量子力学习题精选与剖析

（第二版）

下册

钱伯初
曾谨言 著

科学出版社

量子力学习题精选与剖析

（第二版）

下　册

钱伯初　曾谨言　著

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书是作者在北京大学和兰州大学讲授量子力学的基础上，精选内容新颖、难度较大的习题汇集. 这些题大部分选自国内外研究生试题和资格考试题，全部给出了详细的分析和解答，其中有些解法是作者独创的. 这次第二版分上、下册. 下册包括动量表象、能量表象、Heisenberg 图象、算符运算、谐振子的相干态与压缩态、Feynman-Hellmann 定理和位力定理、角动量（续）、对称性、准经典近似、二次量子化、相对论量子力学.

本书适于配合“高等量子力学”课程使用.

图书在版编目（CIP）数据

量子力学习题精选与剖析　下册/钱伯初，曾谨言著. 2 版. -北京：科学出版社，1999. 1

ISBN 7-03-006761-4

I. 量…　II. ① 钱… ② 曾…　III. 量子力学-高等学校-习题　IV. 0413. 1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13159 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

北京双青印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988 年 4 月第 一 版	开本：850×1168 1/32
1999 年 1 月第 二 版	印张：10 1/4
1999 年 1 月第三次印刷	字数：271 000

印数：11 239—14 738

定 价：18.00 元

目　录

第一章　动量表象

1.1　质量为 m 的粒子在均匀力场 $f(x)=-F(F>0)$ 中运动，运动范围限制在 $x\geqslant 0$. 试在动量表象中求解束缚态能级和本征函数.

解　势能为 $V(x)=Fx$，总能为

$$H=T+V=\frac{p^2}{2m}+Fx \tag{1}$$

在动量表象中，x 的算符表示为

$$\hat{x}=\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\cdot}{\mathrm{d}p} \tag{2}$$

H 的算符表示为

$$\hat{H}=\frac{p^2}{2m}+\mathrm{i}\hbar F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \tag{3}$$

定态 Schrödinger 方程为

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\mathrm{i}\hbar F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\varphi(p)=E\varphi(p) \tag{4}$$

其中 $\varphi(p)$是动量表象中的波函数. 式(4)是非常简单的一阶微分方程，其解为

$$\varphi(p)=A\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar F}\left(\frac{p^3}{6m}-Ep\right)\right] \tag{5}$$

A 是归一化常数.

变到 x 表象，波函数为

$$\begin{aligned}\psi(x)&=(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}\mathrm{d}p\\&=A(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{p^3}{6mF}+\left(x-\frac{E}{F}\right)p\right]\mathrm{d}p\\&=2A(2\pi\hbar)^{-1/2}\int_0^{\infty}\cos\left[\frac{p^3}{6\hbar mF}+\frac{p}{\hbar}\left(x-\frac{E}{F}\right)\right]\mathrm{d}p\end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{u^3}{3} + u\xi\right) \mathrm{d}u \tag{6}$$

其中

$$u = p(2\hbar mF)^{-1/3} \tag{7}$$

$$\xi = \left(x - \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3} = \frac{x}{l} - \lambda \tag{8}$$

$$l = \left(\frac{\hbar^2}{2mF}\right)^{1/3} \tag{9}$$

$$\lambda = \left(\frac{2m}{\hbar^2 F^2}\right)^{1/3} E = \frac{2mE}{\hbar^2} l^2 \tag{10}$$

l 是本题的特征长度.

除归一化常数 C 外,式(6)右端正是以 ξ 为变量的 Airy 函数①.

当 $\xi > 0$($x > E/F$,即经典禁区),Airy 函数表现为第二类变型 Bessel 函数,即

$$\psi(x) = \sqrt{\xi}\, K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right) \xrightarrow{\xi\to\infty} \sqrt{\xi}\left(\frac{3\pi}{4\xi^{3/2}}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}} \tag{11}$$

当 $\xi < 0$($x < E/F$,即经典允许区),Airy 函数表现为第一类 Bessel 函数,即

$$\psi(x) = \sqrt{|\xi|}\left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right) + J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}\right)\right] \tag{12}$$

能级 E 由边界条件 $\psi(0) = 0$ 决定,即

$$J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\lambda^{3/2}\right) + J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\lambda^{3/2}\right) = 0 \tag{13}$$

其解可由 Bessel 函数表查出,为

$$\lambda = 2.3381, 4.0880, 5.5206, 6.7867, 7.9441, \cdots$$

能量本征值和 λ 的关系见式(10). 基态能级为

$$E_1 = 1.8558\left(\frac{\hbar^2 F^2}{m}\right)^{1/3} \tag{14}$$

---

① Airy 函数的基本性质可以参看 Landau 等著《量子力学》上册(高等教育出版社,1980)中的附录 6.

