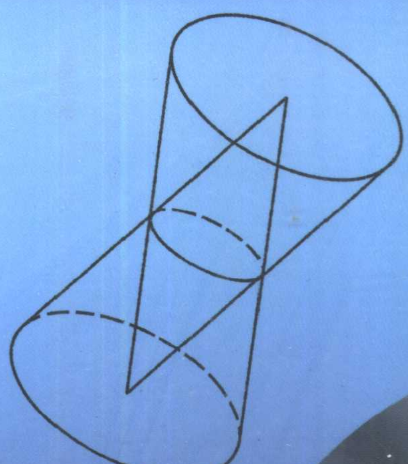
LITI WENTI FANGFA SIXIANG

张家瑞 编著



立体几何

问题·方法·思想

气象出版社

立体几何问题·方法·思想

张家瑞　　编著

气象出版社

内 容 提 要

本书以解题方法为主线，包含了立体几何的基本知识点，对立体几何中的常见问题及其解题方法作详尽深入的梳理、归纳，在介绍每一类问题基本方法的同时，对这些方法作了思想方法上的点评。在理解掌握各种问题求解方法的基础上，最后一章总结了立体几何的解题思想，以此统帅解题的具体方法，并用此基本思想去指导立体几何的学习和解题，使我们的思维能力、空间想象能力提升到更高的水平。

适合广大高中生、中学数学教师及师范院校数学专业的学生。

图书在版编目(CIP)数据

立体几何问题·方法·思想/张家瑞著.—北京:气象出版社,2001.1

ISBN 7-5029-3056-6

Ⅰ.立… Ⅱ.张… Ⅲ.立体几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 81857 号

立体几何问题·方法·思想

张家瑞 编著

责任编辑:俞卫平　　终审:黄润恒　周诗健

封面设计:沈　辉　　责任技编:吴庭芳　　责任校对:王为群

*　　*　　*

气象出版社出版

(北京海淀区中关村南大街 46 号　邮编:100081)

新华书店总店北京发行所发行　　全国各地新华书店经销

北京昌平环球印刷厂印刷

*　　*　　*

开本:787×1092　1/16　印张:13.375　字数:345 千字

2001 年 1 月第一版　　2001 年 1 月第一次印刷

印数:1～5000　　定价:20.00 元

ISBN 7-5029-3056-6/G·0918

序　　言

立体几何是研究空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用的一门学科，而复杂的空间关系，不可能题题作模型，只能通过平面上的图形来观察想象。空间观念的确立，空间想象力的发展，历来是高中立体几何教学中的难点。然而立体几何教学又是这样的重要：除了发展学生空间想象力之外，它还体现了代数、三角、几何知识的综合运用，对以后高等数学是必不可缺的基础。因此，在立体几何教材之外很需要一本辅助读物，这本读物应以教材内容为经线，以解题指导为纬线编织而成，既要有思想理论性，又要有实践性，张家瑞老师的著作《立体几何问题·方法·思想》就是适应这一需要而诞生的一本好书。对中学数学教师、广大高中学生以及师范院校数学专业的学生都有参考价值。

本书的特点是从解题分类入手，使材料归类相对集中，对解题知识方法系统总结，典型例说。比如，解异面直线一节就可以看出作者的精心研究和总结，重点突出，难点化解，关键之处点透“转化”的辩证思想。本书内容是作者多年教学实践经验的结晶，只要读者仔细研读，定会收益不浅的。

全书例题比较全面，习题备配非常丰富，难易比较适当。对数学奥林匹克选手的立体几何基础训练，也有一定的参考价值。

目前国内关于立体几何的专门指导书籍很少见，希望通过本书的出版，能够激起一个浪花，推动立体几何题材及教学的研究和经验总结，能有更多的好作品问世。

周春荔

2000 年 10 月于
首都师范大学

作 者 前 言

立体几何是培养我们空间想象能力最有效的基础课程，立体几何又具有较强的综合性，它熔平面几何、代数、解析几何知识于一炉，立体几何又是学习高等数学的不可缺少的基础学科，但立体几何的学习常使人感到困难，学了几年立体几何仍感到立不起来，习题求解也感困难，不如解平面几何题那样顺手。编写本书的目的正想为学习立体几何的同学提供一个伴读。

本书从立体几何解题分类入手，介绍各种立体几何问题的具体解题方法和理论根据。在此基础上，总结提高归纳介绍立体几何解题通法，即立体几何解题的思想方法。这样的安排基于下列想法：数学思想方法是数学的灵魂，是数学解题的指导思想，但数学思想方法不是无水之源，它是从具体的数学解题方法中提升抽象归纳概括而来的，故它不能代替具体的数学方法，正象哲学原理不能代替物理原理一样。数学思想方法与具体数学方法是相辅相成的。数学思想方法的教学，应是从具体的解题方法教学中逐步抽象归纳，提升概括，积累渗透，这样教学学生易于接受，不会有数学思想方法是好箭，有好箭不会发的感觉，和风细雨地渗透做到润物细无声，使学生自觉地将数学思想方法化为数学素养。

鉴于各种数学题解方法的书籍中对分析法、综合法均有较详尽的论说，故本书中未将这些内容列入。另本想在通法一章中列入“向量法解立体几何问题”的内容，但考虑国内中学数学课本中介绍向量理论只有上海和新编高中试点教材中有，还未在全国推广，故暂不将向量法列入本书，待适当的时候补充进去。习题的答案附在习题后面，证明题不给答案。

本书从第一稿到现在的第三稿已历时 8 年，其间经历了很多的曲折，好不容易才与读者见面。

由于原来联系的出版社未能尽到责任，两度丢失书稿，增加了工作的难度。最后总算找到了气象出版社，我再次付出了所有的休息天、寒暑假，终于又写成了现在出版的第三稿。书已经与读者见面了，以前的事情就让它过去吧。在编写过程中，参阅了大量的文献，吸收了很多同行们的研究成果，在此向这些同行们表示感谢，还有唐柏龄老师为本书的写作提供了资料，首都师范大学周春荔教授在百忙中为本书作序，周诗健老师和俞卫平老师为本书的出版做了大量的努力，这里一并表示深深的谢意。

