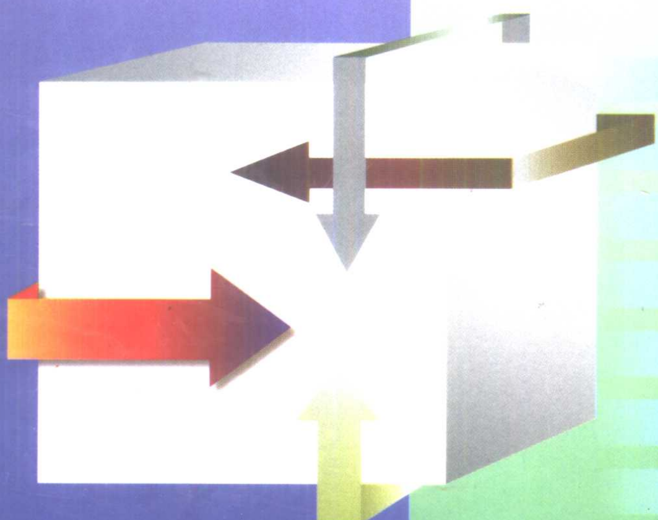
大学数学教程

第2卷 第2册

多元函数微积分、复变函数

龚冬保 魏 平



西安交通大学出版社

大学数学教程 第2卷 第2册 多元函数微积分、复变函数 龚冬保 魏平 西安交通大学出版社

大学数学教程

第2卷　第2册

多元函数微积分、复变函数

龚冬保　魏　平

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书主要内容是多元函数微分学与多元函数积分学，以及复变函数与数学物理方程的部分内容。

本教材在微分学中介绍了一般向量函数的微分概念及微分法，在微分应用中介绍了微分几何的初步知识、解析函数的基本概念及数学物理方程的一些基本内容；在积分学中，本教材将数值函数的积分与向量函数的积分分开介绍，将向量函数的积分与向量场结合，目的是使本教材与现代应用数学接轨，为学生在今后的工作与科研中打下良好的基础。

本书可供大学非数学专业的工科学生使用，也可作为有关数学教师、科技人员、工程技术人员及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程.第2卷.第2册，多元函数微积分、复变函数/龚冬保，魏平编著.—西安：西安交通大学出版社，2001.2

ISBN 7-5605-1379-4

Ⅰ.大… Ⅱ.①龚…②魏… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 ②复变函数—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 88031 号

*

西安交通大学出版社出版发行

（西安市兴庆南路 25 号　邮政编码:710049　电话:(029)2668316）

陕西省轻工印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本:787mm×1 092mm　1/16　印张:11　字数:259 千字

2001 年 2 月第 1 版　　2001 年 2 月第 1 次印刷

印数:0 001～3 000　　定价:14.00 元

前　　言

作为《大学数学教程》的这一册,主要内容是多元函数微分学与多元函数积分学,同时也讲述了复变函数与数理方程的部分内容。

与同类教材相比,这一册改革力度较大,主要表现在加强了向量分析的讲述,在微分中介绍了一般向量函数的微分概念及微分法;在微分应用中介绍了微分几何的初步知识;在积分学中,将数值函数的积分与向量函数的积分分开,而将向量函数的积分与向量场结合,目的之一是力图使本教材的体系与现代应用数学接轨,为学生在今后的工作与科研中打下自学基础。我们认为,对于非数学专业,加强向量分析的教学是十分必要的,这将有助于提高学生的数学素养和数学的应用意识。要达到这一目的,问题是如何能在有限的教学时数内,使学生掌握这些知识以及运用这些知识处理问题的方法。本书试图在这一方面进行尝试。我们主要是想用系统论的方法,以本教材的第1卷第1册和第2卷第1册的内容为主子系统,而将各部分内容有机地结合起来。因此,要学好本册内容,必须先学好上面两册的知识,同时应注意数值函数的微积分与向量函数微积分的差异与联系。

本书一方面将一些数理方程、复变函数的内容与多元函数微积分的内容有机地结合起来,另一方面,又将上述内容模块式地组合于系统之中,例如书中10.3节的偏微分方程初步,10.4节的解析函数,12.4节的复变函数的积分,12.5节的留数等各节,不学相关内容的专业可以不讲。既然是模块式的结合,需要讲授这些内容,也可以先不在本册中讲,而将这些内容提取出来,放在第2卷第3册中讲授。