1.2 一个电子被限制在一块电介质(无限大)平面的上方($x\geqslant 0$)运动,介质的介电常数为 ε,不可穿透.按电象法可求出静电势能为

$$V(x)=-\frac{\alpha}{x},\quad \alpha=\frac{e^2}{4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)>0 \tag{1}$$

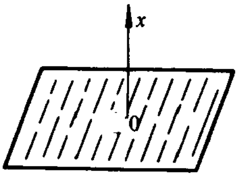

图 1.2

试求电子的能级($E<0$).

解一 电子在 y、z 方向的运动为自由运动,其动能可连续变化,这部分能量不予考虑.x 方向的运动,能量本征方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)-\frac{\alpha}{x}\psi(x)=E\psi(x) \tag{2}$$

边界条件为 $\psi(0)=0$.

式(2)的结构和 Coulomb 场 $V(r)=-\alpha/r$ 中 s 态($l=0$)的径向方程相同,后者为

$$\psi=R(r)=u(r)/r \tag{3}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}u(r)-\frac{\alpha}{r}u(r)=Eu(r) \tag{4}$$

边界条件为 $u(0)=0$[$\psi(0)$有限].众所周知,式(4)的束缚态能级为

$$E_n=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2n^2},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{5}$$

这也就是式(2)的能级.波函数也可以利用 Coulomb 场的 s 态解而写出来.

解二 在动量表象中求解.能量本征方程为

$$\left(\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha}{x}\right)\varphi(p)=E\varphi(p) \tag{6}$$

$\varphi(p)$为波函数.在 p 表象中,

$$x=\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p},\qquad \frac{1}{x}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\mathrm{d}p \tag{7}$$

所以式(6)可以写成

$$(p^2+\eta^2)\varphi(p)=\frac{2m\alpha}{\mathrm{i}\hbar}\int\varphi(p)\mathrm{d}p,\qquad \eta^2=-2mE \tag{8}$$

令

$$\Phi(p)=\int\varphi(p)\mathrm{d}p \tag{9}$$

则

$$\varphi(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\Phi(p) \tag{9'}$$

式(8)可以写成一阶微分方程的形式：

$$(p^2+\eta^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\Phi(p)=\frac{2m\alpha}{\mathrm{i}\hbar}\Phi(p) \tag{10}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\Phi}=\frac{2m\alpha}{\mathrm{i}\hbar}\frac{\mathrm{d}p}{p^2+\eta^2} \tag{10'}$$

积分，即得

$$\ln\Phi(p)=\frac{2m\alpha}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{\eta}\arctan\left(\frac{p}{\eta}\right)$$

$$\Phi(p)=\int\varphi(p)\mathrm{d}p=\exp\left[\frac{2m\alpha}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{\eta}\arctan\left(\frac{p}{\eta}\right)\right] \tag{11}$$

$\arctan\left(\frac{p}{\eta}\right)$是 p 的多值函数，

$$\arctan\left(\frac{p}{\eta}\right)=\left[\arctan\left(\frac{p}{\eta}\right)\right]_{主值}\pm k\pi,\qquad k=1,2,3,\cdots$$

而 $\varphi(p)$和 $\Phi(p)$应该是单值的，为此，必须

$$\frac{2m\alpha}{\hbar\eta}\pi=2n\pi,\qquad n=1,2,3,\cdots$$

即

$$\eta=m\alpha/n\hbar \tag{12}$$

因此，能级为

$$E=-\frac{\eta^2}{2m}=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2n^2},\qquad n=1,2,3,\cdots \tag{13}$$

和式(5)一致．

1.3 质量为 m 的粒子在势场 $V(x)$ 中作一维运动，试建立动量表象中的能量本征方程.

