

大学数学教程
第2卷 第2册

多元函数微积分、复变函数

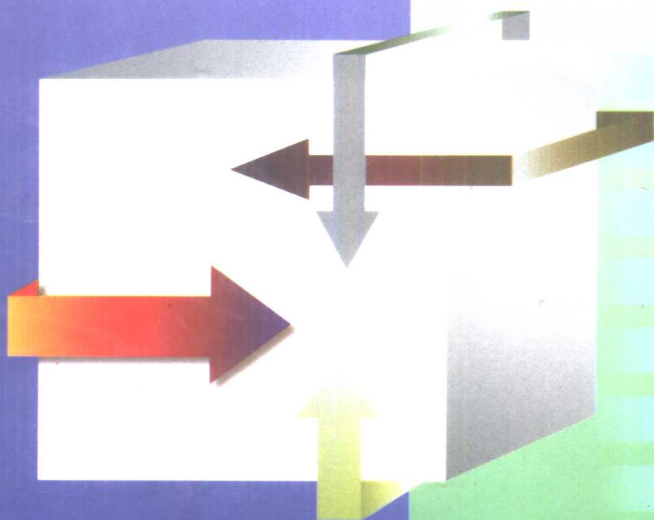
龚冬保 魏平

西安交通大学出版社

大学数学教程

第2卷 第2册
多元函数微积分、复变函数

龚冬保 魏平



西安交通大学出版社

大学数学教程

第2卷 第2册

多元函数微积分、复变函数

龚冬保 魏 平

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书主要内容是多元函数微分学与多元函数积分学,以及复变函数与数学物理方程的部分内容。

本教材在微分学中介绍了一般向量函数的微分概念及微分法,在微分应用中介绍了微分几何的初步知识、解析函数的基本概念及数学物理方程的一些基本内容;在积分学中,本教材将数值函数的积分与向量函数的积分分开介绍,将向量函数的积分与向量场结合,目的是使本教材与现代应用数学接轨,为学生在今后的工作与科研中打下良好的基础。

本书可供大学非数学专业的工科学生使用,也可作为有关数学教师、科技人员、工程技术人员及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程.第2卷.第2册,多元函数微积分、复变函数/龚冬保,魏平编著.一西安:西安交通大学出版社,2001.2

ISBN 7-5605-1379-4

I.大… II.①龚…②魏… III.①微积分—高等学校—教材 ②复变函数—高等学校—教材 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 88031 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:11 字数:259 千字
2001 年 2 月第 1 版 2001 年 2 月第 1 次印刷
印数:0 001~3 000 定价:14.00 元

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题,请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换。发行科电话:(029)2668357,2667874

前 言

作为《大学数学教程》的这一册,主要内容是多元函数微分学与多元函数积分学,同时也讲述了复变函数与数理方程的部分内容。

与同类教材相比,这一册改革力度较大,主要表现在加强了向量分析的讲述,在微分中介绍了一般向量函数的微分概念及微分法;在微分应用中介绍了微分几何的初步知识;在积分学中,将数值函数的积分与向量函数的积分分开,而将向量函数的积分与向量场结合,目的之一是力图使本教材的体系与现代应用数学接轨,为学生在今后的工作与科研中打下自学基础。我们认为,对于非数学专业,加强向量分析的教学是十分必要的,这将有助于提高学生的数学素养和数学的应用意识。要达到这一目的,问题是如何能在有限的教学时数内,使学生掌握这些知识以及运用这些知识处理问题的方法。本书试图在这一方面进行尝试。我们主要是想用系统论的方法,以本教材的第1卷第1册和第2卷第1册的内容为主子系统,而将各部分内容有机地结合起来。因此,要学好本册内容,必须先学好上面两册的知识,同时应注意数值函数的微积分与向量函数微积分的差异与联系。

本书一方面将一些数理方程、复变函数的内容与多元函数微积分的内容有机地结合起来,另一方面,又将上述内容模块式地组合于系统之中,例如书中10.3节的偏微分方程初步,10.4节的解析函数,12.4节的复变函数的积分,12.5节的留数等各节,不学相关内容的专业可以不讲。既然是模块式的结合,需要讲授这些内容,也可以先不在本册中讲,而将这些内容提取出来,放在第2卷第3册中讲授。

本教材已先后在西安交通大学的教改班等班级进行了十多年的试验,但编成教材正式出版还是第一次,在修改中由于时间仓促,难免会有疏漏,加之这种新体系是否能适合时代的要求,是否符合一般的教学规律,有待进一步的实践检验。因此,恳请广大读者多提意见,不吝赐教,以便进一步修改、完善。