本教材已先后在西安交通大学的教改班等班级进行了十多年的试验,但编成教材正式出版还是第一次,在修改中由于时间仓促,难免会有疏漏,加之这种新体系是否能适合时代的要求,是否符合一般的教学规律,有待进一步的实践检验。因此,恳请广大读者多提意见,不吝赐教,以便进一步修改、完善。

作者

2000.12

目　　录

第10章 多元函数微分学的应用

第11章 多元数值函数的积分学

第8章　多元函数、极限与连续性

8.1　欧氏空间 R^m 的完备性和紧性

8.1.1　点列的收敛性

(1) 两点间的距离

在代数与空间解析几何中,我们已经知道与三维空间一样,在 m 维欧氏空间 R^m 中,一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 可以看成为一个点,x_i 是点的坐标($i=1,2,\cdots,m$),$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 为另一点.我们用联接 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的向量的范数来定义两点间的距离.

定义 8.1　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 两点间的距离 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2}$$

易证明,距离的基本性质为(距离公理):

1°　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$,等号当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时成立;

2°　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

3°　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$　　(对 $\forall\,\boldsymbol{z}\in R^m$ 成立).

(2) R^m 中点列的收敛性

有了距离,便可定义点列的极限.设 $\boldsymbol{x}_n\in R^m$ 是一个点列,其中

$$\boldsymbol{x}_n=(x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})\quad(n=1,2,\cdots)$$

定义 8.2　若存在 R^m 中的定点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{a})=0$,便称点列 $\boldsymbol{x}_n$ 收敛,称 $\boldsymbol{a}$ 为其极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$$

与数列极限类似,点列极限有以下性质

1°　收敛点列的极限是唯一的;

2°　收敛点列必有界,即存在正数 M,使 $\|\boldsymbol{x}_n\|<M$,($n=1,2,\cdots$);

3°　若 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{b}$,$\alpha,\beta$ 为实数,则

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_n+\beta\boldsymbol{y}_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n+\beta\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\qquad(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\text{ 表示向量 }\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{b}\text{ 的内积;}$$

4°　$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{in}=a_i$,($i=1,2,\cdots,m$),即点列 $\boldsymbol{x}_n$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是每个分量的数列 x_{in} 收敛于 a_i.

8.1.2　开集与闭集

(1) 邻域、点与集合的关系

定义 8.3　设 $\boldsymbol{x}_0\in R^m$,$\delta>0$.称开"球"

$$U(\boldsymbol{x}_0,\delta) = \{\boldsymbol{x} \in R^m \mid \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) < \delta\}$$

为 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域,称 $U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta) = U(\boldsymbol{x}_0,\delta) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ 为去心邻域,如不强调球的半径 δ 时,$\boldsymbol{x}_0$ 的邻域记为 $U(\boldsymbol{x}_0)$,去心邻域记为 $U_0(\boldsymbol{x}_0)$.

设 $E \subset R^m$,$\boldsymbol{x}_0 \in R^m$.点 $\boldsymbol{x}_0$ 与点集 E 有下列三种可能的关系 .

(1) **$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的内点** 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域含于 E,即 $U(\boldsymbol{x}_0) \subset E$;

(2) **$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的外点** 存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$,使

$$U(\boldsymbol{x}_0) \cap E = \varnothing \quad (\text{或 } U(\boldsymbol{x}_0) \in E^c), E^c = R^m \setminus E \text{ 为} E \text{ 的补集}$$

(3) **$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的边界点** 对 $\boldsymbol{x}_0$ 的任意一个邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$,都有

$$U(\boldsymbol{x}_0) \cap E \neq \varnothing \quad \text{且} \quad U(\boldsymbol{x}_0) \cap E^c \neq \varnothing$$

点 $\boldsymbol{x}_0$ 与 E 的另一种重要关系是:

(4) **$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的聚点** 对于任一去心邻域 $U_0(\boldsymbol{x}_0)$,皆有 $U_0(\boldsymbol{x}_0) \cap E \neq \varnothing$.