解 采用 Dirac 符号，能量本征方程可以写成

$$H|\psi\rangle=(T+V)|\psi\rangle=E|\psi\rangle \tag{1}$$

其中 $T=p^2/2m$ 为动能算符. 以 $|p\rangle$、$|p'\rangle$ 等表示动量算符的本征态矢量，即

$$\hat{p}|p\rangle=p|p\rangle, \qquad \hat{p}|p'\rangle=p'|p'\rangle \tag{2}$$

态矢量 $|\psi\rangle$ 在 p 表象中的表示式(即波函数)记为

$$\langle p|\psi\rangle=\varphi(p) \tag{3}$$

动量本征态矢量 $|p\rangle$ 的正交"归一"性和完备性条件为

$$\langle p|p'\rangle=\delta(p-p') \tag{4}$$

$$\int|p'\rangle\langle p'|\mathrm{d}p'=1 \tag{5}$$

利用式(5)，可将 $|\psi\rangle$ 表示成

$$|\psi\rangle=\int|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle\mathrm{d}p'=\int|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p' \tag{6}$$

代入式(1)，即成

$$(T+V)\int|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\int|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p'$$

再以 $\langle p|$ 左乘上式，即得

$$\int\langle p|(T+V)|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\int\langle p|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p' \tag{7}$$

其中

$$\langle p|T|p'\rangle=\frac{p'^2}{2m}\langle p|p'\rangle=\frac{p^2}{2m}\delta(p-p') \tag{8}$$

定义 $V_{pp'}=\langle p|V|p'\rangle$，并利用公式

$$\int\delta(p-p')\varphi(p')\mathrm{d}p'=\varphi(p) \tag{9}$$

式(7)最后可以化成

$$\boxed{\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\int V_{pp'}\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\varphi(p)} \tag{10}$$

这正是所求的 p 表象中的能量本征方程．各式中$\int\cdots \mathrm{d}p'$ 的积分上下限均为 $-\infty$ 至 $+\infty$．

式(10)中 $V_{pp'}$是势能 $V(x)$在 p 表象中的矩阵元，

$$V_{pp'}=\langle p|V|p'\rangle \tag{11}$$

如用 x 表象中波函数的积分形式来表示，就是

$$\begin{aligned}V_{pp'} &= \int\psi_p^*(x)V(x)\psi_{p'}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{11'}$$

如果 $V(x)$可以方便地表示成 x 的正幂级数，

$$V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$$

由于

$$x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}$$

式(11′)可以进一步化成

$$\begin{aligned}V_{pp'} &= \sum_n C_n\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}\mathrm{d}x \\ &= \sum_n C_n\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\delta(p-p') \\ &= V(\hat{x})\delta(p-p')\end{aligned} \tag{12}$$

其中

$$\hat{x}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p} \tag{13}$$

代入式(10)，即得

$$\boxed{\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+V\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\varphi(p)=E\varphi(p)} \tag{14}$$

例如题 1.1，就是直接从此式出发求解的，其中

$$V(\hat{x})=F\hat{x}=\mathrm{i}\hbar F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}$$

又如谐振子，

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2=-\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}$$

能量本征方程为

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)-\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\varphi(p)=E\varphi(p)$$

1.4 在动量表象中求解 δ 势阱

$$V(x)=-V_0\delta(x)$$

的束缚态能级和本征函数.

解 动量表象中的能量本征方程(参看题 1.3)为

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\int_{-\infty}^{+\infty}V_{pp'}\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\varphi(p) \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}V_{pp'}&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}xV(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}\\&=-\frac{V_0}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}=-\frac{V_0}{2\pi\hbar}\end{aligned} \tag{2}$$

代入式(1),即得

$$\left(\frac{p^2}{2m}-E\right)\varphi(p)=\frac{V_0}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p')\mathrm{d}p'=C,\qquad (\text{与 } p \text{ 无关}) \tag{3}$$

所以

$$\varphi(p)=\frac{2mC}{p^2-2mE}=\frac{A}{p^2-2mE} \tag{4}$$

此即 p 表象中的能量本征函数,A 为归一化常数.

将式(4)代入式(3)右端,得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{p^2-2mE}=\frac{\pi\hbar}{mV_0} \tag{5}$$

此即能级方程.束缚态 $E<0$,令

$$k=\sqrt{-2mE}/\hbar \tag{6}$$

式(5)中定积分容易算出,为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 - 2mE} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 + \hbar^2 k^2} = \frac{\pi}{\hbar k}$$

代入式(5),即得

$$k = mV_0/\hbar^2 \tag{7}$$

因此

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}} \tag{8}$$

波函数 $\varphi(p)$ 由式(4)表示,即

$$\boxed{\varphi(p) = \frac{A}{p^2 + \hbar^2 k^2}} \tag{4'}$$

常数 A 可以利用归一化条件求得,

$$1 = \int |\varphi(p)|^2 \mathrm{d}p = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{(p^2 + \hbar^2 k^2)^2} = |A|^2 \frac{\pi}{2(\hbar k)^3}$$

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (\hbar k)^{3/2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{mV_0}{\hbar}\right)^{3/2} \tag{9}$$

x 表象中的波函数为

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \varphi(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \\ &= A(2\pi\hbar)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 + \hbar^2 k^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \end{aligned} \tag{10}$$

利用围道积分法容易求出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 + \hbar^2 k^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} = \frac{\pi}{\hbar k} \mathrm{e}^{-k|x|} \tag{11}$$

代入式(10)即得

$$\psi(x) = \sqrt{k}\, \mathrm{e}^{-k|x|} \tag{12}$$

这和上册题 2.1 所得结果完全一致.