作者
2000.12

目 录

第 8 章 多元函数、极限与连续性

8.1 欧氏空间 R^m 的完备性和紧性	(1)
8.1.1 点列的收敛性	(1)
8.1.2 开集与闭集	(1)
8.1.3 R^m 中的一些重要集及特征	(3)
8.1.4 R^m 的完备性	(4)
8.1.5 R^m 中有界闭集的紧性	(4)
思考与练习题	(6)
8.2 多元函数、极限与连续性	(6)
8.2.1 数量函数与向量函数	(6)
8.2.2 多元函数的极限	(8)
8.2.3 多元函数的连续性	(10)
8.3 课内练习	(13)
习题 8 (A)	(13)
习题 8 (B)	(14)
独立作业 8	(15)

第 9 章 多元函数微分学

9.1 多元数量函数的偏导数和全微分	(16)
9.1.1 多元函数的偏导数	(16)
9.1.2 全微分	(17)
9.1.3 多元函数连续、可导与可微的关系	(17)
9.1.4 混合偏导数与求导顺序无关的条件	(19)
9.1.5 多元复合函数的求导法则	(19)
9.1.6 一阶全微分形式的不变性	(20)
9.2 多元向量函数的导数与微分	(21)
9.2.1 线性变换	(21)
9.2.2 多元向量函数的微分	(22)
9.3 多元向量函数的复合求导法及其应用	(24)
9.3.1 多元向量函数的复合求导法则	(24)
9.3.2 反函数存在定理与微分法	(25)
9.3.3 隐函数存在定理及微分法	(26)

9.3.4 变量代换	(27)
9.3.5 泰勒公式	(28)
9.4 课内练习	(30)
习题 9 (A)	(31)
习题 9 (B)	(32)
独立作业 9	(33)

第 10 章 多元函数微分学的应用

10.1 在几何学上的应用	(34)
10.1.1 空间曲线的切向量、切线与法平面	(34)
10.1.2* 空间曲线的伴随三面形	(35)
10.1.3 空间曲面的法向量、切平面与法线方程	(36)
10.2 多元函数的极值与条件极值	(38)
10.2.1 极值	(38)
10.2.2 多元函数的最大、最小值求法	(39)
10.2.3 条件极值与拉格朗日乘数法	(40)
习题 10.1~10.2(A)	(44)
习题 10.1~10.2(B)	(44)
10.3 偏微分方程初步	(45)
10.3.1 二阶线性偏微分方程基本概念	(45)
10.3.2 二阶线性偏微分方程的化简	(45)
10.3.3 一维波动方程柯西问题的解法	(47)
10.4 解析函数	(48)
10.4.1 复变函数的导数概念	(48)
10.4.2 可导函数的性质	(49)
10.4.3 解析函数	(49)
习题 10.3~10.4(A)	(50)
习题 10.3~10.4(B)	(51)
独立作业 10	(51)

第 11 章 多元数值函数的积分学

11.1 重积分的概念及性质	(53)
11.1.1 质量问题	(53)
11.1.2 重积分的定义	(54)
11.1.3 重积分的性质	(55)
习题 11.1(A)	(57)
习题 11.1(B)	(58)
11.2 二重积分的计算和应用	(58)
11.2.1 二重积分在直角坐标下的计算	(58)

11.2.2	二重积分在极坐标下的计算	(62)
11.2.3*	二重积分的换元法	(66)
11.2.4	二重积分的应用	(70)
习题 11.2(A)		(73)
习题 11.2(B)		(75)
11.3	三重积分的计算及应用	(76)
11.3.1	三重积分在直角坐标系下的计算	(76)
11.3.2	三重积分在柱坐标系下的计算	(79)
11.3.3	三重积分在球坐标系下的计算	(81)
11.3.4	三重积分的应用	(85)
习题 11.3(A)		(88)
习题 11.3(B)		(90)
11.4	对弧长的曲线积分与对面积的曲面积分的概念及性质	(91)
11.4.1	非均匀物质曲线与曲面的质量与第一类曲线积分、曲面积分	(91)
11.4.2	第一类线积分的计算	(93)
11.4.3	第一类曲面积分的计算与应用	(95)
习题 11.4(A)		(97)
习题 11.4(B)		(97)
独立作业 11		(97)
第 11 章复习题		(98)