聚点有下面的等价表述:

$\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的聚点$\Leftrightarrow \forall\, U(\boldsymbol{x}_0)$ 中都有 E 中无限个点

$\Leftrightarrow$ 存在互异的点列 $\boldsymbol{x}_n \in E$(当 $i \neq j$ 时,$\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_j$),使$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0$.

若 $\boldsymbol{x}_0 \in E$,但 $\boldsymbol{x}_0$ 又不是 E 的聚点时,称 $\boldsymbol{x}_0$ 是 E 的孤立点.

点集 E 的全部内点的集合称为E 的内部,记为 E°;E 的全部边界点的集合称为E 的边界,记为 ∂E;集合 E 与其全部聚点的并集,称为 E 的闭包,记为 $\bar{E}$.

(2) 开集与闭集

定义 8.4 设 $\boldsymbol{E} \subset R^m$,若 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^\circ$,称 $\boldsymbol{E}$ 为开集,又规定 $\varnothing$ 是开集;若 $\boldsymbol{E}^c = \boldsymbol{R}^m \setminus \boldsymbol{E}$ 是开集,称 $\boldsymbol{E}$ 为闭集.

例 8.1 R^m 是开集也是闭集.

例 8.2 $U(\boldsymbol{x}_0,R)$ 是开集,而 $\bar{U}(\boldsymbol{x}_0,R)$ 是闭集.

例 8.3 设 $\boldsymbol{a} = (a_1,\cdots,a_m)$,$\boldsymbol{b} = (b_1,\cdots,b_m)$,其中 $a_i < b_i (i = 1,\cdots,m)$,则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_m) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1,\cdots,m\}$$

是开集(开矩形),而

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_m) \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1,\cdots,m\}$$

是闭矩形.

用开集定义闭集,不易看出闭集的特征,我们可以给出以下一些等价的表述:

$\boldsymbol{E}$ 是闭集$\Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{E}}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_n \in E$ 是任意收敛点列,则$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n \in E$;

$\Leftrightarrow$ 若 $\boldsymbol{x} \overline{\in} E$,则 $\boldsymbol{x}$ 必为E 的外点.

只含有限个点的集合是闭集.只要研究开集的性质,便可知道闭集的性质.

定理 8.1a (1) 任意个开集的并集是开集;

(2) 有限个开集的交集是开集.

证 (1) 设 E_k 是开集,$E = \bigcup\limits_k E_k$,这里 E_k 可以是有限个,也可以是无限个.对 $\forall\, \boldsymbol{x} \in E$,必有 $\boldsymbol{x} \in E_l$,从而有 $\boldsymbol{x}$ 的一邻域$U(\boldsymbol{x}) \subset E_l$(因 E_l 是开集).即

$$U(x) \subset E_l \subset \bigcup_k E_k = E$$

因此，E 是开集.

(2) 设 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{n}E_k$，对 $\forall\, \boldsymbol{x}\in E$，必有 $\boldsymbol{x}\in E_k(k=1,2,\cdots,n)$，从而必有 $\boldsymbol{x}$ 的 n 个邻域 $U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subset E_k$，令 $\delta=\min\limits_{k=1,\cdots,n}\delta_k$，则

$$U(\boldsymbol{x},\delta)\subset U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subset E_k\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

即

$$U(\boldsymbol{x},\delta)\subset\bigcap_{k=1}^{n}E_k=E$$

注：无限个开集之交不一定是开集. 如在 R 中

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=[0,1]\text{ 是闭集.}$$

与本定理相应的闭集的性质如下.

定理 8.1b (1) 任意个闭集的交集是闭集；

(2) 有限个闭集的并集是闭集.

(3) 开区域与闭区域

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 R^m 中的两个点，则

$$\overline{\boldsymbol{xy}}=\{\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{z}=t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y},\quad 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

表示以 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为端点的直线段.

