面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数与几何

赵连昌　刘晓东

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 21 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

线性代数与几何

赵连昌　刘晓东

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部工科数学学科“九五”规划教材，本书共七章：向量代数与向量空间，空间解析几何，矩阵与行列式，线性方程组，线性变换，特征值、特征向量、矩阵对角化，二次型．附录包括：群、环、域，应用实例——投入产出综合平衡的数学模型，Jordan标准形及四个定理证明．

本书可作为高等学校工科各专业本科的教科书，也可作为非数学类理科专业的教材或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/赵连昌．刘晓东．—北京：高等教育出版社，2001

ISBN 7-04-009472-X

Ⅰ．线…　Ⅱ．①赵…②刘…　Ⅲ．①线性代数②几何　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第01103号

责任编辑　文小西　李　陶　**封面设计**　张　楠　**责任绘图**　黄建英
版式设计　马静如　**责任校对**　杨雪莲　**责任印制**　杨　明

线性代数与几何
赵连昌　刘晓东

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009
电　　话　010-64054588　　传　　真　010-64014048
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　国防工业出版社印刷厂

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　2001年6月第1版
印　　张　15.5　　印　　次　2001年6月第1次印刷
字　　数　280 000　　定　　价　13.50元

前　言

在17世纪，笛卡儿及费马在几何空间中引入了坐标系，从而在几何与代数间建立了一座桥梁，用代数方法解决空间的几何问题，产生了解析几何.人们也注意到，对变量不多于三个的某些代数问题，如果将其解释为相应的几何问题，有助于代数问题的解决；当处理变量个数多于三个的问题时，直观的几何解释不再存在，但是数学家从几何学的经验中汲取直觉，把几何空间的向量运算规律抽象出来，形成了有限维向量空间理论，建立了空间基的概念，将坐标系的概念推广到抽象的线性空间中.历史上，几何与代数互为问题，互为方法，相互交融形成各自学科.在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、虚拟现实等技术都以几何与线性代数为其理论和算法基础的一部分.从历史渊源与现实需求两方面考虑，在工科数学中，将解析几何从高等数学中分离出来，与线性代数结合在一起构成一门课程，是工科数学教学内容与课程体系的改革趋势之一.本书在将解析几何与线性代数融为一体方面作了初步尝试，这有利于工科学生学习数学，对于正确应用数学方法也会有所启发.

关于本书内容说明如下.

1. 本书中线性代数与解析几何的基本内容，大致与"教学基本要求"相同.本书的内容是以向量空间与线性变换为主线展开的.

第一章向量代数与向量空间，介绍了向量代数与坐标系，为解析几何准备必要工具，也为抽象的线性空间的引入准备了直观背景.在讨论向量空间时，强调几何空间例子的引导作用，以化解在学习向量空间抽象概念时遇到的困难；同时也强调严格的数学证明，以提高学生的数学素养，帮助学生实现由"初等数学"到"高等数学"的过渡.

第二章空间解析几何，介绍了空间解析几何的基本内容，如果学生在高等数学中学习了向量代数及空间解析几何，可不学本书第一章第二节与第二章的内容，余下内容在逻辑上依然是连贯的.

第三章矩阵与行列式，以矩阵为主，行列式放在次要的位置.为了便于理解和节省学时，使用了归纳的方法定义行列式.在本书中，强调了分块矩阵在矩阵运算中的作用.

第四章线性方程组，除基本定理外，多少突出了消元法的重要性.作为选学内容，涉及一点主元消元法，以简略说明本课程与线性代数数值方法之间的联系；还涉及一点计算复杂性，以说明计算方法的重要性.

第五章线性变换，主要讲线性变换与其矩阵表示的关系，零空间、象空间与线性

变换的运算都作为选学内容.

第六章特征值、特征向量与矩阵对角化,主要讲特征值与特征向量的基本性质及对角化具体方法.

第七章二次型,主要讲二次型与正定矩阵,二次曲面分类是选学内容,在必学内容中讲述了将一个二次曲面方程化为标准形的方法.

附录,只供教师与学生参考.因为这本教材的体系与某些教材的体系有所不同,必须把一些定理证明补全,以形成完整内容,便于查阅.群、环、域,投入产出法与Jordan标准形供学生课外阅读.