1.5 利用题 1.4 得到的波函数,在 p 表象中计算 Δx、Δp,验

证测不准关系．

解 在 p 表象中归一化波函数为

$$\varphi(p)=A/(p^2+\hbar^2k^2) \tag{1}$$

其中

$$A=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(\hbar k)^{3/2}, \qquad k=mV_0/\hbar^2 \tag{2}$$

p 和 p^2 平均值分别为

$$\overline{p}=\int p|\varphi(p)|^2\mathrm{d}p=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p\mathrm{d}p}{(p^2+\hbar^2k^2)^2}=0 \tag{3}$$

$$\overline{p^2}=\int p^2|\varphi(p)|^2\mathrm{d}p=A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p^2\mathrm{d}p}{(p^2+\hbar^2k^2)^2}$$

$$=A^2\frac{\pi}{2\hbar k}=\hbar^2k^2 \tag{4}$$

因此

$$\Delta p=(\overline{p^2}-\overline{p}^2)^{1/2}=\hbar k \tag{5}$$

在 p 表象中，x 的算符表示为

$$\hat{x}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p} \tag{6}$$

利用平均值公式

$$\overline{F}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p)^*\ \hat{F}\ \varphi(p)\mathrm{d}p \tag{7}$$

即得

$$\overline{x}=\mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}[\varphi(p)]^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0 \tag{8}$$

$$\overline{x^2}=(\mathrm{i}\hbar)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}p^2}\mathrm{d}p=\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}\right)^2\mathrm{d}p$$

$$=\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4A^2p^2\mathrm{d}p}{(p^2+\hbar^2k^2)^4}=4\hbar^2A^2\frac{\pi}{16(\hbar k)^5}=\frac{1}{2k^2} \tag{9}$$

因此

$$\Delta x=(\overline{x^2}-\overline{x}^2)^{1/2}=1/\sqrt{2}\,k \tag{10}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/\sqrt{2} \tag{11}$$

和测不准关系

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2$$

是一致的.

1.6 用动量表象计算粒子(能量 $E>0$)对于 δ 势垒 $V(x)=V_0\delta(x)$的透射概率.

解 x 表象中定态Schrödinger方程为

$$\psi'' + k^2\psi - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\delta(x)\psi = 0, \qquad k = \sqrt{2mE}/\hbar \tag{1}$$

令

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\varphi(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \tag{2}$$

$\varphi(p)$即动量表象中的波函数,应满足方程(见题 1.3)

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} V_{pp'}\varphi(p')\mathrm{d}p' = E\varphi(p) \tag{3}$$

其中

$$V_{pp'} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x V_0\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar} = \frac{V_0}{2\pi\hbar} \tag{4}$$

因此,利用式(4)和(2),可求出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_{pp'}\varphi(p')\mathrm{d}p' = \frac{V_0}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(p')\mathrm{d}p' = \frac{V_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi(0) \tag{5}$$

将式(4)、(5)代入式(3),即得

$$(p^2 - \hbar^2k^2)\varphi(p) + \frac{2mV_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\psi(0) = 0 \tag{6}$$

根据 δ 函数的基本公式

$$(\xi - \xi_0)\delta(\xi - \xi_0) = 0 \tag{7}$$

可知式(6)的通解为

$$\varphi(p) = C_1\delta(p - \hbar k) + C_2\delta(p + \hbar k) - \frac{2mV_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\frac{\psi(0)}{(p^2 - \hbar^2k^2)} \tag{8}$$

其中 C_1、C_2、$\psi(0)$ 为待定常数．

式(8)代入式(2)，得到 x 表象中的波函数

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \frac{C_2}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \frac{2mV_0}{2\pi\hbar}\psi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{p^2-\hbar^2k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \tag{9}$$

式(9)中最后的积分应取主值，可以用复 p 平面上的围道积分法算出，结果为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}p}{p^2-\hbar^2k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2\hbar k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}), & x>0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2\hbar k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}), & x<0\end{cases} \tag{10}$$