开区域：设 Ω 是 R^m 中的点集，若对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$，存在有限个点 $\boldsymbol{x}_i\in\Omega$(其中 $i=0,1,2,\cdots,k$；$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{y}$)，使折线

$$\overline{\boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{x}_i}=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}=t\boldsymbol{x}_{i-1}+(1-t)\boldsymbol{x}_i\}\subset\Omega\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

则称 Ω 是(折线)连通集. 若 Ω 又是开集，则称 Ω 为开区域；**如 Ω 是开区域，则称 $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ 为闭区域**.

8.1.3 R^m 中的一些重要集及特征

(1) 有界集和无界集

设 $E\subset R^m$，若对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in E$，存在正常数 M，使 $\|\boldsymbol{x}\|<M$，称 E 是有界集；否则称 E 为无界集.

(2) 凸集

设 $E\subset R^m$，若对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$，有 $\overline{\boldsymbol{xy}}\subset E$，称 E 为凸集.

(3) 集合的直积

设 $A\subset R^m$，$B\subset R^n$，对 $\forall\,\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)\in A$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in B$，有 $z=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n)\in R^{m+n}$，由所有的 z 点组成的 R^{m+n} 中的集合记为 $A\times B$，称为 A 与 B 的直积.

例 8.4 $[a,b]\subset R$，$[c,d]\subset R$，$[a,b]\times[c,d]$ 为平面矩形域.

例 8.5 设 $D\subset R^2$，则 $D\times[0,H]$ 表示以 D 为底高为 H 的柱体(如图 8.1). 同样，若 $\Omega\subset R^m$，则 $\Omega\times[0,T]$ 表示以 Ω 为底高为 T 的 $m+1$ 维柱体.

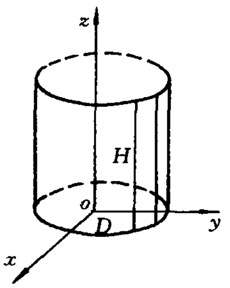


图 8.1

(4) 点到集合的距离，集合的直径

$x \in R^m, E \subset R^m$，则点 x 到 E 的距离为

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y)$$

即 E 中各点与 x 点间距离的下确界.

点集 E 的直径为

$$\mathrm{d}(E) = \sup_{x, y \in E} \rho(x, y)$$

即 E 中任意两点间距离的上确界.

8.1.4 R^m 的完备性

在学习一元函数时，我们讲了实数的重要性质，其中柯西审敛原理反映了实数的完备性，成为极限理论的基础. 柯西原理容易推广到一般的距离空间. 这里主要讲 R^m 中的柯西原理.

定义 8.5 设点列 $x_n \in R^m$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，对 $n > N$ 及任意正整数 p，有

$$\| x_{n+p} - x_n \| < \varepsilon$$

成立，则称点列 x_n 为 R^m 中的一个基本点列(也称为柯西列).

定理 8.2 (完备性定理，柯西审敛原理)

点列 $x_n \in R^m$ 收敛 $\Leftrightarrow x_n$ 是基本点列.

证 设 $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{mn})$，则 x_n 收敛的充要条件是 m 个数列 x_{in} 收敛. 由数列的柯西原理，我们只要证明 x_n 为基本点列的充要条件是 m 个数列 x_{in} 是基本数列($i = 1, 2, \cdots, m$)，而这只要用下面的不等式就可以证明.

$$| x_{in+p} - x_{in} | \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_{in+p} - x_{in})^2} = \| x_{n+p} - x_n \| \leqslant m \max_{i=1,\cdots,m} | x_{in+p} - x_{in} |$$

详细的证明过程请读者自行完成.

8.1.5 R^m 中有界闭集的紧性

(1) 列紧性——聚点原理

定理 8.3 E 是 R^m 中的有界无穷点集，则 E 至少有一个聚点.