书中的错误敬请读者指正。

张家瑞

于苏州水香新村五村

2000 年 12 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章　空间直线与平面的位置关系

一、证明点线共面的方法

共面与异面是立体几何中的一对基本矛盾，这里先介绍空间点线共面的判定方法。

1. 直接公理法（公理条文见高中立体几何课本）

以平面性质三条公理及其推论作为主要依据来判定点线共面的方法称为直接公理法。

例 1. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,M,N 分别是它们所在棱的中点，求证 MN 与 EF 两直线共面。

证明：如图 1，设 NM 与 B_1C_1 的延长线交于 P，易知 $\angle D_1MN=\angle PMC_1=\frac{\pi}{4}$，$\angle D_1NM=\angle C_1PM=\frac{\pi}{4}$. $\therefore \triangle C_1MP$ 是等腰直角三角形，$\therefore MC_1=PC_1$

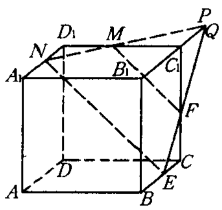


图1

若 EF 与 B_1C_1 延长线交于 Q 点，同理可证 $C_1Q=C_1F$，而 $C_1F=C_1M$，$\therefore C_1P=C_1Q$，易知 P,Q 两点必重合，这便说明 MN,EF 两直线相交于 P 点，$\therefore$这两直线共面。

例 2. 四面体 $S-ABC$ 中，$\angle ASB$，$\angle BSC$ 的平分线 SD 和 SE，$\angle ASC$ 的外角平分线 SF，求证 SE,SD,SF 三射线共面。

证明：如图 2，分两种情况考察。

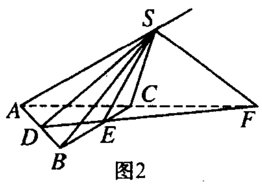


图2

若 $SF/\!/AC$，则可推出$\triangle SAC$ 为等腰三角形，$SA=SC$，又 $AD:DB=SA:SB$，$BE:EC=SB:SC$，两式相乘得 $AD:DB=EC:EB$，$\therefore DE/\!/AC/\!/SF$，$\therefore SD,SE$ 在由 SF 和 DE 确定的平面内，$\therefore SE,SF,SD$ 三射线共面。

若 $SF \not\parallel AC$，由 $AF:FC=SA:SC$，$SA:SB=AD:DB$，$SB:SC=BE:EC$ 可得$(AD\cdot BE\cdot CF):(DB\cdot EC\cdot FA)=1$，又 F 点在 AC 的延长线上，由梅澳劳斯定理的逆定理知 D,E,F 三点共线，$\therefore SD,SE,SF$ 共面于平面 SDF 中。

以上两例均直接证明直线平行或相交，根据平面性质公理证得点线共面。

2. 落入法

根据题设条件，由其中某些点线确定一个平面，再证其他的点或直线均落在此平面内，从而推得所有点线共于一个平面，故称落入法。

应用落入法证题时，除了应用平面确定性公理外，还常用下列结论：

(1)平面 α 内一直线或 α 的平行线，在 α 内任取一点（不在已知直线上）作已知直线的平行线仍在此平面 α 内。(2)过定点作定直线的垂线，则所有垂线共面。(3)直二面角的一个面内任意一点作另一平面的垂线仍在此平面内。

例 1. 已知直线 $a/\!/b/\!/c$，直线 l 与 a,b,c 都相交，求证 a,b,c,l 四直线共面。

证明：如图3，$\because a /\!/ b$，$\therefore a,b$可确定一个平面，记作α。设$l \cap a = A$，$l \cap b = B$，$l \cap c = D$，$\therefore A \in \alpha$，$B \in \alpha$，$D \in \alpha$，$\therefore$直线$l \subset \alpha$。

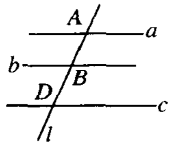


图3

$\because D \in \alpha$，且$c /\!/ \alpha$，$\therefore c \subset \alpha$（结论(1)），$\therefore a,b,c,d$四直线共面。

例2. 平面$\alpha /\!/$平面β，求证α,β内各取任一点连线段的中点都在一个平面内。

证明：如图4，在α内取一点A，β内取B,C,D三点，设AB,AC,AD的中点依次是M,N,P，则$MN /\!/ BC$，$NP /\!/ CD$，$\therefore$平面$MNP /\!/$平面β。

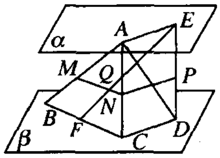


图4

又设α内任一点E，β内任一点F，EF与平面MNP交于Q，根据平行平面组截二直线，对应线段成比例，有$EQ:QF = AM:MB = 1$，$\therefore Q$是EF的中点，由此可知α,β两平面内各任取一点的连线段的中点都在平面MNP内，$\therefore$命题成立。

用落入法证点线共面时，其关键是确定一个平面后，应运用平面性质公理证明其他点线均落在此平面内。

例3. 求证：到线段两端距离相等的点都在同一平面内。

证明：如图5，设P点到线段AB两端的距离$PA = PB$，AB的中点为O，则$PO \perp AB$。这就是说，到线段两端距离相等的点与此线段中点的连线必垂直于此线段，则所有这些垂线都在过O点且与AB垂直的平面内（此平面称作线段的垂直平分面，此中垂面内与AB不相交的直线均叫做线段AB的异面中垂线）。

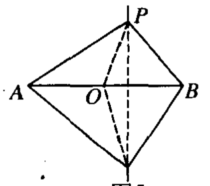


图5

3. 平面重合法

根据已知条件，其中部分点线确定若干个平面，再证这些平面都重合，则所有的点线共面。应用重合法证点线共面的关键在于根据平面性质公理证明若干个平面重合。

(1)利用平面确定性公理及推论判定两平面重合

例1. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G,H,I,J分别是它们所在棱的中点，求证这六个中点共面。