2. 本书可供重点院校学时较少专业及非重点院校有关专业使用.为了适应不同专业、不同层次的教学要求,教材显现"模块式"结构,可以按学时不同分块使用:(1)没有星号的内容是基本内容,正常使用约需50学时左右,学生只选作习题A;(2)时间再多6学时左右,可讲带星号的内容,带星号的证明不讲,学生只选作习题A;(3)对学时更多专业,可选讲带星号证明;(4)习题B相当于或高于工科硕士研究生入学考试水平,仅供参考,习题B不属于期末考试内容.

3. 本书在阐述每个重要概念与定理前,常常用具体例子为先导,使学生从实例中了解问题由来,掌握解决问题的思路和算法步骤,以减少理解上的障碍,并可以节省学时.内容论述力求详细严谨,清楚易懂,益于自学.

4. 本书章节之间也常常穿插一些问题由来及思考方法的说明,这只是为了学生更好地理解教材内容,难免有片面之处,希望能起到抛砖引玉的作用.

本书是教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》立项项目《工科数学系列课程教学内容与体系改革的研究与实践》的研究成果之一.在教材评审中,全国工科数学课程指导委员会主任马知恩教授及许多委员提出了很多宝贵意见,特别是主审人骆承钦教授和戴天时教授、高等教育出版社的文小西编审对教材体系及内容的改进提出一系列的具体建议.他们的建议对本书的形成和保证教材的质量起到十分重要的作用.在本书编写与试讲的几年之中,得到大连理工大学施光燕教授、孙丽华教授、王天明教授、夏尊铨教授、冯红副教授、吉林工业大学董加礼教授及大连水产学院的查健禄教授很多指导与帮助.在本书编写过程中,大连海事大学教务处予以立项并给予资助,教材科对本书试用本的三次印刷予以支持,数学教研室很多教师给予帮助,特别是杜祖缔教授、魏华副教授、王德强博士、张运杰副教授、邵方明副教授和卢玉贞副教授给予很多鼓励与帮助.在此向他们表示衷心的感谢!同时,我们也要感谢书后参考文献的作者们,他们的著作给予本书编者很多启发与借鉴.

由于编者水平有限,不妥与错误之处在所难免,敬请同行与读者批评指正.

编者

2000年8月于大连

目　　录

第一章　向量代数与向量空间

本章研究向量代数与向量空间. 所谓向量就是既有大小又有方向的量. 很多物理量需要用向量表示，同时向量也是空间中基本的几何量. 引入向量的加法、数与向量乘法之后，本书将以向量为工具建立坐标系. 坐标系的引入是 R. Descartes(1596—1650)对数学的开创性的贡献. 坐标系是把数学中不同分支联系起来的一座"桥梁". 坐标系的建立使得向量与它的坐标建立一一对应关系，从而也使空间中的点与它的坐标建立一一对应关系，使得空间曲面和曲线可用方程或方程组表示，因而可用代数方法来研究几何问题；反过来，也可用几何方法来研究很多代数问题. 几何与代数互为工具、相互融合是数学思想统一性的佐证. 向量空间是以几何向量及其运算为直观背景作进一步抽象的结果，可应用它研究比几何向量更复杂的对象及其运算的规律. 在讲述向量代数与向量空间之前，对集合及其上的映射略加陈述，以便了解必要术语与记号.

第一节　集合　二元关系　映射

1.1　集合

集合论的概念与方法是近代数学的基础. 由于集合是数学的一个最基本的概念，所以不能用比它更简单的概念来定义，只能对它作一些解释. 在此，仅引用数学名著 Van der Waerden 的《代数学》中关于集合的解释："每个单个元素具有或者不具有的性质就定义一个**集合**；这个集合**元素**就是全体具有这个性质的对象". 也即把集合理解为一些具有共同特征的事物的全体，组成集合的事物称为该集合的元素. 例如"大于或等于零的整数"这个性质就定义了一个集合；每个大于或等于零的整数都是该集合的元素.

通常，用大写字母表示集合，小写字母表示集合的元素. 当 a 是集合 A 的元素时，称 a 属于 A 或 A 包含 a，记为 $a\in A$. 当 a 不是集合 A 的元素时，称 a 不属于 A 或 A 不包含 a，记为 $a\notin A$. 不含元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

例如，所有实数，直线上所有点，平面上所有点等等，都分别构成集合.