证 设 $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{mn}) \in E$ 是各项不同的点列(即 $i \neq j$ 时，$x_i \neq x_j$). 我们先看有界数列 x_{1n}，它有收敛的子列 $x_{1n_k^{(1)}}$. 这样，我们得到 x_n 的一个子列

$$x_{n_k^{(1)}} = (x_{1n_k^{(1)}}, x_{2n_k^{(1)}}, \cdots, x_{mn_k^{(1)}})$$

又 $x_{2n_k^{(1)}}$ 有收敛子列 $x_{2n_k^{(2)}}$，这时得

$$x_{n_k^{(2)}} = (x_{1n_k^{(2)}}, x_{2n_k^{(2)}}, \cdots, x_{mn_k^{(2)}})$$

其中 $x_{1n_k^{(2)}}$ 是 $x_{1n_k^{(1)}}$ 的子列，故仍收敛. 这样下去便可得

$$x_{n_k^{(m)}} = (x_{1n_k^{(m)}}, x_{2n_k^{(m)}}, \cdots, x_{mn_k^{(m)}})$$

是 x_n 的收敛子列.

推论 R^m 中的有界点列 x_n 必有收敛的子列.

若集合 E 中任一无穷子集必有聚点，且此聚点亦在 E 中，称 E 为列紧集，由聚点原理易知

$$E \subset R^m \text{ 是有界闭集} \Leftrightarrow E \text{ 为列紧集}$$

(2) 紧性——有限覆盖定理

定义 8.6 设 E_α 是 R^m 中的开集(α 可以是 $1,2,\cdots,k$ 个有限数,也可以是无限数),若 $E \subset \bigcup\limits_\alpha E_\alpha$,称 $\{E_\alpha\}$ 为 E 的一个开覆盖,若在 $\{E_\alpha\}$ 中存在有限个集合 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 使 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^k E_i$,则称 $E_1,\cdots,E_k$ 是 E 的有限子覆盖.

若一个集合 E 的任一开覆盖都有有限子覆盖,则称 E 为紧集.

定理 8.4(有限覆盖定理) $E \subset R^m$ 是有界闭集 $\Leftrightarrow E$ 是紧集.

证 "$\Leftarrow$"设 E 是 R^m 中的紧集,对 $\forall \boldsymbol{x} \in E$,作 $U(\boldsymbol{x},\delta)$(δ 是固定正常数),则 $E \subset \bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in E} U(\boldsymbol{x},\delta)$,因此有有限覆盖,即 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k \in E$,使 $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^k U(\boldsymbol{x}_i,\delta)$,故 E 是有界集.下面证明 E 是闭集,只要证明 E 的任意聚点仍在 E 中(E 是由有限个孤立点组成的集时用不着证明).若有聚点 $\boldsymbol{x}_0 \overline{\in} E$,则对 $\forall \boldsymbol{x} \in E$,有 $\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}\| = \delta_x > 0$ 及各项不同的点列 $\boldsymbol{x}_n \in E, \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$.这样,对 $\forall \boldsymbol{x} \in E$ 作 $U(\boldsymbol{x},\frac{\delta_x}{2})$, $\bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in E} U(\boldsymbol{x},\frac{\delta_x}{2})$ 是 E 的开覆盖,而对 $\forall \boldsymbol{x} \in E$ 及充分大的 n,使 $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| < \frac{\delta_x}{2}$。于是对充分大的 n 有

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n\| \geqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| - \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| > \delta_x - \frac{\delta_x}{2} = \frac{\delta_x}{2}$$

即 n 充分大后的一切 $\boldsymbol{x}_n \overline{\in} U(\boldsymbol{x},\frac{\delta_x}{2})$,每个 $U(\boldsymbol{x},\frac{\delta_x}{2})$ 最多只含有限个点列 $\boldsymbol{x}_n$ 中的点,从而点列不可能被有限个 $U(\boldsymbol{x},\frac{\delta_x}{2})$ 这样的开集覆盖,这与 E 是紧集矛盾.因此,$\boldsymbol{x}_0 \in E$.

"$\Rightarrow$"设 E 是有界闭集,$\{A_\alpha\}$ 是 E 的任一开覆盖,我们要证明 E 可被有限个 A_α 的并覆盖.分以下两步证明.