证明：如图6，连结FI，易证$EJ /\!/ FI$，$\therefore EJ$和FI可确定一个平面，记作α，又连结GJ，则$GJ /\!/ EF$，$\therefore GJ$和EF确定一个平面β。但α,β两平面内都含有不共线的三个点E,F,J，过这三点的平面是存在唯一的，所以α,β两平面重合，同理可证平面$EFGH$与α,β都重合，由此可知E,F,G,H,I,J六中点共面。

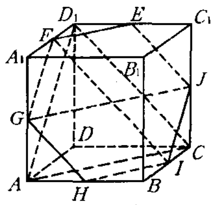


图6

(2)利用直线的垂面唯一性证两平面重合

例2. 过球外一点作球的切线，求证所有切点共面。

证明：如图7，设球O外一点P，切线PA,PB；A,B为切点，连结PO,AO,BO，过A作$AO_1 \perp PO$于O_1，过A,B,O_1三点作截面得小圆O_1。

易知，$Rt\triangle AOP \cong Rt\triangle BOP$，$\therefore PA = PB$，在$\triangle PAO$中$\angle OAP = 90°$，$AO_1 \perp PO$，$\therefore PO \cdot PO_1 = PA^2 = PB^2$，则在$Rt\triangle POB$中可断定$BO_1 \perp PO$，$\therefore PO \perp$平面$AO_1B$，且$O_1A = O_1B$（全等三角形对应边上的高相等），由此可知，过$P$点作球的切线的切点与$O_1$点的距离相等，

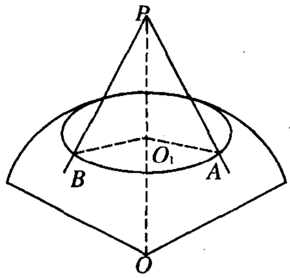


图7

所以 O_1 点是小圆的圆心。同理，球的任意切线 $PC_1,PC_2,\cdots;C_1,C_2,\cdots$ 为切点，则平面 AOC_1，$AOC_2\cdots$ 都与直线 PO 垂直，所有这些垂面都过 O_1 点，所以它们都应重合，由此可知，过球外一点作球的切线，所有切点共面。

上例应用了如下结论：过定点作定直线的垂直平面存在唯一。

(3)利用平行平面唯一性，证平面重合

例 3. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G,H,I,J 是它们所在棱的中点，求这六个中点共面。

证明：见图 6，连 FI，易证 $EJ/\!/FI$，$\therefore$ 这两平行线可以确定一个平面 α。同理 $FI/\!/GH$，则这两平行线可确定又一个平面 β，连 AC,AD_1,D_1C，则 $EF/\!/AC_1$，$IJ/\!/D_1A$，EF 与 IJ 是 α 平面内的相交直线。$\therefore$ 平面 $EFIJ/\!/$ 平面 ACD_1，同理平面 $FGHI/\!/$ 平面 ACD_1。即 α,β 平面都过 F 点且都平行于平面 ACD_1，$\therefore\alpha$ 与 β 平面必重合。

上例利用了下列结论：过平面外一点可以作且只可以作一个与已知平面平行的平面。

4. 反证法

利用反证法证明点线共面。

例 1. 若空间一个四边形邻边的夹角均为 90°，求证：这个四边形必是矩形。

证明：如图 8，设四边形 $ABCD$ 中 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$ 要证它是矩形，先应证明它是个平面图形。

图8

若 $ABCD$ 不是平面图形，则四线段 AB,BC,CD,DA 中必有异面直线。设 AB 与 CD 为异面直线，而 AD,BC 与这两直线都相交且垂直，$\therefore AD,BC$ 都是 AB,CD 的公垂线，但异面直线的公垂线是存在唯一的，矛盾。$\therefore AB,CD$ 不可能是异面直线。同样，AD,BC 也不可能是异面直线．$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是一个平面图形．再证 $ABCD$ 为矩形是显而易见的。

例 2. 若空间四点 A,B,C,D，满足条件 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$，求证 A,B,C,D 四点共面。

证明：如图 9，若 A,B,C,D 四点不共面，则四点构成一个空间四边形 $A-BCD$，将 $\triangle ABD$ 绕 BD 旋转到 $\triangle BCD$ 所在平面 α 内，A 点移到 A_1 点。

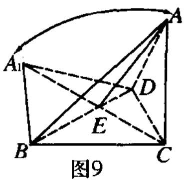


图9

在平面四边形 A_1BCD 中，应有 $A_1C\cdot BD\leqslant A_1B\cdot CD+A_1D\cdot BC$，但在 $\triangle ACE$ 中，$AC<AE+EC=A_1C$。$\therefore A_1C\cdot BD>AC\cdot BD$，$\therefore AC\cdot BD<A_1B\cdot CD+A_1D\cdot BC=AB\cdot CD+AD\cdot BC$ 矛盾。$\therefore A,B,C,D$ 四点共面。

证明空间点线共面的方法还有，如射影法：空间图形在一个平面内的射影是一条直线，则此图形必是平面图形，又如等距法：平面同侧若干点，它们到此平面的距离都相等，则所有这些点必在一个平面内，如此等等，不再一一列举。

习　题　一

1. 求证梯形、平行四边形是平面图形。
2. 求证过定点与定直线上任意一点的连线段都在一个平面内。
3. 过定点作定直线的垂线，求证所有这些垂线在同一平面内。
4. 过定点作同一平面的平行线，求证所有这些平行线在同一平面内。
5. 过一直线上任意一点作同一平面的垂线，求证所有这些垂线必在同一平面内。
6. 平面外一点与平面上任一点连线的中点共面，试证之。

