其方程	.....	424		
一、空间直线的一般方程(424)	二、空间直线的对称式方程与参数方程(424)	三、两直线的夹角(427)	四、直线与平面的夹角(428)	五、杂例(429)	习题 7-8(431)
第九节	二次曲面	.....	432		
一、椭球面(433)	二、抛物面(434)	三、双曲面(437)	习题 7-9(439)		
总习题七	.....		439		
附录 I	二阶和三阶行列式简介	.....	442		
附录 II	几种常用的曲线	.....	447		
附录 III	积分表	.....	452		
习题答案与提示	.....		463		

# 第一章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则以变量为研究对象.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系.极限方法则是研究变量的一种基本方法.本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

## 第一节 函 数

### 一、集合 常量与变量

1. 集合 集合是数学中的一个基本概念,我们通过例子说明这个概念.比方说,一个书柜中的书构成一个集合,一个教室里的学生构成一个集合,全体实数构成一个集合等等.一般地,所谓集合(或简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体.组成这个集合的事物称为该集合的元素.凡事物  $a$  是集合  $M$  的元素记作  $a \in M$ (读作  $a$  属于  $M$ );事物  $a$  不是集合  $M$  的元素记作  $a \notin M$ (读作  $a$  不属于  $M$ ).

一个集合认为已经给定,如果对于任何事物能够判定它是否属于这个集合.由有限个元素组成的集合,可用列举出它的全体元素的方法来表示.例如,由元素  $a_1, a_2, \dots, a_n$  组成的集合  $A$ ,可记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合,通常用如下记号表示:设  $M$  是具有某种特征的元素  $x$  的全体所组成的集合,就记作

$$M = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}.$$

这里所谓  $x$  所具有的特征,实际上就是  $x$  作为  $M$  的元素应适合的充分必要条件;适合这条件的任何事物都是集合  $M$  的元素;反之,

集合  $M$  的元素都必须适合这条件.

例如,  $xOy$  平面上坐标适合方程  $x^2+y^2=1$  的点  $(x,y)$  的全体组成的集合  $M$ , 可记作

$$M = \{(x,y) | x,y \text{ 为实数}, x^2+y^2=1\}.$$

这个集合  $M$  实际上就是  $xOy$  平面上以原点  $O$  为中心、半径等于 1 的圆周上的点的全体组成的集合.

以后用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 如果没有特别声明, 以后提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作  $\mathbb{N}$ . 全体整数的集合记作  $\mathbb{Z}$ . 全体有理数的集合记作  $\mathbb{Q}$ . 全体实数的集合记作  $\mathbb{R}$ .

如果集合  $A$  的元素都是集合  $B$  的元素, 即若  $x \in A$ , 则必  $x \in B$ , 就说  $A$  是  $B$  的子集, 记作  $A \subset B$  (读作  $A$  包含于  $B$ ) 或  $B \supset A$  (读作  $B$  包含  $A$ ). 例如,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

如果  $A \subset B$ , 且  $B \subset A$ , 就称集合  $A$  与  $B$  相等, 记作  $A=B$ . 例如, 设

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 1\}, C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则  $A=B=C$ .

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x | x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$$

是空集, 因为适合条件  $x^2+1=0$  的实数是不存在的. 空集记作  $\emptyset$ , 且规定空集为任何集合的子集.

区间是用得较多的一类数集. 设  $a$  和  $b$  都是实数, 且  $a < b$ . 数集

$$\{x | a < x < b\}$$

称为开区间, 记作  $(a,b)$ , 即

$$(a,b) = \{x | a < x < b\}.$$

$a$  和  $b$  称为开区间  $(a,b)$  的端点, 这里  $a \notin (a,b)$ ,  $b \notin (a,b)$ . 数集

$$\{x | a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间, 记作  $[a,b]$ , 即





设  $\delta$  是任一正数, 则开区间  $(a-\delta, a+\delta)$  就是点  $a$  的一个邻域, 这个邻域称为点  $a$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(a, \delta)$ , 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

点  $a$  称为这邻域的中心,  $\delta$  称为这邻域的半径 (图 1-2).

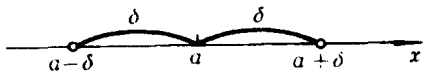


图 1-2

由于  $a-\delta < x < a+\delta$  相当于  $|x-a| < \delta$ , 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

因为  $|x-a|$  表示点  $x$  与点  $a$  间的距离, 所以  $U(a, \delta)$  表示: 与点  $a$  距离小于  $\delta$  的一切点  $x$  的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点  $a$  的  $\delta$  邻域去掉中心  $a$  后, 称为点  $a$  的 去心的  $\delta$  邻域, 记作  $\dot{U}(a, \delta)$ , 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

这里  $0 < |x-a|$  就表示  $x \neq a$ .

2. **常量与变量** 在观察自然现象或技术过程时, 常常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中不起变化, 也就是保持一定的数值, 这种量叫做常量; 还有一些量在过程中是变化着的, 也就是可以取不同的数值, 这种量叫做变量.

例如, 把一个密闭容器内的气体加热时, 气体的体积和气体的分子个数保持一定, 它们是常量; 而气体的温度和压力在变化, 则是变量, 它们取得越来越大的数值.

一个量是常量还是变量, 要根据具体情况作出具体分析. 例如, 就小范围地区来说, 重力加速度可以看作常量, 但就广大地区来说, 重力加速度则是变量.

通常用字母  $a, b, c$  等表示常量, 用字母  $x, y, t$  等表示变量.

设变量  $x$  所取数值的全体组成数集  $M$ , 那末变量  $x$  也可看作