(1) 证明存在 ε_0,使 $\forall \boldsymbol{x} \in E$,有 $U(\boldsymbol{x},\varepsilon_0) \subset A_\alpha$.若不然,取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$,知有 $\boldsymbol{x}_n \in E$,使 $U(\boldsymbol{x}_n,\frac{1}{n})$ 不含于任何一个 $A_\alpha \in \{A_\alpha\}$ 之中,$\boldsymbol{x}_n$ 是有界点集,因此有收敛子列.不妨将收敛子列仍记为 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0 \in E$,则由于 $\boldsymbol{x}_0 \in E$,故 $\boldsymbol{x}_0 \in A_\alpha$,因此存在 $U(\boldsymbol{x}_0,\frac{2}{N}) \subset A_\alpha$.另一方面,取 $n > N_0 > N$,使

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| < \frac{1}{N}$$

于是,对 $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_n,\frac{1}{n})$ 有

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n\| + \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{N} < \frac{2}{N}$$

即 $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0,\frac{2}{N}) \subset A_\alpha$.这说明,$U(\boldsymbol{x}_n,\frac{1}{n}) \subset A_\alpha$,矛盾.

(2) 证明存在有限个点 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k \in E$,使 $\bigcup\limits_{i=1}^k U(\boldsymbol{x}_i,\varepsilon_0) \supset E$.若不然,任取 $\boldsymbol{x}_1 \in E$,$U(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon_0)$ 不覆盖 E,故有 $\boldsymbol{x}_2 \in E, \boldsymbol{x}_2 \overline{\in} U(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon_0)$.又 $U(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon_0) \cup U(\boldsymbol{x}_2,\varepsilon_0)$ 不覆盖 E,故有 $\boldsymbol{x}_3 \in E, \boldsymbol{x}_3 \overline{\in} U(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon_0) \cup U(\boldsymbol{x}_2,\varepsilon_0) \cdots$.为此,得点列 $\boldsymbol{x}_n \in E, \boldsymbol{x}_n \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} U(\boldsymbol{x}_i, \varepsilon_0)$,对任意

自然数 n 和 p，$\| \boldsymbol{x}_{n+p} - \boldsymbol{x}_n \| \geqslant \varepsilon_0$，说明 $\boldsymbol{x}_n$ 的任意子列不可能是基本列，但 $\boldsymbol{x}_n$ 是有界点列必有收敛子列，矛盾. 因此，有有限点 $\boldsymbol{x}_i \in E \quad (i = 1,2,\cdots,k)$，使

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(\boldsymbol{x}_i, \varepsilon_0)$$

由(1)知，对每个 $\boldsymbol{x}_i$ 有 $A_{\alpha_i} \in \{A_\alpha\}$，使 $U(\boldsymbol{x}_i, \varepsilon_0) \subset A_{\alpha_i}$，于是

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(\boldsymbol{x}_i, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_{\alpha_i}$$

即 $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \cdots, A_{\alpha_k}$ 是 E 的有限覆盖.

本小节的两个定理证明，在 R^m 中，有界闭集与列紧集及紧集都是等价的.

思考与练习题

1. 证明定义 8.1 中定义的距离满足三角不等式

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$$

在 R^m 中，设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ 定义

$$\rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} | x_i - y_i |$$

证明这样定义的距离满足距离公理.

2. 证明在题 1 中两种不同距离意义下，点列 $\boldsymbol{x}_n$ 有相同的敛散性，且当 $\boldsymbol{x}_n$ 为收敛点列时，极限也相同.

3. 把复平面作为 R^2 的模型，试写出点列极限、柯西原理、聚点原理和有限覆盖定理，并证明聚点原理.

8.2 多元函数、极限与连续性

8.2.1 数量函数与向量函数

(1) 函数的定义

定义 8.7 设 $\Omega \subset R^m$，若存在映射 f，使对 $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$，都有唯一的 $\boldsymbol{y} \in R^l$ 与之对应，则称 f 是由 Ω 至 R^l 的一个向量函数，记为 $f: \Omega \to R^l$. 在微积分中又常记为

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$$

Ω 为函数的定义域，$f(\Omega)$ 为函数的值域.

值得注意的是，在古典分析中，称 $\boldsymbol{x}$ 为自变量，$\boldsymbol{y}$ 为函数，因此说函数 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. 而近代分析中称映射 f 是函数，在不引起混淆的情况下，我们在后面也称 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的(向量)函数.