7. 两异面直线上任意两点连线段的两个三分点必分别共面，试证之。

8. 空间六边形 $ABCDEF$ 各边中点分别为 G,H,K,L,S,T，则这六点共面(如图 10)。

9. 夹在两平行平面间的任何线段的定比分点必共面，试证明。

10. 一个平面 α 平行于空间四边形的一组对边，截另一组对棱，平面 β 平行于后一组对棱，截前一组对棱，求截得的四点必共面。

11. 所有的棱相等的正四棱锥，以四个侧面为底面，作四个正四面体，求证：所作的四个正四面体外侧四顶点必共面(如图 11)。

12. 四棱锥 $V-ABCD$ 中(图 12)，S,R,L 是 AB 上任意三点，P,I,Q 是 VC 上任意三点，E,F,G,H,M 分别是 SP,PR,RI,IL,LQ 的中点，求证 E,F,G,H,M 五点共面。

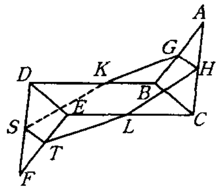


图10

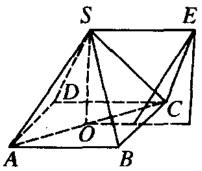


图11

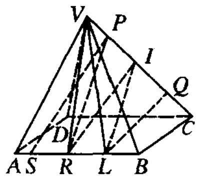


图12

13. 任何三条直线不共点的四条直线两两相交，求证这四条直线必共面。

14. 三条直线与球均只有一个公共点，若这三直线互相平行，求这三个公共点与球心四点共面。

15. 四面体相邻两个三角形的外心 O,O_1，过 O,O_1，分别作它们所在面的垂线，求证二垂线共面。

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，C_1B_1 延长线上取一点 E，使 $B_1E=B_1C_1$，求证 A_1,E,B,D 四点共面。

17. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，在 B_1C_1 延长线上取一点 F，使 $C_1F=B_1C$，求证 A,D_1,C,F 四点共面。

18. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 DD_1,CC_1 的中点分别为 M,N，求证 M,N,A,B 四点共面。

19. 三条互相平行的直线与第四条直线均相交，求证这四直线共面。

20. 求证：四面体 $ABCD$ 中，A,B 两顶点分别与它们对面三角形的重心的连线必共面。

21. 四面体中若有两组对棱分别垂直，那么此四面体的任意两条高均共面。

22. 三面角 $V-LMN$ 中，分别在面 VLM，面 VMN，面 VNL 内引 $VP\perp VN,VQ\perp VL,VR\perp VM$，求证：$VP,VQ,VR$ 在同一平面内。

23. 直线 l 和 l 外一点 A，过 A 作直线 $a/\!/l$，求证 a 必在 l 与 A 所确定的平面内。

24. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，CC_1 的中点 E，C_1D_1 的中点 F，AD 的中点 H，EF 的连线与 DD_1 和 DC 的交点分别为 P,Q,PH 与 A_1D_1 交于 G,HQ 与 BC 交于 K，求证 E,F,G,H,K 五点共面。

25. 正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，A_1C_1,AA_1 和 BC 上各有一点 E,F,H，若 EF 与 CA,CC_1 分别交于 P,Q，PH 与 AB 交于 G,QH 与 B_1C_1 交于 K，求证 E,F,G,H,K 这五点共面。

26. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 AB 与 A_1D 的公垂线 EF,BC_1 与 AB 的公垂线 GH，求证 E,F,G,H 四点共面。

27. 平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=a$，平面 $\beta\cap$ 平面 $\gamma=b,a/\!/b$，平面 α,β,r 外任取一点 P，过 P 作这三个平面的垂线必共面。

28. 三条互相平行的直线与同一个球都相切，求证：三个切点与球心四点共面。

29. 三球 O_1,O_2,O_3 相交于 A,B，过 A 引直径 AO_1C_1,AO_2C_2,AO_3C_3，求证 B,C_1,C_2,C_3 四点共面。

30. 若平面 α 截四面体 $ABCD$，且 $AB/\!/\alpha,CD/\!/\alpha,\alpha\cap AC=E,\alpha\cap BD=F$，又 β 平面截此四面体，$AC/\!/\beta$，$BD/\!/\beta,AB\cap\beta=G,CD\cap\beta=H$，求证 E,F,G,H 四点共面。

31. 四面体 $ABCD$ 中，AB,BC,CD,DA 上各有一点 E,F,G,H，且 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$，求证 E,F,G,H 四点共面。

32. 二面 $\alpha-DE-\beta$ 的 α 内一个角$\angle AOB$ 的平分线 $OC/\!/DE$，$\angle AOB$ 在平面 β 内的射影$\angle A_1O_1B_1$，求证

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$\angle A_1O_1B_1$ 的平分线 O_1C_1 与 OC 必共面。

33. 三棱锥 $A-BCD$ 中，$\triangle ABC \cong \triangle ABD$，$\angle BAC=\angle BAD$，点 $P\in BC$，点 $Q\in BD$，且 $BP=BQ$，点 $E\in AP$，点 $F\in AQ$，$AE=AQ$，求证 E,F,C,D 四点共面。

34. 有公共边的两$\triangle ABC$ 和$\triangle BCD$，两三角形外心分别为 O,O_1，过 O,O_1 分别作$\triangle ABC$ 和$\triangle BCD$ 所在面的垂线共面。

35. 由一点出发的三条射线 VL,VM,VN 分别在三个面 VLM,VMN,VLN 引 $VP\perp VN$，$VQ\perp VL$，$VR\perp VM$，求证 VP,VQ,VR 三线共面。

二、异面直线的判定方法

前面介绍了立体几何中一对基本矛盾的一个方面——共面。本节介绍矛盾的另一方面——异面。

异面直线概念其实质是，空间两直线永远不可能共面。如何判定两直线是异面直线？常见方法如下：

1. 定义法

不共在任何平面内的两条直线称为异面直线，根据这个定义，要证明两条直线为异面直线，只需证明两直线符合三不条件——不重合，不平行，不相交，即可断定这两条直线为异面直线。