由一个元素 a 构成的集合记作$\{a\}$. 因而 a 和$\{a\}$是不同的概念. 由有限个元素构成的集合称为**有限集**. 例如由整数 1,2,3,4 构成的集合就是有限集. 而由

无限个元素构成的集合称为**无限集**. 全体自然数的集合 $\mathbf{N}$、全体实数的集合 $\mathbf{R}$、全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 及全体复数的集合 $\mathbf{C}$ 都分别构成无限集. 表示一个集合,通常有两种方式:一种是穷举法,即列举出集合中的全部元素;一种是描述法,即用集合中全部元素所具有的特性来表述集合. 例如:$A=\{1,2,3,4\}$ 是穷举法. $\mathbf{Q}=\{q \mid q$ 为有理数$\}$ 和 $\mathbf{R}^+=\{r \mid r$ 为大于零的实数$\}$ 都为描述法.

设 S_1 和 S_2 是两个集合,如果 S_1 的元素都是 S_2 的元素,则称 S_1 是 S_2 的**子集**,且称 S_1 被包含在 S_2 中或称 S_2 包含 S_1,记为 $S_1 \subseteq S_2$ 或 $S_2 \supseteq S_1$. 约定空集是任意一个集合 A 的子集,即 $\varnothing \subseteq A$. 如果组成 S_1 和 S_2 的元素完全相同,亦即 $S_1 \subseteq S_2$ 和 $S_2 \subseteq S_1$ 同时成立,则称 S_1 和 S_2 **相等**,记为 $S_1=S_2$. 若 $S_1 \subseteq S_2$,但是 $S_1 \neq S_2$,则称 S_1 为 S_2 的真子集,记为 $S_1 \subsetneq S_2$. 若存在 $x \in S_1$,但 $x \notin S_2$,则称 S_2 不包含 S_1 或 S_1 不被 S_2 包含,记作 $S_1 \not\subseteq S_2$.

设 S_1 和 S_2 是两个集合,定义**交集** $S_1 \cap S_2$,**并集** $S_1 \cup S_2$,**差集** $S_1 \setminus S_2$,**笛卡儿集**(或称**直积**)$S_1 \times S_2$ 如下:

$$S_1 \cap S_2 = \{a \mid a \in S_1 \text{ 且 } a \in S_2\},$$
$$S_1 \cup S_2 = \{a \mid a \in S_1 \text{ 或 } a \in S_2\},$$
$$S_1 \setminus S_2 = \{a \mid a \in S_1 \text{ 且 } a \notin S_2\},$$
$$S_1 \times S_2 = \{(a,b) \mid a \in S_1 \text{ 且 } b \in S_2\}.$$

1.2　二元关系

有了集合的概念,就可以研究集合之间或同一集合中元素之间的各种关系及其分类等问题. 例如研究平面内所有直线的集合中的直线之间的平行、垂直及相交关系. 要用数学来研究这类问题,就要有相应的数学概念来描述这类关系. 为此给出下列概念.

设 S_1 和 S_2 为两个集合,R 是涉及两个对象的一个规则. 如果对于 S_1 的任意一个元素 a 与 S_2 的任意一个元素 b,都能确定它们适合 R(称 a 与 b 有关系 R,记为 aRb)或它们不适合 R(称 a 与 b 没有关系 R,记为 $a\bar{R}b$),就称 R 为 S_1 到 S_2 的二元关系.

定义 1.1　设 S_1, S_2 为两个集合,如果 $R \subseteq S_1 \times S_2$,则称 R 为 S_1 到 S_2 的一个**二元关系**,若 $(a,b) \in R$,则称 a,b **具有关系** R,记作 aRb;否则称 a,b **无关系** R,记作 $a\bar{R}b$.

设 S 为一集合,$R \subseteq S \times S$,即 R 为 S 到 S 的一个二元关系,也称 R 为 S 上的一个二元关系. 如果 S 上的二元关系 R 满足下列条件,则称 R 为 S 上的一个**等价关系**:

(1) **反身性**　对任意 $a \in S$,$(a,a) \in R$;

(2) **传递性** 当$(a,b)\in R,(b,c)\in R$时,有$(a,c)\in R$;

(3) **对称性** 当$(a,b)\in R$时,有$(b,a)\in R$.

设 R 为S上的一个等价关系,$a\in S$,称 $\bar{a}=\{b\mid b\in S,(a,b)\in R\}$为 a 关于等价关系R的一个**等价类**,即在等价关系 R 下所有与a具有等价关系R的元素构成的集合.