第 12 章 向量场, 第二类曲线与曲面积分

12.1	向量场	(100)
12.1.1	不稳定场与稳定场	(100)
12.1.2	向量场的流线	(100)
12.2	对坐标的曲线积分的概念与计算	(101)
12.2.1	场力沿曲线作功的问题与第二类曲线积分	(101)
12.2.2	第二类曲线积分的计算	(104)
习题 12.2		(106)
12.3	格林公式、平面曲线积分与路径无关的条件	(106)
12.3.1	格林公式	(106)
12.3.2	平面曲线积分与路径无关的条件	(111)
习题 12.3(A)		(118)
习题 12.3(B)		(118)
12.4	复变函数的积分	(119)
12.4.1	复变函数积分的定义	(119)
12.4.2	积分存在的条件及其算法	(120)
12.4.3	柯西 - 古萨 (Cauchy - Goursat) 基本定理	(121)
12.5	留数	(124)

12.5.1 函数罗伦级数展开式的证明·····	(124)
12.5.2 留数·····	(125)
12.5.3 留数在计算定积分中的应用举例·····	(126)
习题 12.4~12.5(A)·····	(128)
习题 12.4~12.5(B)·····	(129)
12.6 第二类曲面积分·····	(131)
12.6.1 流量问题与第二类曲面积分·····	(131)
12.6.2 第二类曲面积分的计算·····	(133)
12.7 高斯公式与散度·····	(135)
12.7.1 高斯公式·····	(135)
12.7.2 通量与通量密度·····	(137)
12.7.3 散度的定义及其计算·····	(137)
习题 12.6~12.7(A)·····	(141)
12.8 斯托克斯公式与旋度·····	(142)
12.8.1 斯托克斯(Stokes)公式·····	(142)
12.8.2 环量与环量密度·····	(144)
12.8.3 旋度的定义及其计算公式·····	(144)
12.9 梯度、散度、旋度的运算法则,几种特殊向量场·····	(147)
12.9.1 哈密尔顿(Hamilton)算子·····	(147)
12.9.2 无旋场·····	(148)
12.9.3 无源场·····	(150)
12.9.4 调和场·····	(152)
12.9.5* 梯度、旋度和散度对场的确定·····	(152)
习题 12.8~12.9(A)·····	(154)
习题 12.8~12.9(B)·····	(155)
第 11、12 章思考题·····	(156)
线、面积分及场论综合习题·····	(156)
独立作业 12·····	(158)

附录 习题参考答案·····	(161)
----------------	-------

第8章 多元函数、极限与连续性

8.1 欧氏空间 R^m 的完备性和紧性

8.1.1 点列的收敛性

(1) 两点间的距离

在代数与空间解析几何中,我们已经知道与三维空间一样,在 m 维欧氏空间 R^m 中,一个向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 可以看成为一个点, x_i 是点的坐标 ($i = 1, 2, \dots, m$), $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 为另一点. 我们用联接 x, y 的向量的范数来定义两点间的距离.

定义 8.1 x, y 两点间的距离 $\rho(x, y)$ 为

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

易证明,距离的基本性质(距离公理):

- 1° $\rho(x, y) \geq 0$, 等号当且仅当 $x = y$ 时成立;
- 2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3° $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (对 $\forall z \in R^m$ 成立).

(2) R^m 中点列的收敛性

有了距离,便可定义点列的极限. 设 $x_n \in R^m$ 是一个点列, 其中

$$x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

定义 8.2 若存在 R^m 中的定点 $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$, 便称点列 x_n 收敛, 称 a 为其极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

与数列极限类似, 点列极限有以下性质

- 1° 收敛点列的极限是唯一的;
- 2° 收敛点列必有界, 即存在正数 M , 使 $\|x_n\| < M, (n = 1, 2, \dots)$;
- 3° 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \alpha, \beta$ 为实数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha a + \beta b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (a, b) \quad (a, b) \text{ 表示向量 } a \text{ 与 } b \text{ 的内积};$$

4° $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = a_i, (i = 1, 2, \dots, m)$, 即点列 x_n 收敛于 a 的充要条件是每个分量的数列 x_{in} 收敛于 a_i .

8.1.2 开集与闭集

(1) 邻域、点与集合的关系

定义 8.3 设 $x_0 \in R^m, \delta > 0$. 称开“球”

$$U(x_0, \delta) = \{x \in R^m \mid \rho(x, x_0) < \delta\}$$

为 x_0 的 δ 邻域, 称 $U_0(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ 为去心邻域, 如不强调球的半径 δ 时, x_0 的邻域记为 $U(x_0)$, 去心邻域记为 $U_0(x_0)$.

设 $E \subset R^m, x_0 \in R^m$. 点 x_0 与点集 E 有下列三种可能的关系.