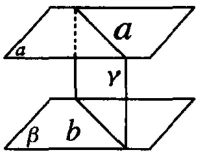


图13

例 1. 已知平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，平面 γ 与 α,β 都相交，交线依次是 a,b，求证平面 β 内与 b 相交的直线与 a 必是异面直线。

证明：如图 13，设直线 $c\subset\beta$，$b\cap c=A$，$\because \alpha/\!/\beta$，$a\subset\alpha$，$\therefore a,c$ 两直线不可能相交与重合。又 $a \nparallel c$，事实上，如果 $a/\!/c$，而 $b/\!/a$，则 $b/\!/c$ 与 $b\cap c=A$ 矛盾，$\therefore a,c$ 两直线不重合、不平行、不相交，所以 a,c 为异面直线。

2. 判定定理法

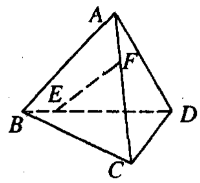


图14

平面的一条交线与平面内不过交点的直线必是异面直线，此结论称为异面直线判定定理，用这个定理判定两直线为异面直线较为简洁明了。

例 1. 四面体 $ABCD$ 中，E,F 分别是 BD,AC 棱上的两点（异于顶点），求证 EF 与 BC 必是异面直线。

证明：如图 14，$\because E\in$ 平面 BCD，$F\notin$ 平面 BCD，即 EF 与平面 BCD 交于 E 点，$BC\subset$平面 BCD，且不过 E 点，根据判定定理知，EF 与 BC 为异面直线。

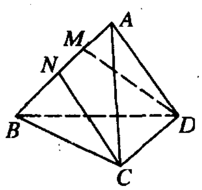


图15

例 2. 四面体 $ABCD$ 中，$AC=BC$，$AD\neq BD$，$DM\perp AB$ 于 M，$CN\perp AB$ 于 N。求证 DM 与 CN 必是异面直线。

证明：如图 15，$\because AC=BC$，$CN\perp AB$，$\therefore N$ 必为 AB 中点，而 $AD\neq BD$，$DM\perp AB$，$\therefore M$ 必不是 AB 的中点。即 M,N 是相异两点。$CN\cap$平面 $ABD=N$。$\therefore CN$ 与 BD 为异面直线。（异面直线判定定理）。

3. 反证法

例 1. 异面直线 a,b 中的每一条上各取两个点 $A,B\in a$，$C,D\in b$。求证 AC 与 BD 或 AD 与 BC 为两对异面直线。

证明：如图 16，若 AC 与 BD 为共面直线。设它们共面于平面 α 内，则 $A,B,C,D\in\alpha$。

$\therefore AB, CD \subset \alpha$。但 AB 与 CD 为异面直线，矛盾，$\therefore AC$ 与 BD 为异面直线。同理可证 AD 与 BC 为异面直线。

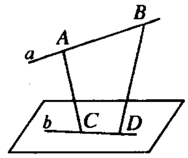


图16

例 2. 已知直线 a 上有两个点 A, B。直线 b 上有一点 C，若 AC, BC 同垂直于 b，求证直线 a 与 b 必为异面直线。

证明：如图 17，若 a, b 为共面直线。设 a, b 共面于平面 α. $\because A, B, C \in \alpha$，$\therefore AC \subset \alpha, BC \subset \alpha$，又 $AC \perp b, BC \perp b$，在同一平面内，过直线上一点作此直线的垂线不可有两条，矛盾，$\therefore a, b$ 必为异面直线。

判定异面直线的三种方法中，以应用判定定理来作判断更为直观简明。

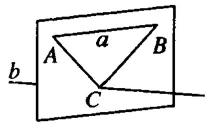


图17

习　题　二

1. 若直线 a, b 分别在平面 α, β 内，$\alpha \cap \beta = c, b \cap c = P, a // c$，求证 a, b 为异面直线。

2. 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l, A \in l, B \overline{\in} l$，点 $C \in l, CD \subset \beta$，求证 AB 与 CD 为异面直线。

3. 求证：与两异面直线的公垂线平行的直线至少与两异面直线中的一条是异面直线。

4. 若两平行线中的一条与第三条直线为异面直线，那么平行线中另一条直线与第三条直线是否也是异面直线？请说明理由。

5. 空间两直线都与第三直线垂直，这两直线一定平行，对吗？为什么？

6. 二面角 $A-BC-D$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 的外心分别为 O_1, O_2，过 O_1, O_2 作它们所在面的垂线，(1)这两条垂线何时为相交直线？为什么？(2)何时为异面直线？为什么？

7. 直线 $a //$ 平面 α，过 a 的平面 β 与 α 交于直线 b，与 α 内的直线 c 相交，求证 a 与 c 是异面直线。

8. 球面上北纬 30°与 45°的纬线中心分别为 O_1, O_2，在这两纬线上分别有一点 A, B，若 A, B 两点的经度不等，则 O_1A 与 O_2B 必为异面直线。

9. 三条直线 a, b, c 是两两垂直的异面直线，直线 l 是 b, c 的公垂线，直线 a 与 l 是不是异面直线？请说明理由。

10. a, b, c 是三条两两垂直的异面直线，a 与 b，b 与 c，c 与 a 的公垂线分别是 l_1, l_2, l_3，则 l_1, l_2, l_3 也是三条两两垂直的异面直线，对吗？为什么？

11. $\triangle ABC$ 的外心为 O，过 O 做平面 ABC 的垂线，这垂线与 $\triangle ABC$ 的三边一定是异面直线吗？为什么？

12. 若上题中的外心改为垂心，您又得到什么结论？

13. 空间两直线 a, b 在平面 α 内的射影是两条平行线，a, b 一定是平行线？为什么？

14. 请说清两条异面直线在同一平面内的射影之间的位置关系有几种可能。

15. O 点出发的三条射线 a, b, c 不共面，异于 O 点的四个点 A, B, C, D 满足 $A, B \in a, C \in b, D \in c$。求证 AC, BD 为异面直线。

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，B_1C_1, CC_1 的中点分别为 M, N，MN 与 BD_1 是否共面？为什么？