设 $\quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_l) = (f_1(x_1, x_2, \cdots, x_m), \cdots, f_l(x_1, x_2, \cdots, x_m))$$

那么，向量函数也可记为

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_l(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \cdots, x_m) \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

当 $l = 1$ 时，称

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

为 m 元的数量函数.

当 $l > 1$ 时,向量函数实质上是一个数量函数组

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, l)$$

因此,研究向量函数的基础在于研究数量函数,而多元数量函数最简单的是二元函数:$z = f(x, y)$. 把二元函数研究得比较透彻,就容易把握一般的数量函数,进而掌握一般的向量函数.

当 $m = 1, l = 3$ 时,向量函数常写成以下形式:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

即 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$,表示空间曲线. 若 t 表示时间,$\boldsymbol{r}$ 表示位移,那么,(8.2) 式的向量函数就是物理学中所说的质点的运动方程. 今后,我们也用 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 表示空间曲线的方程.

点变换 T:

$$\begin{cases} u = a_{11}x + a_{12}y + a_{12}z \\ v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

即

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AX}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

是 R^3 到 R^3 的映射.

当 R^2 为复平面时,则由 $z = x + \mathrm{i}y \in R^2$ 到 $w = u + \mathrm{i}v \in R^2$ 的映射

$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

就是复变函数.

(2) 二元函数的图像与等值面

对二元数量函数 $z = f(x, y)$,由空间解析几何知识,它表示一张曲面 Σ,如图 8.2,这张曲面在 xoy 面上的投影是函数的定义域 D,过 D 内一点 $(x, y, 0)$ 作平行 z 轴的直线,与 Σ 有唯一交点 $(x, y, f(x, y))$. 称曲面 Σ 是二元函数的图像. 二元以上函数的图像(图 8.3),可以想象为四维以上空间的"曲面",或称为流形.

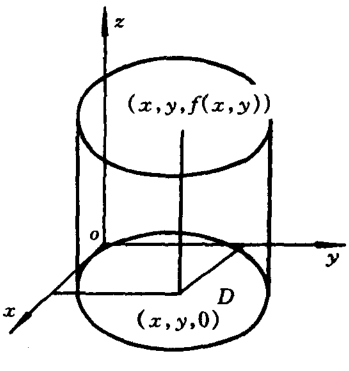


图 8.2

设在二元函数 $z = f(x, y)$ 中,令 $z = c$,得 xoy 面上的曲线 γ 为

$$\begin{cases} f(x, y) = c \\ z = 0 \end{cases}$$

称 γ 为此函数的等值线(又称等高线、等位线). 如图 8.3 用 z

$= c$ 平面截曲面 $\sum: z = f(x,y)$，得的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$$，Γ 在 xoy 上的投影即为等高线 γ.

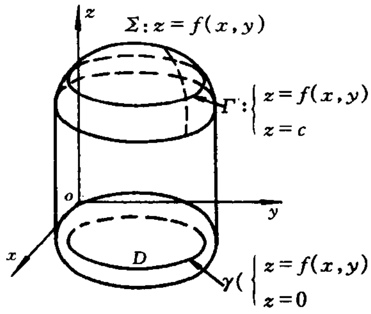


图 8.3

同样，对数值函数 $u = f(x_1,\cdots,x_m)$，令 $u = c$，得 R^m 中的曲面流形 $S: f(x_1,\cdots,x_m) = c$，称为该函数的等值面或等位面(确切地说是等值流形).

8.2.2 多元函数的极限

(1) 极限的定义

从无限逼近意义上讲，多元函数的极限与一元函数的极限本质上是一样的.

定义 8.8 设 $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ 是 $R^m \supset \Omega \to R^l$ 的函数，$\boldsymbol{x}_0$ 是 Ω 的聚点，$\boldsymbol{a} = (a_1,\cdots,a_l)$ 是 R^l 中一定点.若对 $\forall\, U(\boldsymbol{a},\varepsilon)$，都存在 $U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta)$，只要 $\boldsymbol{x} \in U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta) \cap \Omega$，便有 $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{a},\varepsilon)$ 成立，就称 $\boldsymbol{a}$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的极限，记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$$

或

$$f(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0)$$

也可以记为 $\lim\limits_{(x_1,\cdots,x_m)\to(x_{01},\cdots,x_{0m})} f(x_1,\cdots,x_m) = \lim\limits_{\substack{x_1\to x_{01}\\ x_2\to x_{02}\\ \cdots \\ x_m\to x_{0m}}} f(x_1,\cdots,x_m) = \boldsymbol{a}$

当 $m > 1, l = 1$ 时，这个定义就是多元数量函数极限的定义.下面，我们用不等式形式来表述数量函数的极限.