(1) x_0 是 E 的内点 存在 x_0 的邻域含于 E , 即 $U(x_0) \subset E$;

(2) x_0 是 E 的外点 存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使

$$U(x_0) \cap E = \emptyset \quad (\text{或 } U(x_0) \subset E^c), E^c = R^m \setminus E \text{ 为 } E \text{ 的补集}$$

(3) x_0 是 E 的边界点 对 x_0 的任意一个邻域 $U(x_0)$, 都有

$$U(x_0) \cap E \neq \emptyset \quad \text{且} \quad U(x_0) \cap E^c \neq \emptyset$$

点 x_0 与 E 的另一种重要关系是:

(4) x_0 是 E 的聚点 对于任一去心邻域 $U_0(x_0)$, 皆有 $U_0(x_0) \cap E \neq \emptyset$.

聚点有下面的等价表述:

x_0 是 E 的聚点 $\Leftrightarrow \forall U(x_0)$ 中都有 E 中无限个点

$$\Leftrightarrow \text{存在互异的点列 } x_n \in E (\text{当 } i \neq j \text{ 时, } x_i \neq x_j), \text{ 使 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

若 $x_0 \in E$, 但 x_0 又不是 E 的聚点时, 称 x_0 是 E 的孤立点.

点集 E 的全部内点的集合称为 E 的内部, 记为 E° ; E 的全部边界点的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E ; 集合 E 与其全部聚点的并集, 称为 E 的闭包, 记为 $\bar{E}$.

(2) 开集与闭集

定义 8.4 设 $E \subset R^m$, 若 $E = E^\circ$, 称 E 为开集, 又规定 $\emptyset$ 是开集; 若 $E^c = R^m \setminus E$ 是开集, 称 E 为闭集.

例 8.1 R^m 是开集也是闭集.

例 8.2 $U(x_0, R)$ 是开集, 而 $\bar{U}(x_0, R)$ 是闭集.

例 8.3 设 $a = (a_1, \dots, a_m), b = (b_1, \dots, b_m)$, 其中 $a_i < b_i (i = 1, \dots, m)$, 则

$$(a, b) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, m\}$$

是开集(开矩形), 而

$$[a, b] = \{x = (x_1, \dots, x_m) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$$

是闭矩形.

用开集定义闭集, 不易看出闭集的特征, 我们可以给出以下一些等价的表述:

E 是闭集 $\Leftrightarrow E = \bar{E}$

$$\Leftrightarrow x_n \in E \text{ 是任意收敛点列, 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in E;$$

$$\Leftrightarrow \text{若 } x \in \bar{E}, \text{ 则 } x \text{ 必为 } E \text{ 的外点.}$$

只含有限个点的集合是闭集. 只要研究开集的性质, 便可知道闭集的性质.

定理 8.1a (1) 任意个开集的并集是开集;

(2) 有限个开集的交集是开集.

证 (1) 设 E_k 是开集, $E = \bigcup_k E_k$, 这里 E_k 可以是有限个, 也可以是无限个. 对 $\forall x \in E$, 必有 $x \in E_l$, 从而有 x 的一邻域 $U(x) \subset E_l$ (因 E_l 是开集). 即

$$U(x) \subset E_l \subset \bigcup_k E_k = E$$

因此, E 是开集.

(2) 设 $E = \bigcap_{k=1}^n E_k$, 对 $\forall x \in E$, 必有 $x \in E_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 从而必有 x 的 n 个邻域 $U(x, \delta_k) \subset E_k$, 令 $\delta = \min_{k=1, \dots, n} \delta_k$, 则

$$U(x, \delta) \subset U(x, \delta_k) \subset E_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

即

$$U(x, \delta) \subset \bigcap_{k=1}^n E_k = E$$

注: 无限个开集之交不一定是开集. 如在 R 中

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0, 1] \text{ 是闭集.}$$

与本定理相应的闭集的性质如下.

定理 8.1b (1) 任意个闭集的交集是闭集;

(2) 有限个闭集的并集是闭集.

(3) 开区域与闭区域

设 x, y 是 R^m 中的两个点, 则

$$\overline{xy} = \{z \mid z = tx + (1-t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

表示以 x, y 为端点的直线段.

开区域: 设 Ω 是 R^m 中的点集, 若对 $\forall x, y \in \Omega$, 存在有限个点 $x_i \in \Omega$ (其中 $i = 0, 1, 2, \dots, k; x_0 = x, x_k = y$), 使折线

$$\overline{x_{i-1}x_i} = \{x \mid x = tx_{i-1} + (1-t)x_i\} \subset \Omega \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

则称 Ω 是 (折线) 连通集. 若 Ω 又是开集, 则称 Ω 为开区域; 如 Ω 是开区域, 则称 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 为闭区域.

8.1.3 R^m 中的一些重要集及特征

(1) 有界集和无界集

设 $E \subset R^m$, 若对 $\forall x \in E$, 存在正常数 M , 使 $\|x\| < M$, 称 E 是有界集; 否则称 E 为无界集.

