上海电视大学试用教材

现代控制论初步

上海市业余工业大学　黄午阳编

天津科学技术出版社

上海电视大学试用教材

现代控制论初步

黄午阳 编

天津科学技术出版社

上海电视大学试用教材

现代控制论初步

黄午阳 编

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 5 1/4 字数 110,000

一九八一年七月第一版

一九八一年七月第一次印刷

印数：1—49,500

统一书号：15212·29 定价：0.57元

前　言

随着生产与技术的不断发展，自动控制理论将得到日益广泛的应用。为了适应工程技术人员学习自动控制理论的需要，我们编写和编译了一套自动控制理论读物。《现代控制论初步》是其中的一本。该书包括线性系统、最佳控制、状态滤波器、系统辨识等内容。

在编写《现代控制论初步》的过程中，主要参考了上海师范大学数学系数控组编的《现代控制理论》、绪方胜彦著的《现代控制工程》、中国科学院数学所概率组编著的《离散时间系统滤波的数学方法》等著作。在此，向他们表示衷心感谢。由于编者水平有限，书中还会存在缺点与错误，欢迎同志们批评指正。

编者

目　　录

绪　论

自动控制发展为一门独立的技术学科，约在本世纪四十年代。到五十年代又有了很大发展。这个时期自动控制技术的理论基础，集中反映在“自动调节原理”方面。在这个发展时期，自动控制系统所必须的运算，主要是通过模拟计算装置来实现的，而在理论上处理自动控制问题的方法则主要是频率域方法。所谓频率域方法就是用传递函数来研究设计控制系统。传递函数概念的产生与电工学有密切关系，它在线性电路的分析上运用的很广泛而且很成功。但由于模拟计算装置在技术上与性能上的局限性，使得利用自动调节原理所获得的结果，对工程设计者来说只能起参考作用。即使理论上设计得较合理，现场安装调试时，还得经过反复试凑，因此没有丰富的现场工作经验是不行的。另外，自动调节原理的理论本身也有一定的局限性，它往往只能应用于一类所谓单输入-单输出的平稳线性系统的设计与分析。对多输入-多输出系统、时变系统以及非线性系统等，为了应用自动调节原理的成果，必须加上不少限制或假设条件。有些系统用自动调节原理的方法进行设计往往不能达到理想的控制效果。这种局限性，随着生产与技术水平的不断提高，越来越显示出不能适应自动控制的实践要求。

五十年代末，六十年代初，由于空间技术的发展，对自动控制的精密性提出了极高的要求。与此同时，电子计算机

在技术上又有了重大突破，计算机的成本、体积、运行的速度与可靠性等均有了惊人的进步，从而完全可以适应实时控制的要求。这就给“现代控制论”的产生，奠定了物质基础。在生产与技术的推动下，控制理论终于在六十年代初有了重大突破，使研究控制系统的方法，从单纯地使用频率域方法发展到使用状态空间的方法（即时域的方法），从而形成了“现代控制论”。随着生产与技术的不断发展，现代控制论必将获得愈来愈广泛的应用。

第一章　线 性 系 统

线性系统是自动控制系统中一类最基本的系统。相对于非线性系统而言，线性系统应用起来要方便得多，通常总是在允许的条件下，尽可能地将所遇到的非线性系统"线性化"。因此，线性系统是我们研究的重要对象。

§1　线性系统的概念

在控制论中，往往将被控制的对象称为一个"系统"或一个"装置"。为了使系统实现规定的任务，必须对系统加上适当的控制信号，这种控制信号（控制量）称为系统的"输入"，用$u(t)$表示。例如，当被控对象是一个电炉的话，那么输入$u(t)$就代表电压。我们知道，加上一定的电压，炉温就会升高，对这个系统来说温度就是它的输出，用$y(t)$表示。在改变电炉的输入电压后，炉温的改变总有一个过程，这种当输入发生变化后，相应输出的变化过程称为动态过程。动态过程在数学上可用微分方程来加以描述。

如果系统的动态过程可归结为以下的线性微分方程：

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y(t)$$

$$=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u(t)\qquad(1)$$

或简写成$L(y)=(ft)$，这里L表示一个算符，即

$$L = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$$

而 $f(t)$ 则表示方程（1）的右边的表达式，那么该系统就称为线性动态系统。

一个系统没有用微分方程描述之前，怎些才能知道它是否为线性的呢？为此，先来回顾一下线性微分方程的特性，然后在这个基础上给出线性系统的一般定义。对线性微分方程而言

如 $y_1(t)$ 是 $L(y) = f_1(t)$ 的解，

其中 $f_1(t) = b_m \frac{d^m u_1}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du_1}{dt} + b_0 u_1(t)$

