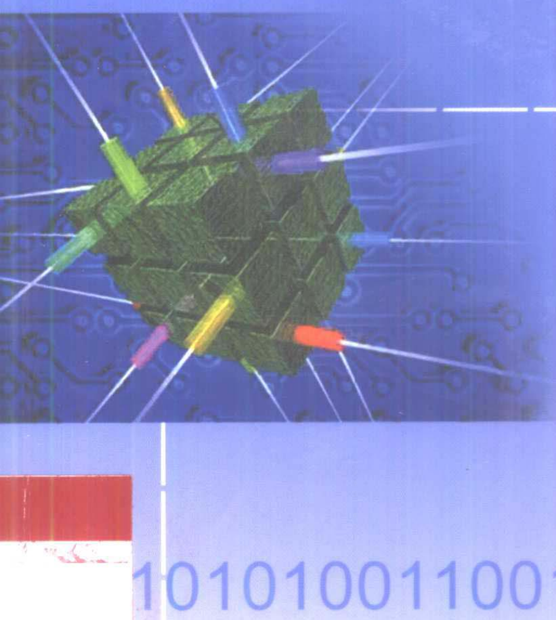
成人高等教育教材

LISAN SHUXUE

离散数学

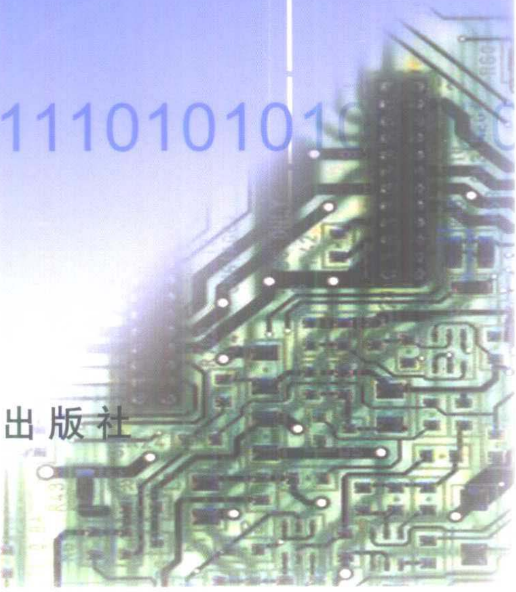
陈启浩 编著



@

1010100110011101010

*.com



北京邮电大学出版社

离 散 数 学

陈启浩 编著

北京邮电大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/陈启浩编著. —2版. —北京: 北京邮电大学出版社,2000.12

ISBN 7-5635-0071-5

Ⅰ.离… Ⅱ.陈… Ⅲ.离散数学 Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 54669 号

离散数学

编　著　陈启浩

责任编辑　徐夙琨

*

北京邮电大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京忠信诚胶印厂印刷

*

850 mm×1 168 mm　1/32　印张 10.5　字数 269 千字

2000 年 12 月第 2 版　2000 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—5 000 册

ISBN　7-5635-0071-5/O·6　定价: 18.50 元

前　　言

近年来，随着计算机科学与技术的发展，人们对离散数学关注的热度不断上升。离散数学是研究离散结构的数学学科，它的概念、理论和方法已广泛地渗入到计算机科学与技术的各个领域，成为表述、研究计算机科学与技术中各类问题的必不可少的手段，而且离散数学理论的研究成果又全面系统地影响和推动计算机科学与技术的发展。掌握离散数学的基本思想、理论和方法，已成为计算机专业学生学好各门专业课以及今后从事计算机开发、科研的关键之一。

本书参考工科院校离散数学教材，根据成人教育的特点，为正在接受函授、职教等成人教育的学生编写而成，顺序由集合论、代数系统、图论和数理逻辑四章构成（书中凡带有 * 号的小节均为选学内容）。虽然本书起点较低，叙述较详尽，例题较多，但由于离散数学比较抽象，概念性较强，所以在学习时只有理解各个基本概念，弄懂每道例题，独立完成各节练习，才能够把离散数学的基础知识真正学到手。为了便于自学，每章最后部分都有详细小结，在其中安排了解题方法指导及全章练习详解。

由于编写时间仓促和作者水平有限，书中定有疏漏和错误之处，恳请读者指出。

陈启浩

2000 年 8 月

目　　录

常 用 记 号

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
I_m	小于 m 的非负整数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\in$	属于
$\subseteq$	包含于
$\cup$	并
$\cap$	交
$\varnothing$	空集
U	全集
2^A	A 的幂集
$\# A$	A 的元素个数
$\sim$	补,等价关系
$\preccurlyeq$	偏序关系
$\circ$	复合,运算
e	单位元
θ	零元
$\mid$	整除
$\mathrm{res}_n(m)$	m 除以 n 的余数
$\mathrm{mod}\ n$	模 n 同余
$\vee$	析取,布尔加法
$\wedge$	合取,布尔乘法

$\neg$	非,
$\rightarrow$	蕴涵
$\leftrightarrow$	等价
$d(v_1, v_2)$	v_1, v_2 间的短程长度(距离)
$d\langle v_1, v_2\rangle$	v_1 到 v_2 的有向短程长度(距离)
$\exists x$	存在 x
$\forall x$	每个 x
$\Rightarrow$	推出
$\Leftrightarrow$	等值
$\oplus_p$	模 p 加法
$\odot_p$	模 p 乘法

第一章 集合论

集合是现代数学的基础.集合以及由集合引出的关系、映射等概念已渗入到科学技术的各个领域,特别是在计算机科学与技术中得到了有效的应用.本章主要介绍集合的基本概念与运算,关系的基本概念、性质及等价关系与偏序关系,映射的基本概念与性质.