(2) 凸集

设 $E \subset R^m$, 若对 $\forall x, y \in E$, 有 $\overline{xy} \subset E$, 称 E 为凸集.

(3) 集合的直积

设 $A \subset R^m, B \subset R^n$, 对 $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in A, y = (y_1, \dots, y_n) \in B$, 有 $z = (x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) \in R^{m+n}$, 由所有的 z 点组成的 R^{m+n} 中的集合记为 $A \times B$, 称为 A 与 B 的直积.

例 8.4 $[a, b] \subset R, [c, d] \subset R, [a, b] \times [c, d]$ 为平面矩形域.

例 8.5 设 $D \subset R^2$, 则 $D \times [0, H]$ 表示以 D 为底高为 H 的柱体 (如图 8.1). 同样, 若 $\Omega \subset R^m$, 则 $\Omega \times [0, T]$ 表示以 Ω 为底高为 T 的 $m+1$ 维柱体.

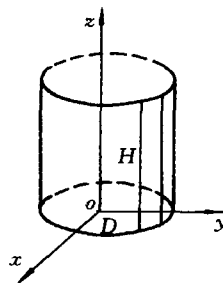


图 8.1

(4) 点到集合的距离,集合的直径

$x \in R^m, E \subset R^m$, 则点 x 到 E 的距离为

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y)$$

即 E 中各点与 x 点间距离的下确界.

点集 E 的直径为

$$d(E) = \sup_{x, y \in E} \rho(x, y)$$

即 E 中任意两点间距离的上确界.

8.1.4 R^m 的完备性

在学习一元函数时,我们讲了实数的重要性质,其中柯西审敛原理反映了实数的完备性,成为极限理论的基础.柯西原理容易推广到一般的距离空间.这里主要讲 R^m 中的柯西原理.

定义 8.5 设点列 $x_n \in R^m$, 对 $\forall \epsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 对 $n > N$ 及任意正整数 p , 有

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \epsilon$$

成立,则称点列 x_n 为 R^m 中的一个基本点列(也称为柯西列).

定理 8.2 (完备性定理,柯西审敛原理)

点列 $x_n \in R^m$ 收敛 $\Leftrightarrow x_n$ 是基本点列.

证 设 $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})$, 则 x_n 收敛的充要条件是 m 个数列 x_{in} 收敛.由数列的柯西原理,我们只要证明 x_n 为基本点列的充要条件是 m 个数列 x_{in} 是基本数列($i = 1, 2, \dots, m$),而这只要用下面的不等式就可以证明.

$$|x_{in+p} - x_{in}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{in+p} - x_{in})^2} = \|x_{n+p} - x_n\| \leq m \max_{i=1, \dots, m} |x_{in+p} - x_{in}|$$

详细的证明过程请读者自行完成.

8.1.5 R^m 中有界闭集的紧性

(1) 列紧性——聚点原理

定理 8.3 E 是 R^m 中的有界无穷点集,则 E 至少有一个聚点.

证 设 $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}) \in E$ 是各项不同的点列(即 $i \neq j$ 时, $x_i \neq x_j$).我们先看有界数列 x_{1n} ,它有收敛的子列 $x_{1n_k^{(1)}}$.这样,我们得到 x_n 的一个子列

$$x_{n_k^{(1)}} = (x_{1n_k^{(1)}}, x_{2n_k^{(1)}}, \dots, x_{mn_k^{(1)}})$$

又 $x_{2n_k^{(1)}}$ 有收敛子列 $x_{2n_k^{(2)}}$,这时得

$$x_{n_k^{(2)}} = (x_{1n_k^{(2)}}, x_{2n_k^{(2)}}, \dots, x_{mn_k^{(2)}})$$

其中 $x_{1n_k^{(2)}}$ 是 $x_{1n_k^{(1)}}$ 的子列,故仍收敛.这样下去便可得

$$x_{n_k^{(m)}} = (x_{1n_k^{(m)}}, x_{2n_k^{(m)}}, \dots, x_{mn_k^{(m)}})$$

是 x_n 的收敛子列.

推论 R^m 中的有界点列 x_n 必有收敛的子列.

若集合 E 中任一无穷子集必有聚点,且此聚点亦在 E 中,称 E 为列紧集,由聚点原理易知

$E \subset R^m$ 是有界闭集 $\Leftrightarrow E$ 为列紧集

(2) 紧性——有限覆盖定理

定义 8.6 设 E_α 是 R^m 中的开集 (α 可以是 $1, 2, \dots, k$ 个有限数, 也可以是无限数), 若 $E \subset \bigcup_\alpha E_\alpha$, 称 $\{E_\alpha\}$ 为 E 的一个开覆盖, 若在 $\{E_\alpha\}$ 中存在有限个集合 $E_1, E_2, \dots, E_k$ 使 $E \subset \bigcup_{i=1}^k E_i$, 则称 $E_1, \dots, E_k$ 是 E 的有限子覆盖.