17. 求证空间四面体的两对角线一定是异面直线。

18. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中面 $ABCD$ 和面 BCC_1B_1 的中心分别是 O, O_1，求证 AO_1 和 DO 为异面直线。

19. a 和 b 是异面直线，$c // b$，c 与 a 交于点 A，$d // a$ 与 b 交于 B，求证直线 c 与 d 也是异面直线。

20. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，面 BCC_1B_1 和面 $ABCD$ 的对角线交点分别为 M, N，求证 AO_1 和 DO 为异面直线。

21. 如果四面体的三组对棱不分别垂直或相等，则任意两个顶点与其对面的垂心的连线必是异面直线。

22. 一个五棱锥 $S-ABCDE$ 中，$\angle BSC$ 和 $\angle SCD$ 的角分线必为异面直线吗？为什么？

23. 正四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$，$\triangle BCD$ 和 $\triangle ACD$ 的中心依次为 E, F, G，问 EF 和 BG 是异面直线吗？为什么？

24. 四面体 $ABCD$ 中，各棱均不相等，$\triangle BCD$ 的垂心 H，$\triangle ACD$ 的垂心为 G，AH 与 BG 是异面直线吗？

为什么？

25. 四面体 $ABCD$ 中，$\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 的角平分线 AE, DF，AE, DF 是异面直线？什么条件下是共面直线？

26. 四面体 $ABCD$ 中，AB, BC, CD, DA 上各取一点 E, F, G, H 使 $AE:EB=BF:FC=CG:GD=DH:HA=1:2$，那么 EG 和 FH 是异面直线吗？请证明您的结论。

27. 四面体 $ABCD$ 中过 A, B 两点分别作它们所对面的高，这两条垂线什么条件下为共面直线？何时为异面直线？

28. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 B_1A_1 上一点；M 是 B_1C_1 上一点，F 是 AB 上一点，N 是 BC 上一点，且 $\angle FEB_1=\theta_1$，$\angle MNB=\theta_2$，若 θ_1, θ_2 为锐角，求证 EF, MN 为异面直线。

三、解异面直线

异面直线的判定是对异面直线的定性分析，除此外，异面直线还有一些重要性质，如异面两直线的公垂线存在唯一，又如过两异面直线存在且只有一对平行平面等，对异面直线作定性研究是必要的，但还应对它作定量研究。

我们注意到异面直线有下列定量指标：(1)异面直线所成的角。(2)异面直线的距离。(3)两异面直线上任意两点的距离。(4)两异面直线上任意两点连线与两异面直线的夹角。(5)异面直线公垂线位置的确定等，若这些指标中已知若干指标，要求其他的一些指标的求解过程叫做解异面直线。

(一)求异面直线所成的角的方法

根据异面直线所成角的定义知，要求异面直线所成角问题，必须(将异面直线进行)平移，值得注意的是如何平移？异面直线平移的主要根据是什么？

异面直线平移后，即可将“空间角”化归为平面内的直线夹角，再构造三角形，解此三角形即可求得异面直线所成角的大小，这个过程应用了降维思想，这是立体几何中重要的思想方法。异面直线平移时为了减少盲目性，增强自觉性，必须掌握平移的主要根据有如下几条：

(1)根据平行四边形对边平行，通过作平行四边形达到异面直线平移目的。(2)根据三角形的中位线平行于第三边，通过作中位线达到异面直线平移目的。(3)根据平面几何中平行线截割定理，利用线段成比例达到异面直线平移目的。

另外视具体问题可采用其他方法达到异面直线平移目的，现分述如下：

1. 平行四边形法

例 1. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求 BD_1 与 A_1C_1 两异面直线的成角。

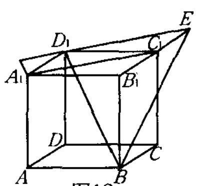


图18

解：如图 18，在平面 $A_1B_1C_1$ 内将 A_1C_1 平移到 D_1E 的位置即作 $D_1E \mathrel{\underline{\parallel}} A_1C_1$，则可作出平行四边形 $A_1C_1ED_1$，易知 E 点在 B_1C_1 的延长线上。$\therefore$ 点 $E \in$ 平面 BCC_1。连结 BE，$\angle BD_1E$ 是 A_1C_1 与 BD_1 所成的角。$\triangle BD_1E$ 中，$BD_1=\sqrt{3}$，$D_1E=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{5}$。由余弦定理可得 $\cos\angle BD_1E=\dfrac{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2-\sqrt{5}^2}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0$。

∴$\angle BD_1E=90°$。∴A_1C_1 与 BD_1 所成的角为 90°。

由上述结论知异面直线 $BD_1\perp A_1C_1$，可直接证明这个结论。事实上，∵$BB_1\perp$平面 A_1C_1，连结 B_1D_1，为 BD_1 在此平面内的射影。∵$B_1D_1\perp A_1C_1$，∴$BD_1\perp A_1C_1$，即 BD_1 与 A_1C_1 所成的角为 90°。

例 2. 直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$BC/\!/AD$，$SA\perp$平面 $ABCD$。且 $SA=AB=BC=a$，$AD=2a$，求 SD 与 AC 两异面直线所成的角。

解：如图 19，延长 BC 到 G，使 $CG=AD$，∵ $AD/\!/BG$，∴四边形 $ACGD$ 是平行四边形，∴$GD/\!/AC$，∴直线 SD 与 DG 所成的锐角或直角即是 SD 与 AC 所成的角。