例 1 (1) 设集合 $A=\{$蛋,奶,谷$\}$,集合 $B=\{$奶牛,山羊,母鸡$\}$.定义一个由 A 到B的二元关系R:$a\in A,b\in B,(a,b)\in R$ 当且仅当b能产生a,即

$$R=\{(\text{蛋},\text{母鸡}),(\text{奶},\text{奶牛}),(\text{奶},\text{山羊})\}.$$

对于二元关系 R 来说,蛋 R 母鸡,奶 R 奶牛,奶 $\bar{R}$ 母鸡等等.

(2) 假定把有一段公共边界的两个国家称为邻国,那么"相邻于"便是地球上所有国家组成的集合上的一个二元关系 R.于是(中国,朝鲜),(朝鲜,中国)$\in R$,但(中国,英国)$\notin R$.

(3) 三角形相似是平面上所有三角形组成的集合上的一个二元关系 R.易验证 R 满足反身性、传递性和对称性,于是 R 是平面上所有三角形组成的集合上的一个等价关系,而所有正三角形就构成关于 R 的一个等价类.

命题 1.1 S 为一个集合,R 为S上的等价关系,$a,b\in S$.如果 $\bar{a}\cap\bar{b}\neq\varnothing$,则 $\bar{a}=\bar{b}$.

证 设 $c\in\bar{a}\cap\bar{b}$.有$(a,c)\in R,(c,b)\in R$.由传递性知$(a,b)\in R$.任意 $d\in\bar{b}$,即$(b,d)\in R$.由传递性可知$(a,d)\in R$,即 $d\in\bar{a}$.因此 $\bar{b}\subseteq\bar{a}$.同理可证 $\bar{a}\subseteq\bar{b}$.于是 $\bar{a}=\bar{b}$.□

命题 1.1 说明,集合 S 上的每一个等价关系都给出集合S中元素的一个分类,反之亦然.

设 S 为一个集合,R 为S上的等价关系.以 R 来划分S,所有等价类作为元素(即每一个等价类作为一个元素)所构成的集合,称为 S 关于R的**商集**.记为 S/R.

例 2 设 $\mathbf{Z}$ 是所有整数构成的集合,k 是一个给定的正整数.设 $a,b\in\mathbf{Z}$,定义二元关系 R 如下:aRb 或$(a,b)\in R$ 当且仅当$a-b$可被k整除,即 a 和b除以k的余数相同,记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ k)$.称关系 R 为关于模k同余关系.易验证,二元关系 R 满足等价关系的定义条件(1)~(3).当 $k=2$ 时,把整数分为两类 $\bar{0},\bar{1}$,即奇数类与偶数类,此时商集 $\mathbf{Z}/R=\{\bar{0},\bar{1}\}$.当 $k=n$ 时,商集 $\mathbf{Z}/R=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{n-1}\}$,称为 $\mathbf{Z}$ 关于模 n 同余关系R的商集,通常记为 $\mathbf{Z}_n$.

1.3 映射

对集合 S_1 和 S_2,通过一个给定法则 φ,使得对 S_1 中任意一个元素 a,都有 S_2 中一个确定的元素 a'与它对应,称 φ 为S_1 到 S_2 的一个**映射**,记为 $\varphi:S_1\rightarrow$

S_2 或 $a'=\varphi(a)$,称 a'为a 在映射φ 下的**象**,称 a 为a'在映射φ 下的一个**原象**.如果映射 φ 使S_1 中不同元素对应于 S_2 中的不同元素,则 φ 称为S_1 到 S_2 的**单射**.如果任意 $a'\in S_2$,存在 $a\in S_1$ 使得 $a'=\varphi(a)$,则称 φ 为S_1 到 S_2 上的**满射**,否则称为 S_1 到 S_2 **内的映射**.如果 φ 既是单射又是满射,则称 φ 为**一一对应**或**双射**.

例3 设 $S_1=\{1,2,3\}$,$S_2=\{7,8,9,10\}$,定义 $f_1:f_1(1)=8,f_1(2)=9,f_1(3)=10$,则 f_1 是 S_1 到 S_2 的单射.

设 $S_1=\{1,2,3,4\}$,$S_2=\{7,8,9\}$,定义 $f_2:f_2(1)=f_2(2)=7,f_2(3)=8,f_2(4)=9$,则 f_2 是 S_1 到 S_2 的满射.