当 $x \to 0$，式(10)右端为 0，则由式(9)得到

$$\psi(0) = (C_1+C_2)/\sqrt{2\pi\hbar} \tag{11}$$

将式(10)，(11)代入式(9)，即得

$$\sqrt{2\pi\hbar}\,\psi(x) = C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \frac{\mathrm{i}mV_0}{2\hbar^2k}(C_1+C_2)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}), \qquad x>0$$

如规定入射波为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$(即入射动量 $p=\hbar k$)，则在 $x>0$ 区域应该只有透射波，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$项，而不能存在 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$项．因此 C_1、C_2 必须有下列关系：

$$C_2 = -\mathrm{i}\,\frac{mV_0}{2\hbar^2k}(C_1+C_2) \tag{12}$$

从而

$$\psi(x) = \frac{C_1+C_2}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \qquad x>0 \tag{13}$$

类似地，可得

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}[(C_1-C_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + 2C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}], \qquad x<0 \tag{14}$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$项为入射波，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$项为反射波．如规定入射波振幅为 1，即

式(14)写成

$$\psi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{14'}$$

则应取

$$C_1-C_2=\sqrt{2\pi\hbar} \tag{15}$$

由式(13)、(14)易见,

$$\text{透射系数}=\left|\frac{C_1+C_2}{C_1-C_2}\right|^2=\frac{1}{\left|1-\dfrac{2C_2}{C_1+C_2}\right|^2}$$

利用式(12),即得

$$\text{透射系数}=\frac{1}{|1+\mathrm{i}mV_0/\hbar^2k|^2}=\frac{1}{1+(mV_0/\hbar^2k)^2} \tag{16}$$

这结果和上册题 2.3 的式(9)完全一样.

1.7 质量为 m 的粒子束以动量 $p=\hbar k$ 从 $x=-\infty$ 处入射,受到周期性 δ 势垒

$$V(x)=V_0\sum_{n=0}^{\infty}\delta(x-na),\qquad a>0$$

的作用,求能够出现完全反射的动量值.

解 采用动量表象,定态Schrödinger 方程为

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\int_{-\infty}^{+\infty}V_{pp'}\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\varphi(p)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\varphi(p) \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}V_{pp'}&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xV(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)x/\hbar}\\&=\frac{V_0}{2\pi\hbar}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)na/\hbar}\end{aligned} \tag{2}$$

$\varphi(p)$即 p 表象中的波函数.x 表象中的波函数为

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\varphi(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar} \tag{3}$$

将式(2)代入式(1),得到

$$(p^2 - \hbar^2 k^2)\varphi(p) = -\frac{mV_0}{\pi\hbar}\sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p' \varphi(p') \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p'-p)na/\hbar}$$
$$= -\frac{mV_0}{\pi\hbar}\sum_n \sqrt{2\pi\hbar}\psi(na)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pna/\hbar} \tag{4}$$

根据 δ 函数基本公式

$$(\xi-\xi_0)\delta(\xi-\xi_0)=0 \tag{5}$$

可知式(4)的通解为

$$\varphi(p)=\sqrt{2\pi\hbar}[A\delta(p-\hbar k)+B\delta(p+\hbar k)]$$
$$-\frac{2mV_0}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sum_n \frac{\psi(na)}{p^2-\hbar^2k^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pna/\hbar} \tag{6}$$

代入式(3)，即得

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \frac{mV_0}{\pi\hbar}\sum_n \psi(na)$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 - \hbar^2 k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-na)p/\hbar} \tag{7}$$

其中定积分应取主值，可以用复 p 平面上围道积分法算出，结果为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2 - \hbar^2 k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-na)p/\hbar}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2\hbar k}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-na)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-na)}], & x > na \\ \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2\hbar k}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-na)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-na)}], & x < na \end{cases}$$

代入式(7)，并令 $x\to\infty$（即 $x>na$，$n=0,1,2,\cdots$），即得

$$\psi(x)\xrightarrow{x\to\infty}\left[A-\mathrm{i}\frac{mV_0}{2\hbar^2 k}\sum_n \psi(na)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nak}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$
$$+\left[B+\mathrm{i}\frac{mV_0}{2\hbar^2 k}\sum_n \psi(na)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nak}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{8}$$

根据题意，入射波 $\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$，则在 $x\to\infty$ 处 $\psi(x)$ 应表现为透射波，即

$$\psi(x)\xrightarrow{x\to\infty}D\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

式(8)中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 项系数应为 0，因此