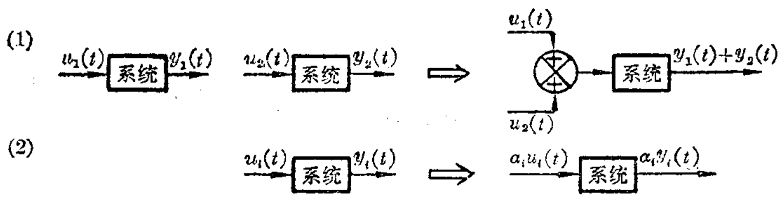
$y_2(t)$ 是 $L(y) = f_2(t)$ 的解，

其中 $f_2(t) = b_m \frac{d^m u_2}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2(t)$

则 $y_1(t) + y_2(t)$ 是 $L(y) = f_1(t) + f_2(t)$ 的解

$\alpha_i y_i(t)$ 是 $L(y) = \alpha_i f_i(t)$ 的解（$i = 1, 2$；α_i 为常数）

如果把 $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别看作某一系统的输入和输出，那么上述两条性质就相当于



其中：（1）表示系统具有叠加性；

（2）表示系统具有齐次性。

定义 若一个系统具有叠加性和齐次性，就称它为线性

系统。

注意，不能简单地把输入$u(t)$与输出$y(t)$有线性关系就称为是线性系统。例如，当$y(t)=au(t)+b$时，$y(t)$和$u(t)$之间显然有线性关系，但它却不是一个线性系统。因为当输入分别为$u_1(t)$和$u_2(t)$时，相应的输出$y_1(t)=au_1(t)+b$，$y_2(t)=au_2(t)+b$；然而当输入为$u_1(t)+u_2(t)$时，输出为

$$a(u_1(t)+u_2(t))+b\neq y_1(t)+y_2(t)$$

故该系统不满足叠加性，所以不是线性系统。

一般说来，任何一个物理系统都是非线性的，但它可以用一个线性系统来加以近似，因此，通常可作为线性系统来处理。

线性系统又可分为时变系统和时不变系统两类。系统的参数随时间而变化，称为时变系统。这种系统常用带时变系数的线性微分方程或差分方程来描述。系统的参数不随时间而变化，称为时不变系统。这种系统常用常系数线性微分方程或差分方程来描述，所以又称为定常系统。如微分方程（1）所描述的系统就是一个定常线性系统。

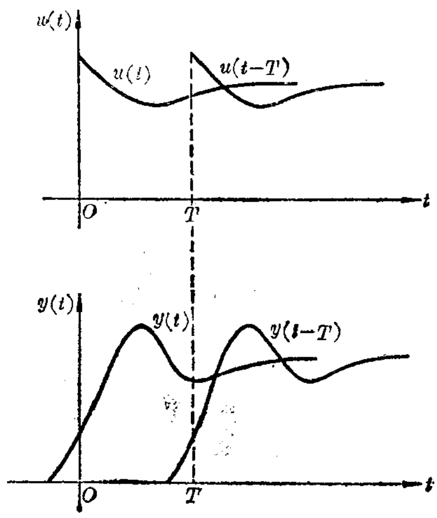


图1·1

对于定常线性系统而言，如果把原输入信号$u(t)$滞后T而变为$u(t$

$-T$）时，那么相应的输出信号$y(t)$也将滞后T而变为$y(t-T)$。这说明，这类系统的输出仅取决于输入信号的形式，而与输入的起始作用时刻无关。用图形来表示这一特性（通常称为平稳性），就是图1·1中的曲线平移。因此，定常线性系统有时也称为线性平稳系统。

§2 系统的激励与响应

激励即指系统的输入，响应即指系统的输出。本节主要讨论基本的激励形式和在输入激励下的系统响应。

一、基本的激励形式

输入激励是影响系统输出响应的外部条件，输入不同形式的激励，就会随之输出不同形式的响应。通常，激励有三种最基本的形式，即阶跃激励、脉冲激励和正弦激励。在电路系统中，阶跃激励是指在输入端突加一个定值电流或电压；脉冲激励是指输入端，在一段极短的时间内施加一个非常大的冲击电流或冲击电压；正弦激励则是指在输入端，加一个象正弦函数那样的交变电流或交变电压。当然，任何已知的（甚至是随机的）时间函数都可用作激励，但由于上述三种激励方式较容易实现，而且许多其他形式的激励可分解为阶跃、脉冲或正弦输入的和。知道了这三种激励的输出响应，借助于线性系统的叠加性和齐次性，也就可以得到其他形式激励的输出响应。

阶跃激励、脉冲激励和正弦激励在数学上可用阶跃函数、脉冲函数和正弦函数来表示。正弦函数是我们所熟悉的，下面对阶跃函数和脉冲函数作简要介绍。

1.阶跃函数

这里所讲的阶跃函数，指的是单位阶跃函数1(t)，其定义如下：

$$1(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

这个函数的图形如图1·2所示，时间为负值时，函数等于零；时间为正值时，函数等于1；时间等于零时，函数值不定。图1·3是由开关电路所产生的实际单位阶跃电压（电流）的波形图。对照图1·2和图1·3，可以看出阶跃函数是实际的开关波形理想化以后的近似。