设 $S_1=\{1,2,3\}$,$S_2=\{7,8,9\}$,定义 $f_3:f_3(1)=7,f_3(2)=9,f_3(3)=8$,则 f_3 是 S_1 到 S_2 的一一对应.

对于每个映射 $f:S_1\to S_2$,存在 S_1 到 S_2 的一个二元关系 R,

$$R=\{(a,f(a))\mid a\in S_1\}$$

与之对应,这表明映射 $f:S_1\to S_2$ 是一种特殊的 S_1 到 S_2 的二元关系.

第二节 向量代数

2.1 向量的概念

在工程技术和科学研究中,常会遇到像力、力矩、位移、速度、加速度等这样一类量,它们既有大小又有方向.这类量称为**向量**或**矢量**.

在数学上,用一条有向线段表示向量.其长度表示向量的大小,其方向表示向量的方向.以 A 为起点,B 为终点的有向线段所表示的向量,记为$\overrightarrow{AB}$.也用粗体字母或用加箭头的字母来表示向量,例如可用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 或$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ 等等表示向量(图 1).

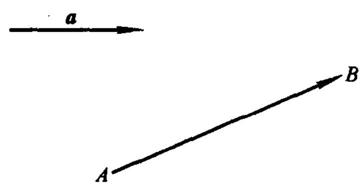

图 1

有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关.在数学上,将仅由长度与方向所定义的与起点无关的向量称为**自由向量**,以后本书所论及的向量总是指自由向量,且简称**向量**.由于只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则可认为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,也即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示

同一个自由向量.

我们也可用等价关系来阐明自由向量. 设 V 为一组给定向量组成的集合. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$,在 V 中定义二元关系 R,$\boldsymbol{a}R\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同. 容易验证,R 是一个等价关系. 大小相等且方向相同的向量组成一个等价类,也即是一个自由向量,并且可用这个等价类中任意一个向量来表示这一类.

当一组向量的起点放在同一点时,如果它们的终点与公共起点在同一条直线上,则称这组向量**共线**.

向量的大小叫做向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于零的向量叫做**零向量**. 记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量没有确定的方向,其方向可以看作是任意的. 由于零向量的方向可看作是任意的,因此可以认为零向量与任意一个向量共线.

当一组向量的起点放在同一点时,如果它们的终点与公共起点在同一平面上,就称这组向量**共面**. 显然,任意两个向量必共面.

2.2　向量的加法、向量与数的乘积

1. 向量的加法

向量的运算来源于力学的研究. 由力学知道,位移是向量. 一个质点由 O 点出发,经过位移 $\boldsymbol{a}$ 到达 A 点,从 A 点经过位移 $\boldsymbol{b}$ 到达 B 点,其结果与从 O 点出发位移到 B 点是相同的,这个位移称为位移 $\boldsymbol{a}$ 与位移 $\boldsymbol{b}$ 的和. 在数学上,用三角形法则定义两个向量的和.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个向量,因为它们是自由向量,可分别用以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OA}$ 和以 A 为起点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 表示,即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$. 则向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 因为图 2 中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 构成三角形,所以上面求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的方法称为向量加法的**三角形法则**. 我们也可用平行四边形法则求两个向量的和:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$,以 OA 与 OC 为边作平行四边形 $OABC$,连对角线 OB,则向量 $\overrightarrow{OB}$ 即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 显然,零向量 $\boldsymbol{0}$ 加任何向量 $\boldsymbol{a}$ 还等于向量 $\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$. 由图 2 可知:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}.$$

即向量加法满足交换律. 对于三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相加(图 3),先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再加 $\boldsymbol{c}$,即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. 先作 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,再作 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,即得和 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. 图 3 表明 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 结果相同,可记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,因而加法满足结合律.

综上所述,对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,其加法满足下列运算规律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

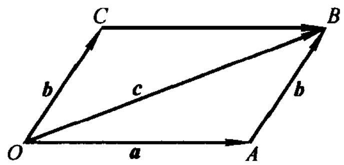

图 2

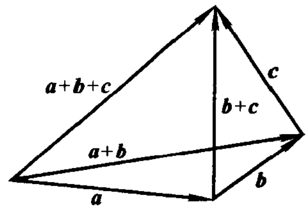

图 3

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$(图 4).定义两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{b}$ 的差$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.由三角形法则可知,将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量$\boldsymbol{b}$ 的起点移到同一点,然后从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点向向量$\boldsymbol{a}$ 的终点引一向量即为$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 5).