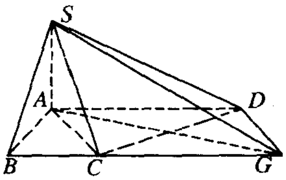


图19

$DG=AC=\sqrt{2}a$，又 $SA\perp$平面 $ABCD$，∴$SA\perp AD$。∴$SD^2=5a^2$。$AG^2=AB^2+BG^2=10a^2$，∴$SG^2=SA^2+AG^2=11a^2$，在$\triangle SDG$ 中由余弦定理得 $\cos\angle SDG=(SD^2+DG^2-GS^2):2SD\cdot DG=(5a^2+2a^2-11a^2):2\cdot\sqrt{5}a\cdot\sqrt{2}a=-\frac{\sqrt{10}}{5}$。∴$\angle SDG$ 为钝角，那么 SD 与 AC 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$。

2. 中位线法

例 1. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，正方形 $ABCD$ 和 BB_1C_1C 的中心分别为 O_1，O，求 AO 与 D_1O_1 两异面直线所成的角。

解：如图 20，在$\triangle AOC$ 中作中位线 O_1E，则 $O_1E\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}\frac{1}{2}AO$，∴$\angle D_1OE$ 就是 D_1O_1 与 AO 所成的角。

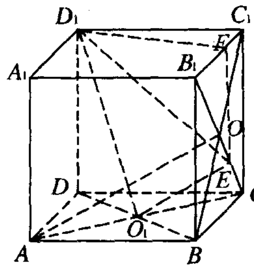


图20

作 $EF\perp B_1C_1$ 于 F，则 $C_1F=\frac{1}{4}$，∴$D_1F^2=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}$，又 $EF=\frac{3}{4}$，∴$D_1E^2=EF^2+D_1F^2=\frac{9}{16}+\frac{17}{16}=\frac{26}{16}$。$D_1O_1{}^2=\frac{3}{2}$，$AO^2=\frac{3}{2}$。∴$O_1E=\frac{1}{2}AO=\frac{\sqrt{6}}{4}$。在$\triangle D_1O_1E$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle D_1O_1E=(\frac{3}{2}+\frac{6}{16}-\frac{26}{16}):2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{6}$。∴$AO$ 与 D_1O_1 所成的角为 $\arccos\frac{1}{6}$。

例 2. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 是所在棱的中点，P 是 MN 的中点，求 CP 与 B_1D 所成的角。

解：如图 21，设 CB_1 的中点 O，CD 的中点 E，PD 的中点 F。则 OE 和 EF 分别是$\triangle DCB_1$ 和$\triangle PDC$ 的中位线。∴$OE\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}\frac{1}{2}B_1D=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EF\mathrel{\underline{\underline{\parallel}}}\frac{1}{2}CP$。

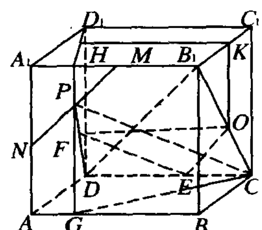


图21

作 $PG\perp AB$ 于 G，则 $PG=\frac{3}{4}$，连 CG，$CG=\frac{5}{4}$，∴在 $Rt\triangle PGC$ 中得 $PC=\frac{\sqrt{34}}{4}$，∴$EF=\frac{1}{8}\sqrt{34}$。

作 $OK\perp B_1C_1$ 于 K，作 $FH\perp KH$，而 $KH/\!/D_1C_1$，那么在直角梯形 $OFHK$ 中，$OK=\frac{1}{2}$，

$KH=\frac{7}{8}$,$FH=\frac{5}{8}$,则易得 $OF=\frac{5}{2\sqrt{2}}$。在$\triangle EOF$ 中由余弦定理得 $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{102}}$,所以,$\theta=\arccos\frac{4}{\sqrt{102}}$,即是所求的两异面直线 CP 与 B_1D 所成的角。

上述的平行四边形法和中位线法目的都是使异面直线进行平移,前者异面直线常常移到几何体外,而后者则属内移型,特别注意利用中位线平移异面直线时,常连结两异面线段的两个端点为公共边,构造两个含有两异面直线的两个三角形,然后作中位线使异面直线平移。

3. 平行截割法

例 1. 如图 22,AB,CD 是两异面直线段,$AB=CD=3$,E,F 分别是线段 AD,BC 上的点,且 $AE:ED=BF:FC=1:2$,$EF=\sqrt{7}$。求 AB 与 CD 所成角的大小。

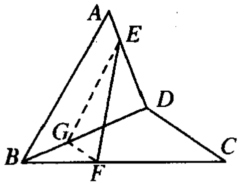


图22

解:作 $FG/\!/CD$ 交 BD 于 G,连 EG。$\because BF:FC=1:2$,$\therefore BG:GD=1:2=AE:ED$,$\therefore EG/\!/AB$,$\therefore EG$,$FG$ 所夹的锐角就是 AB,CD 所成的角。

$EG:AB=2:3$,$\therefore EG=2$,$FG:CD=1:3$,$\therefore FG=1$。在$\triangle EFG$ 中由余弦定理得 $\cos\angle EGF=(EG^2+FG^2-EF^2):2EG\cdot FG=-\frac{1}{2}$,$\therefore\angle EGF=120°$,$\therefore AB$ 和CD 所成的角为 $60°$。

例 2. 四面体 $ABCD$ 中,AB 上一点 E,CD 上一点 F,$BE:EA=CF:FD=n:m$,$EF=m^2+n^2$,$AD=m+n=BC$,求 AD 与 BC 所成的角。

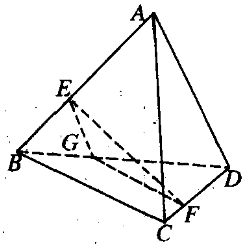


图23

解:如图 23,作 $FG/\!/BC$,交 BD 于 G,连 EG,则 $BG:GD=CF:FD=BE:EA=n:m$。$\therefore EG$ 与 FG 所夹的锐角就是 AD 与 BC 所成的角,$FG:BC=m:(n+m)$,$\therefore FG=m$。$EG:AD=n:(m+n)$,$\therefore EG=n$。在$\triangle EFG$ 中由余弦定理得 $\cos\angle EGF=(EG^2+FG^2-EF^2):2EG\cdot FG=0$。$\therefore\angle EGF=90°$,即 AD,BC 所成的角为 $90°$。