若一个集合 E 的任一开覆盖都有有限子覆盖, 则称 E 为紧集.

定理 8.4 (有限覆盖定理) $E \subset R^m$ 是有界闭集 $\Leftrightarrow E$ 是紧集.

证 “ $\Leftarrow$ ” 设 E 是 R^m 中的紧集, 对 $\forall x \in E$, 作 $U(x, \delta)$ (δ 是固定正常数), 则 $E \subset \bigcup_{x \in E} U(x, \delta)$, 因此有有限覆盖, 即 $x_1, \dots, x_k \in E$, 使 $E \subset \bigcup_{i=1}^k U(x_i, \delta)$, 故 E 是有界集. 下面证明 E 是闭集, 只要证明 E 的任意聚点仍在 E 中 (E 是由有限个孤立点组成的集时用不着证明). 若有聚点 $x_0 \notin E$, 则对 $\forall x \in E$, 有 $\|x_0 - x\| = \delta_x > 0$ 及各项不同的点列 $x_n \in E, x_n \rightarrow x_0$. 这样, 对 $\forall x \in E$ 作 $U(x, \frac{\delta_x}{2})$, $\bigcup_{x \in E} U(x, \frac{\delta_x}{2})$ 是 E 的开覆盖, 而对 $\forall x \in E$ 及充分大的 n , 使 $\|x_n - x_0\| < \frac{\delta_x}{2}$. 于是对充分大的 n 有

$$\|x - x_n\| \geq \|x - x_0\| - \|x_n - x_0\| > \delta_x - \frac{\delta_x}{2} = \frac{\delta_x}{2}$$

即 n 充分大后的一切 $x_n \notin U(x, \frac{\delta_x}{2})$, 每个 $U(x, \frac{\delta_x}{2})$ 最多只含有限个点列 x_n 中的点, 从而点列不可能被有限个 $U(x, \frac{\delta_x}{2})$ 这样的开集覆盖, 这与 E 是紧集矛盾. 因此, $x_0 \in E$.

“ $\Rightarrow$ ” 设 E 是有界闭集, $\{A_\alpha\}$ 是 E 的任一开覆盖, 我们要证明 E 可被有限个 A_α 的并覆盖. 分以下两步证明.

(1) 证明存在 ε_0 , 使 $\forall x \in E$, 有 $U(x, \varepsilon_0) \subset A_\alpha$. 若不然, 取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 知有 $x_n \in E$, 使 $U(x_n, \frac{1}{n})$ 不含于任何一个 $A_\alpha \in \{A_\alpha\}$ 之中, x_n 是有界点集, 因此有收敛子列. 不妨将收敛子列仍记为 $x_n \rightarrow x_0 \in E$, 则由于 $x_0 \in E$, 故 $x_0 \in A_\alpha$, 因此存在 $U(x_0, \frac{2}{N}) \subset A_\alpha$. 另一方面, 取 $n > N_0 > N$, 使

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{N}$$

于是, 对 $\forall x \in U(x_n, \frac{1}{n})$ 有

$$\|x - x_0\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{N} < \frac{2}{N}$$

即 $x \in U(x_0, \frac{2}{N}) \subset A_\alpha$. 这说明, $U(x_n, \frac{1}{n}) \subset A_\alpha$, 矛盾.

(2) 证明存在有限个点 $x_1, x_2, \dots, x_k \in E$, 使 $\bigcup_{i=1}^k U(x_i, \varepsilon_0) \supset E$. 若不然, 任取 $x_1 \in E$, $U(x_1, \varepsilon_0)$ 不覆盖 E , 故有 $x_2 \in E, x_2 \notin U(x_1, \varepsilon_0)$. 又 $U(x_1, \varepsilon_0) \cup U(x_2, \varepsilon_0)$ 不覆盖 E , 故有 $x_3 \in E, x_3 \notin U(x_1, \varepsilon_0) \cup U(x_2, \varepsilon_0) \dots$. 为此, 得点列 $x_n \in E, x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U(x_i, \varepsilon_0)$, 对任意

自然数 n 和 p , $\|x_{n+p} - x_n\| \geq \varepsilon_0$, 说明 x_n 的任意子列不可能是基本列, 但 x_n 是有界点列必有收敛子列, 矛盾. 因此, 有有限点 $x_i \in E$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 使

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k U(x_i, \varepsilon_0)$$

由(1)知, 对每个 x_i 有 $A_{a_i} \in \{A_a\}$, 使 $U(x_i, \varepsilon_0) \subset A_{a_i}$, 于是

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k U(x_i, \varepsilon_0) \subset \bigcup_{i=1}^k A_{a_i}$$

即 $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_k}$ 是 E 的有限覆盖.