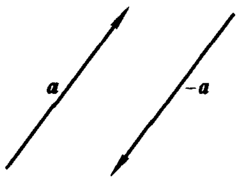

图 4

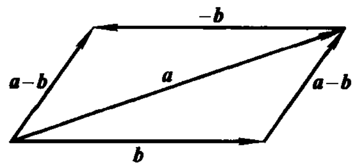

图 5

2.向量与数的乘积(数乘)

设 λ 是一个实数,定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一个向量:当 $\lambda>0(\lambda<0)$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一个方向与$\boldsymbol{a}$ 的方向相同(相反)且模等于 $\lambda|\boldsymbol{a}|(|\lambda||\boldsymbol{a}|)$的向量;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 表示零向量,即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.向量与数乘积,也简称**数乘**运算.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以(-1)时,得到$(-1)\boldsymbol{a}$,它的模与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向与$\boldsymbol{a}$ 的方向相反.所以有$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.对于任意数 λ,μ 及任意向量$\boldsymbol{a}$,向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$,$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$,$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 方向都相同,而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|(\lambda\mu)||\boldsymbol{a}|,$$

所以,

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

可直接验证向量与数的乘积有下列规律:

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 向量共线、共面的充要条件

下面两个命题给出向量共线与共面的充要条件.

命题 1.2 两个向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 k_1 与 k_2,使得 $k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{0}$.

证 必要性.设向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共线,如果 $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$,则 $|\boldsymbol{v}_1| \neq 0$,于是存在正实数 k,使 $|\boldsymbol{v}_2| = k|\boldsymbol{v}_1|$.当 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 方向相同时,$\boldsymbol{v}_2 = k\boldsymbol{v}_1$,于是,$\boldsymbol{v}_2 + (-k)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$;当 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 方向相反时,$\boldsymbol{v}_2 = -k\boldsymbol{v}_1$,于是,$\boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$.当 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$,则有 $\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$.总之,适当选择 k_1 与 k_2,确实总存在不全为零的实数 k_1 与 k_2,使得 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$.

充分性.若存在不全为零的实数 k_1 与 k_2,使得 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$.不失一般性,可设 $k_1 \neq 0$,则 $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{v}_2$,即 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共线.□

命题 1.3 三个向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 共面的充要条件是存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3,使得

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}.$$

证 必要性.设向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 共面.如果 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 中有两个向量共线,不失一般性,可设 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 共线.由命题 1.2 知,存在不全为零的实数 k_1 与 k_2,使得 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$.因而存在不全为零的实数 $k_1, k_2, 0$,使得 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$.

如果 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 互不共线,如图 6 所示,取从一点 O 出发的三个向量 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$ 分别等于向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$,过 A_3 分别作平行于 OA_2 与 OA_1 的直线,交 OA_1 与 OA_2 于 B_1 与 B_2(图 6),则向量 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OB_2}$ 分别与向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{OA_2}$ 共线,于是

$$\overrightarrow{OB_1} = k_1\,\overrightarrow{OA_1} = k_1\boldsymbol{v}_1, \overrightarrow{OB_2} = k_2\,\overrightarrow{OA_2} = k_2\boldsymbol{v}_2.$$

由平行四边形法则知

$$\boldsymbol{v}_3 = \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2.$$

于是有不全为零的实数 $k_1, k_2, -1$ 使 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + (-1)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$.

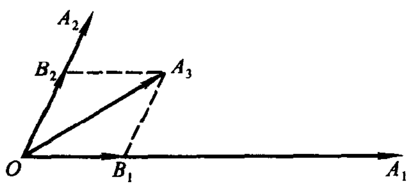

图 6

充分性.如果存在不全为零的实数 k_1, k_2, k_3,使 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$.不失一般性,设 $k_1 \neq 0$,则 $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{k_3}{k_1}\boldsymbol{v}_3$,这说明 $\boldsymbol{v}_1$ 在由向量 $\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$ 构成的平面内,即向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 共面.□

命题 1.4 在一条直线上取定一个非零向量 $\boldsymbol{e}_1$,则该直线上的任一向量 $\boldsymbol{v}$

可唯一地表示为 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1$，其中 x 为一个实数.