4. 补形法

有些异面直线成角问题,为了便于平移,采用补形的方法,以扩展问题的几何背景,补形实际上增添了许多已知条件,把隐含着的几何元素间的位置关系揭示出来——化隐为显。

例 1. 单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 BB_1 和 CC_1 的中点分别为 M,N。求异面直线 D_1M 和 AN 所成的角。

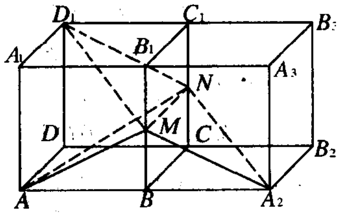


图24

解:如图 24,在原正方体右边补上一个单位正方体。$BA_2B_2C-B_1A_3B_3C_1$,连结 A_2N,易知四边形 A_2ND_1M 是平行四边形。$\therefore A_2N/\!/D_1M$,则$\angle ANA_2$ 便是 AN 与 D_1M 所成的角。在$\triangle NAA_2$ 中 $AA_2=2$,$AN=A_2N=\frac{3}{2}$。由余弦定理得,

$\therefore\cos\angle ANA_2=(AN^2+A_2N^2-AA_2^2):2AN\cdot A_2N=\frac{1}{9}$,$\therefore AN$ 与 D_1M 所成的角为 $\arccos\frac{1}{9}$。

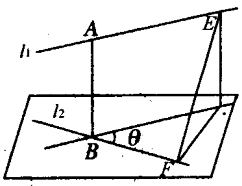


图25

5. 公式法(1)(异面直线余弦定理)

异面直线 l_1,l_2 所成角为 θ,距离为 d;l_1,l_2 上各有一点 E,F,$AE=m$,$BF=n$,那么 $EF^2=m^2+n^2+d^2-2mn\cos\theta$(公垂线 AB)(见图 25)。

例 1. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $AB=AC=AA_1=a$，D 为 AB 的中点，若 $C_1D=\frac{\sqrt{11}}{2}a$，求异面直线 AB 与 A_1C_1 所成的角。

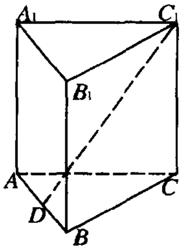


图26

解：如图 26，AB 与 A_1C_1 的公垂线为 $AA_1=a$，$m=A_1C_1=a$，$n=AD=\frac{a}{2}$，设 AB 与 A_1C_1，所成的角为 θ，那么

$\cos\theta=\frac{A_1C_1{}^2+AD^2+AM^2-C_1D^2}{2A_1C_1\cdot AD}=-\frac{1}{2}$。$\therefore$ 异面直线 AB 与 A_1C_1 所成的角 $\theta=60°$。

例 2. 异面直线段 AB，CD 的中点分别是 E，F，且 EF 是 AB，CD 的公垂线段，若 $\angle ACB=\arccos\frac{5}{7}$，$AB=4$，$CD=6$，$EF=\sqrt{5}$，求异面直线 AB 与 CD 所成的角。

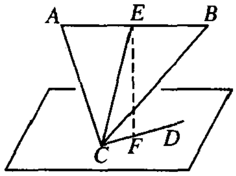


图27

解：如图 27，先求 AC，$\because AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB$，$\therefore AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\frac{5}{7}=16$，又 $CE^2=EF^2+CF^2=14$，$\therefore AC^2+BC^2=2(AE^2+CE^2)=36$，由上述两等式可求得 $AC=4\pm\sqrt{2}$，设 AB，CD 所成角为 θ，$\therefore\cos\theta=\frac{AC^2-CF^2-EF^2-AE^2}{2AE\cdot CF}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\theta=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

应用异面直线余弦定理求异面直线成角时，由于公式本身涉及五个量，其中的异面直线距离 d，更不易求得，故此公式的应用常常是不很方便的。

6. 公式法(2)(四面体对棱成角公式)

四面体 $ABCD$ 中，AC，BD 所成的角为 θ，那么

$$\cos\theta=\left|\frac{BC^2+AD^2-AB^2-CD^2}{2AC\cdot BD}\right|$$

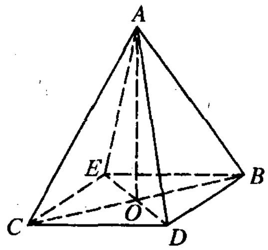


图28

证明：将四面体补形成四棱锥 $ABCDE$，四边形 $BCDE$ 为平行四边形(见图 28)，则

$$4OD^2=2(CD^2+BD^2)-BC^2,4AO^2=2(AC^2+AB^2)-BC^2$$

$$4AO^2=2(AD^2+AE^2)-DE^2=2(AD^2+AE^2)-4OD^2$$

$\therefore AE^2=AB^2+AC^2-AD^2+CD^2+BD^2-BC^2$，在 $\triangle ACE$ 中 $\angle ACE$ 就是 AC 与 BD 所成的角，由余弦定理得

$$\cos\theta=\cos\angle ACE=\frac{AC^2+BD^2-AE^2}{2AC\cdot BD}=\frac{BC^2+AD^2-AB^2-CD^2}{2AC\cdot BD}$$

当 $\angle ACE$ 为钝角时，$\angle ACE=\pi-\theta$。

$$-\cos\theta=-\cos\angle ACE=\frac{AB^2+CD^2-BC^2-AD^2}{2AC\cdot BD}$$

总之，$\cos\theta=\left|\frac{(BC^2+AD^2)-(AB^2+CD^2)}{2AC\cdot BD}\right|$

上述公式称为四面体对棱成角公式，这个公式的记忆亦不难，公式本身和谐对称，酷似三角形中的余弦定理，公式可用文字叙述为：四面体的一组对棱所成角的余弦值等于其他两组对棱的平方和的差与这组对棱乘积 2 倍的商的绝对值。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com