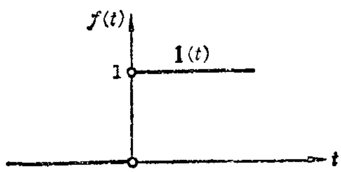


图1·2　单位阶跃函数

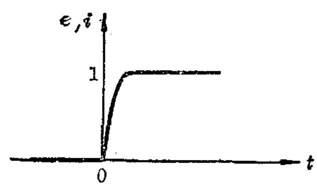


图1·3　单位阶跃电压（电流）波形

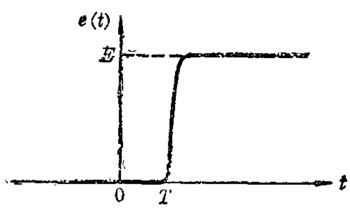


图1·4

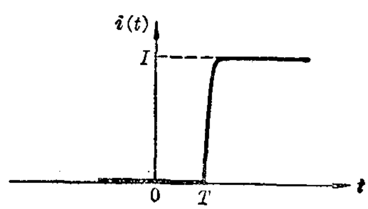


图1·5

利用$1(t)$，如图1·4所示的阶跃电压$e(t)$可近似表示为

$$e(t)=E\cdot 1(t-T)$$

同样，对于图1·5所示的阶跃电流$i(t)$也可近似表示为

$$i(t)=I\cdot 1(t-T)$$

由于电路元件能起积分和微分作用，所以我们将对阶跃函数的积分和导数感到兴趣。

1）阶跃函数的积分

阶跃函数的积分$s(t)$为

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}1(t)\,dt=\int_{0}^{t}1dt=t$$

$$s(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t>0\end{cases}$$

阶跃函数的积分是一个单位斜波函数，其图形如图1·6所示，函数的斜率为1，在$t=1$时，函数值也为1。

2）阶跃函数的导数

当$t<0$或$t>0$时，阶跃函数$1(t)$的导数显然等于零。为求$t=0$时$1(t)$的导数，先考察如图1·7所示的函数$1_\Delta(t)$，其解析式为

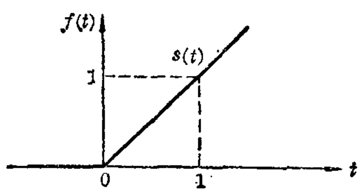


图1·6　单位斜波函数

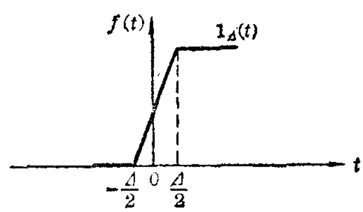


图1·7

$$1_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant-\dfrac{\Delta}{2}\\ \text{斜率为}\dfrac{1}{\Delta}\text{的斜线} & -\dfrac{\Delta}{2}<t<\dfrac{\Delta}{2}\\ 1 & t\geqslant\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$$

$1_\Delta(t)$的导数用$\delta_\Delta(t)$表示。由$1_\Delta(t)$的定义可知

$$\delta_{\Delta}(t)=1'_{\Delta}(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant-\dfrac{\Delta}{2}\\ \dfrac{1}{\Delta} & -\dfrac{\Delta}{2}<t<\dfrac{\Delta}{2}\\ 0 & t\geqslant\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$$

故 $t=0$ 时1（t）的导数为·

$$1'(0)=\lim_{\Delta\to 0}1'_{\Delta}(0)=\infty$$

如用$\delta(t)$来表示1′（t），则

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \infty & t=0\\ 0 & t>0\end{cases}$$

由此可知，阶跃函数1（t）的导数$\delta(t)$实际上就是一个脉冲函数，其图形如图1·9所示。

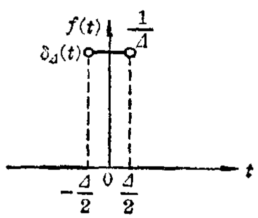


图1·8

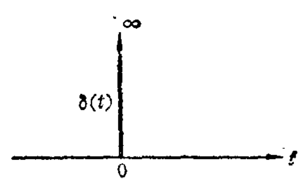


图1·9

2.脉冲函数

阶跃函数的导数$\delta(t)$称为脉冲函数，它具有如下性质：

性质１：脉冲函数下的面积恒等于１，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$

为了说明这一事实，仍利用上面所引进的 $\delta_{\Delta}(t)$ 函数，

其图形如图1·8所示。

$$\because \quad \delta(t)=\lim_{\varDelta\to 0}\delta_{\varDelta}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varDelta}(t)\,dt=\int_{-\frac{\varDelta}{2}}^{\frac{\varDelta}{2}}\frac{1}{\varDelta}dt=1$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varDelta\to 0}\delta_{\varDelta}(t)\,dt=\lim_{\varDelta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varDelta}(t)\,dt$$

$$=1$$

性质 1 是δ-函数的本质属性，用脉冲函数下面的面积来表征脉冲函数比用无限大的高度来表征来得更方便。因此，可以把一个幅度为E的阶跃函数$E\cdot 1(t)$的导数，看 作 是 一个具有面积E的脉冲函数$E\cdot\delta(t)$。