本小节两个定理证明, 在 R^m 中, 有界闭集与列紧集及紧集都是等价的.

思考与练习题

1. 证明定义 8.1 中定义的距离满足三角不等式

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

在 R^m 中, 设 $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ 定义

$$\rho^*(x, y) = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$$

证明这样定义的距离满足距离公理.

2. 证明在题 1 中两种不同距离意义下, 点列 x_n 有相同的敛散性, 且当 x_n 为收敛点列时, 极限也相同.

3. 把复平面作为 R^2 的模型, 试写出点列极限、柯西原理、聚点原理和有限覆盖定理, 并证明聚点原理.

8.2 多元函数、极限与连续性

8.2.1 数量函数与向量函数

(1) 函数的定义

定义 8.7 设 $\Omega \subset R^m$, 若存在映射 f , 使对 $\forall x \in \Omega$, 都有唯一的 $y \in R^l$ 与之对应, 则称 f 是由 Ω 至 R^l 的一个向量函数, 记为 $f: \Omega \rightarrow R^l$. 在微积分中又常记为

$$y = f(x)$$

Ω 为函数的定义域, $f(\Omega)$ 为函数的值域.

值得注意的是, 在古典分析中, 称 x 为自变量, y 为函数, 因此说函数 $y = f(x)$. 而近代分析中称映射 f 是函数, 在不引起混淆的情况下, 我们在后面也称 y 是 x 的(向量)函数.

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_l) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_l(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

那么, 向量函数也可记为

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_m) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

当 $l = 1$ 时, 称

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

为 m 元的数量函数.

当 $l > 1$ 时, 向量函数实质上是一个数量函数组

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

因此, 研究向量函数的基础在于研究数量函数, 而多元数量函数最简单的是二元函数: $z = f(x, y)$. 把二元函数研究得比较透彻, 就容易把握一般的数量函数, 进而掌握一般的向量函数.

当 $m = 1, l = 3$ 时, 向量函数常写成以下形式:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

即 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 表示空间曲线. 若 t 表示时间, $\mathbf{r}$ 表示位移, 那么, (8.2) 式的向量函数就是物理学中所说的质点的运动方程. 今后, 我们也用 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 表示空间曲线的方程.

点变换 T :

$$\begin{cases} u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

即

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

是 R^3 到 R^3 的映射.

当 R^2 为复平面时, 则由 $z = x + iy \in R^2$ 到 $w = u + iv \in R^2$ 的映射

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

就是复变函数.

(2) 二元函数的图像与等值面

对二元数量函数 $z = f(x, y)$, 由空间解析几何知识, 它表示一张曲面 Σ , 如图 8.2, 这张曲面在 xoy 面上的投影是函数的定义域 D , 过 D 内一点 $(x, y, 0)$ 作平行 z 轴的直线, 与 Σ 有唯一交点 $(x, y, f(x, y))$. 称曲面 Σ 是二元函数的图像. 二元以上函数的图像(图 8.3), 可以想象为四维以上空间的“曲面”, 或称为流形.

设在二元函数 $z = f(x, y)$ 中, 令 $z = c$, 得 xoy 面上的曲线 γ 为

$$\begin{cases} f(x, y) = c \\ z = 0 \end{cases}$$

称 γ 为此函数的等值线(又称等高线、等位线). 如图 8.3 用 z

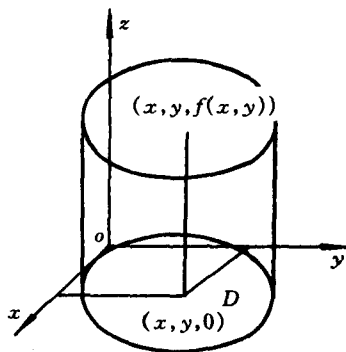


图 8.2

$= c$ 平面截曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$, 得的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}, \Gamma \text{ 在 } xoy \text{ 上的投影即为等高线}$$

γ .

同样, 对数值函数 $u = f(x_1, \dots, x_m)$, 令 $u = c$, 得 R^m 中的曲面流形 $S: f(x_1, \dots, x_m) = c$, 称为该函数的等值面或等位面(确切地说是等值流形).