证　因为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是共线向量，由命题 1.2 可知，存在两个不全为零的实数 k_1 与 k_2，使 $k_1\boldsymbol{v}+k_2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$．若 $k_1=0$，由 $k_1\boldsymbol{v}+k_2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$，可推知 $k_2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$．因为 $\boldsymbol{e}_1$ 是非零向量，所以 $k_2=0$. 这与 k_1 和 k_2 不全为零矛盾，因此 $k_1\neq0$. 由 $k_1\boldsymbol{v}+k_2\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{v}=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{e}_1$，令 $x=-\dfrac{k_2}{k_1}$，则 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1$. 设 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1$，又 $\boldsymbol{v}=y\boldsymbol{e}_1$，则有

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1-y\boldsymbol{e}_1=(x-y)\boldsymbol{e}_1.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $x-y=0$，$x=y$，即 $\boldsymbol{v}$ 可唯一地表示为 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1$. □

到现在为止，已定义向量的两种运算，即向量的加法，数与向量的乘积. 向量的加法及向量与数的乘积统称为向量的**线性运算**. 定义了向量的线性运算之后，就可研究向量间的代数关系.

例 1　设点 M 是 $\triangle ABC$ 的形心，AD 是 BC 边上的中线，用向量线性运算证明：$AM=\dfrac{2}{3}AD$（图 7）.

证　因为向量 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AD}$ 在一条直线上，故可设 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}$. 又因为 D 是 BC 边的中点，由向量加法的平行四边形法则及图 7，有

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

因此，

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

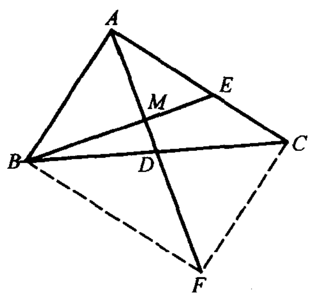

图 7

同理可设 $\overrightarrow{ME}=y\overrightarrow{BE}$. 因为 BE 是 AC 边上中线，有

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

因此

$$\overrightarrow{ME}=y(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}).$$

在$\triangle AME$中,$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}=\mathbf{0}$,即

$$\frac{x}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

由向量与数的乘积性质,加法的交换律和结合律有

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(x+y-1)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(x+y-1)\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\gamma}.$$

若$\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$,则$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$都平行于$\boldsymbol{\gamma}$.这与点$A$、$B$和$C$构成三角形矛盾.因此$\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.又因为$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$都是非零向量,所以

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=0,\\[2mm]\dfrac{1}{2}(x+y-1)=0.\end{cases}$$

解此方程,得$x=\frac{2}{3}$,即$AM=\frac{2}{3}AD$.

在例1中,由向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$不共线这个几何关系,推导出x与y之间的代数关系,即二元一次方程组.解这个二元一次方程组,很容易地得到了$AM=\frac{2}{3}AD$这个几何关系.借助代数与几何之间的内在联系,可以解决许多数学问题.

2.3　仿射坐标系　向量及其运算的坐标表示法

用向量方法处理问题的优点是比较直观,但向量运算不如数的运算方便.引入坐标系,在向量与有序数组之间建立一一对应关系,把几何问题转化成代数问题,亦可借助几何直观研究代数问题,这是17世纪数学的重大创新之一.坐标系有直角坐标系和仿射坐标系等等,首先介绍仿射坐标系.

1. 仿射坐标系

根据命题1.4,可建立任一直线L上的仿射坐标系.

在一直线L上取一个固定点O及非零向量$\boldsymbol{e}_1$,构成一个**仿射坐标系**,记为$\{O;\boldsymbol{e}_1\}$,其中点O称为**坐标原点**,$\boldsymbol{e}_1$称为**坐标向量**或**基**,所在直线称为**坐标轴**.对于直线L上的任一向量$\boldsymbol{v}$,有唯一的实数x,使得$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1$.$x$称为向量$\boldsymbol{v}$在坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1\}$下的坐标.对于直线$L$上任一点$M$,取向量$\overrightarrow{OM}$,称$\overrightarrow{OM}$为点$M$的**向径**,向量$\overrightarrow{OM}$的坐标$x$称为点$M$关于仿射坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1\}$的**仿射坐标**,点$M$可写为$M(x)$.

命题1.5　设$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$为一个平面上两个不共线的向量,则该平面上任一向量$\boldsymbol{v}$可唯一地表示为$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,其中$x,y$为两个实数.