性质 2：对任何连续函数$f(t)$有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta(t)\,dt=f(0)$$

这是因为对任何$\varDelta>0$，利用积分中值定理有

$$\int_{-\infty}^{+8}f(t)\,\delta_{\varDelta}(t)\,dt=\frac{1}{\varDelta}\int_{-\frac{\varDelta}{2}}^{\frac{\varDelta}{2}}f(t)\,dt=f(\zeta),\left(-\frac{\varDelta}{2}<\zeta<\frac{\varDelta}{2}\right)$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta(t)\,dt=\lim_{\varDelta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\delta_{\varDelta}(t)\,dt$$

$$=\lim_{\varDelta\to 0}f(\zeta)=\lim_{\zeta\to 0}f(\zeta)$$

$$=f(0)$$

同理可推出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\sigma)\,\delta(\sigma-t)\,d\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\sigma)\,\delta(t-\sigma)\,d\sigma=x(t)$$

其中

$$\delta(t-\sigma)=\begin{cases}0 & t<\sigma\\ \infty & t=\sigma\\ 0 & t>\sigma\end{cases}$$

二、系统的响应

在高等数学课程中曾经学过，一个周期函数通常可以展开为富里哀级数，这是一个用一系列不同频率的正弦函数的叠加来表示一个周期函数的问题。然而对于非周期的输入函数来说，就无法用一系列正弦函数来表示了。现在介绍如何用一系列的脉冲函数来近似地表示任意输入函数。这样，在知道了系统对脉冲输入的响应后，利用线性系统的特性，就可以找出对任意输入的响应来。

所谓脉冲，简单地说就是一个短促的冲击，这个冲击和它的宽度相比要高得多。因为脉冲函数可用它下面的面积来表征，所以冲击的确切形状是无关紧要的，仅其面积是有意义的。为此，先将任意输入函数$u(t)$所对应的波形分成许多段，然后将每一段所形成的曲边梯形的面积，用一个具有相同面积的脉冲来表示。这样，便可用脉冲系列表示输入函数了。为方便起见，取每个曲边梯形底边的长（即时间间隔）均为$\varDelta$，并用发生在时间间隔起点的脉冲来表示，详见图1·10。因为第一个曲边梯形的面积近似地为$u(0)\cdot\varDelta$，所以，表示该面积的脉冲为

$$u_0(t)\doteq u(0)\cdot\varDelta\cdot\delta(t)$$

同样，表示第二个曲边梯形面积的脉冲为

$$u_1(t)\doteq u(\varDelta)\cdot\varDelta\cdot\delta(t-\varDelta)$$

表示第$n+1$个曲边梯形面积的脉冲为

$$u_n(t)\doteq u(n\varDelta)\cdot\varDelta\cdot\delta(t-n\varDelta)$$

故$u(t)$可近似表达为

$$u(t) \doteq \Delta[u(0)\delta(t)+u(\Delta)\delta(t-\Delta)+\cdots+u(n\Delta)\delta(t-n\Delta)+\cdots]$$

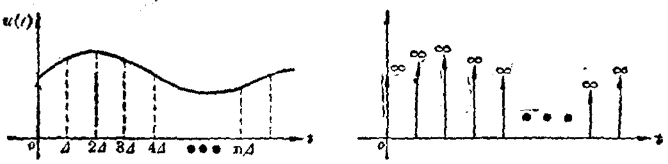
$$=\Delta\sum_{i=0}^{\infty}u(i\Delta)\delta(t-i\Delta)$$

如输入函数$u(t)$的定义域为一切实数时，则

$$u(t)\doteq\Delta\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u(i\Delta)\delta(t-i\Delta)$$

将上式取极限，得到

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u(i\Delta)\delta(t-i\Delta)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma$$



(a) 输入函数　　(b) 脉冲近似

图1·10

根据δ-函数的性质2，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma=u(t)$$

故用$\Delta\sum_{i=-\infty}^{+\infty}u(i\Delta)\delta(t-i\Delta)$作为$u(t)$的近似表达形式是合理的。下面，讨论如何根据线性平稳系统的脉冲响应，找出该系统对输入$u(t)$的响应。