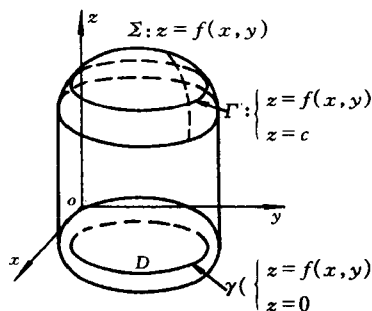


图 8.3

8.2.2 多元函数的极限

(1) 极限的定义

从无限逼近意义上讲, 多元函数的极限与一元函数的极限本质上是一样的.

定义 8.8 设 $y = f(x)$ 是 $R^m \supset \Omega \rightarrow R^l$ 的函数, x_0 是 Ω 的聚点, $a = (a_1, \dots, a_l)$ 是 R^l 中一定点. 若对 $\forall U(a, \epsilon)$, 都存在 $U_0(x_0, \delta)$, 只要 $x \in U_0(x_0, \delta) \cap \Omega$, 便有 $y \in U(a, \epsilon)$ 成立, 就称 a 是 $f(x)$ 在 x_0 点处的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

或

$$f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\text{也可以记为 } \lim_{(x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_{01}, \dots, x_{0m})} f(x_1, \dots, x_m) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_{01} \\ x_2 \rightarrow x_{02} \\ \dots \\ x_m \rightarrow x_{0m}}} f(x_1, \dots, x_m) = a$$

当 $m > 1, l = 1$ 时, 这个定义就是多元数量函数极限的定义. 下面, 我们用不等式形式来表述数量函数的极限.

设 $y = f(x_1, \dots, x_m)$ 在 Ω 上有定义, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$ 是 Ω 的一个聚点, a 是一个常数. 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $x \in \Omega$, 且 $0 < \|x - x_0\| < \delta$, 便有

$$|f(x) - a| < \epsilon$$

成立, 则称 a 是 $f(x)$ 在 x_0 点处的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

当 $l > 1$ 时, 由定义不难得出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = a_i (i = 1, 2, \dots, l)$.

即向量函数 $f(x)$ 以点 a 为极限的充要条件是每个分量函数 $f_i(x)$ 以 a 的分量 a_i 为极限. 因此, 研究多元向量函数极限的基础在数量函数的极限.

例 8.6 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$.

证 因为 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ 的定义域为 $\Omega = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$, 并且

$$|f(x, y) - 0| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

所以, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \epsilon$, 当 $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时, 有

$$|f(x, y) - 0| < \epsilon$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \sin \frac{1}{y} = 0$$

(2) 多元函数极限与一元函数极限的差异

从无限逼近的本质讲,多元函数与一元函数的极限是一样的,但一元函数的自变量 x 只是沿数轴从左、右两侧逼近 x_0 ,而多元函数的自变量 x 是 R^m 中的动点,逼近 x_0 时不仅有无限多方向,还有无限种方式.这就是量变引起了质变,使多元函数的极限比一元函数的更复杂.我们只以二元数量函数为例,来说明这种差异.

例 8.7 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

试讨论 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限.

解 令 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋向于 $(0, 0)$, 得

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

沿不同直线所得极限不同,故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的极限不存在.

例 8.8 设 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, 研究 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 的极限.

解 如果像例 8.7 那样,令 $y = kx$,则不论 k 为何数,皆有 $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} f(x, y) = 0$,但还不能下结论说此函数在原点的极限为零.因为,如换一种方式,比如沿抛物线 $y = kx^2$ 时,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx^2}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

因此 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的极限还是不存在.这就是多元函数极限比一元函数极限复杂之所在,沿任何直线方向的极限存在且相等,但这点的极限仍有不存在的可能.

(3) 极限的运算性质

由于多元函数与一元函数极限的共同性质,可以证明,多元函数极限在运算上有如下性质.

设 $f(x), g(x)$ 都在 $\Omega \subset R^m$ 上有定义,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in R^l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in R^l$. 则

1° $\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha a + \beta b$ (α, β 是任意实数);

2° $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x), g(x)) = (a, b)$, 若 $l = 1$, 内积即是乘积;

3° 当 $l = 1$, 且 $b \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$;

4° 函数极限的柯西原理. 设 $f(x): R^m \supset \Omega \rightarrow R^l, f(x)$ 在 x_0 点有极限的充要条件是对 $\forall \epsilon > 0$, 有 $U_0(x_0, \delta)$, 只要 $x_i \in U_0(x_0, \delta)$ ($i = 1, 2$), 就有

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| < \epsilon \text{ 成立.}$$

(4) 累次极限

以二元数值函数为例,二元函数在一点的极限也称为 $f(x, y)$ 在该点的二重极限. 如 $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 是二重极限,而当固定一变量如 y , 让另一个变量 x 变化时,二元函数实际上只是一元函数. 令 $x \rightarrow x_0$ 取极限,得到一个与 x 无关的函数,再令 $y \rightarrow y_0$ 取