设 $y = f(x_1,\cdots,x_m)$ 在 Ω 上有定义，$\boldsymbol{x}_0 = (x_{01},x_{02},\cdots,x_{0m})$ 是 Ω 的一个聚点，a 是一个常数.若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，只要 $\boldsymbol{x} \in \Omega$，且 $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$，便有

$$|f(\boldsymbol{x}) - a| < \varepsilon$$

成立，则称 a 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的极限，记为 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = a$.

当 $l > 1$ 时，由定义不难得出 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f_i(\boldsymbol{x}) = a_i (i = 1,2,\cdots,l)$.即向量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 以点 $\boldsymbol{a}$ 为极限的充要条件是每个分量函数 $f_i(\boldsymbol{x})$ 以 $\boldsymbol{a}$ 的分量 a_i 为极限.因此，研究多元向量函数极限的基础在数量函数的极限.

例 8.6 用定义证明 $\lim\limits_{x\to0,y\to0} x\sin\dfrac{1}{y} = 0$.

证 因为 $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$ 的定义域为 $\Omega = \{(x,y) \mid y \neq 0\}$，并且

$$|f(x,y) - 0| \leqslant \left|x\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

所以，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < \|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时，有

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\sin\frac{1}{y} = 0$$

(2) 多元函数极限与一元函数极限的差异

从无限逼近的本质上讲,多元函数与一元函数的极限是一样的,但一元函数的自变量 x 只是沿数轴从左、右两侧逼近 x_0,而多元函数的自变量 $\boldsymbol{x}$ 是 R^m 中的动点,逼近 $\boldsymbol{x}_0$ 时不仅有无限多方向,还有无限种方式.这就是量变引起了质变,使多元函数的极限比一元函数的更复杂.我们只以二元数量函数为例,来说明这种差异.

例 8.7 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

试讨论$(x,y)\to(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限.

解 令(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋向于$(0,0)$,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

沿不同直线所得极限不同,故 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 点的极限不存在.

例 8.8 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$,研究$(x,y)\to(0,0)$ 的极限.

解 如果像例 8.7 那样,令 $y=kx$,则不论 k 为何数,皆有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}f(x,y)=0$,但还不能下结论说此函数在原点的极限为零.因为,如换一种方式,比如沿抛物线 $y=kx^2$ 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

因此 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 点的极限还是不存在.这就是多元函数极限比一元函数极限复杂之所在,沿任何直线方向的极限存在且相等,但这点的极限仍有不存在的可能.

(3) 极限的运算性质

由于多元函数与一元函数极限的共同性质,可以证明,多元函数极限在运算上有如下性质.

设 $f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})$ 都在 $\Omega\subset R^m$ 上有定义,且 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\in R^l,\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\in R^l$.则

1° $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}[\alpha f(\boldsymbol{x})+\beta g(\boldsymbol{x})]=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ (α,β 是任意实数);

2° $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}(f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,若 $l=1$,内积即是乘积;

3° 当 $l=1$,且 $b\neq 0$ 时,$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}=\dfrac{a}{b}$;

4° 函数极限的柯西原理.设 $f(\boldsymbol{x}):R^m\supset\Omega\to R^l,f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点有极限的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0$,有 $U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta)$,只要 $\boldsymbol{x}_i\in U_0(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ $(i=1,2)$,就有

$$\|f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1)\|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

(4) 累次极限

以二元数值函数为例,二元函数在一点的极限也称为 $f(x,y)$ 在该点的二重极限.如 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 是二重极限,而当固定一变量如 y,让另一个变量 x 变化时,二元函数实际上只是一元函数.令 $x\to x_0$ 取极限,得到一个与 x 无关的函数,再令 $y\to y_0$ 取