1.1 集 合

本节主要叙述集合的基本概念与运算,它们是全书的基础.此外,作为集合概念与运算的一个应用,还简单介绍一下"有限集计数"方法.

1.1.1 集合的基本概念

1. 集合及其表示法

集合是现代数学的最基本概念之一,通常把它描述为:我们所考虑的、彼此不同但确定的对象的全体.例如,"中华人民共和国公民的全体","某计算机内存单元的全体","自然数的全体"等等都是集合.通常用大写英文字母 $A,B,X,\cdots$,或带下标的大写英文字母 $A_1,B_2,X_i,\cdots$表示集合.

集合中的每个对象称为元素.例如,"中华人民共和国的每个公民","该计算机的每个内存单元","每个自然数"分别是上述三个集合的元素.通常用小写英文字母 a,b,x ,$\cdots$,或带下标的小写英文字母 $a_1,b_2,x_i,\cdots$表示元素.如果 a 是集合A 的元素,则记 a

$\in A$（"$\in$"读作"属于"）；如果 a 不是 A 的元素，则记 $a \overline{\in} A$（"$\overline{\in}$"读作"不属于"）.

只有有限个元素的集合称为有限集，有无限个元素的集合称为无限集. 为了便于今后使用，对集合 A 定义

$$\# A = \begin{cases} A \text{ 的元素的个数}, & A \text{ 是有限集}, \\ \infty, & A \text{ 是无限集}. \end{cases}$$

一般用以下两种方法表示集合：

(1) 列举法

将集合的元素一一列出（或者列出其中一部分元素，其余元素可以从前后关系推出），元素之间用逗号隔开，并用花括号把它们括起来，这种表示集合的方法称为列举法. 例如，位于区间 $(1.2, 5.5)$ 内的整数集合可以表示为

$$\{2, 3, 4, 5\},$$

自然数集合可以表示为

$$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

(2) 描述法

用集合的元素所具有的共同性质表示集合的方法称为描述法. 如果集合 A 的元素具有共同性质 P，并用 $P(a)$ 表示元素 a 具有性质 P，那么 A 可以表示为

$$\{a \mid P(a)\}.$$

例如，偶数集合可以表示为

$$\{x \mid x \text{ 是偶数}\},$$

0 与 1 之间的实数集合可以表示为

$$\{x \mid 0 < x < 1 \text{ 且 } x \text{ 是实数}\}.$$

在此，我们还要强调：

(Ⅰ) 集合中的元素应是互不相同的. 因此，把 $\{a, b, b, c, d\}$ 与 $\{a, b, c, d\}$ 看作同一个集合. 如果 x, y 是集合的同一个元素，则记 $x = y$.

(Ⅱ) 不含任何元素的集合称为空集.例如,

$$\{x \mid x^2+1=0 \text{ 且 } x \text{ 是实数}\}$$

是空集.

(Ⅲ) 下列集合是常用的:

$\{0,1,2,3,\cdots\}$(自然数集合,记为 $\mathbf{N}$),

$\{0,1,2,\cdots,m-1\}$(小于 m 的非负整数集合,记为 I_m),

$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$(整数集合,记为 $\mathbf{Z}$),

$\{x \mid x \text{ 是实数}\}$(实数集合,记为 $\mathbf{R}$),

$\{z \mid z \text{ 是复数}\}$(复数集合,记为 $\mathbf{C}$).

2. 子集与幂集

定义 1.1.1 设集合 A,B.如果 A 的元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,也称 A 包含于 B(记作 $A\subseteq B$)或 B 包含 A(记作 $B\supseteq A$).

例 1.1.1 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b,c,d\}$,则 $A\subseteq B$.

例 1.1.2 设 $A=\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$,则 $a\in A$(但不能记作 $a\subseteq A$,这是因为 a 是 A 的元素而不是 A 的子集);$\{a\}\subseteq A$(但不能记作 $\{a\}\in A$,这是因为 $\{a\}$ 是 A 的子集而不是 A 的元素);$\{a,b,c\}\in A$,$\{a,b,c\}\subseteq A$(这是因为 $\{a,b,c\}$ 既是 A 的元素,又是 A 的子集).

由定义 1.1.1 容易看到:

(Ⅰ) 对任何集合 A,都有 $A\subseteq A$.

(Ⅱ) 对任何集合 A,B,C,如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

定义 1.1.2 如果集合 A,B 互为子集(即 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$),则称 A,B 相等,记为 $A=B$.如果 A 是 B 的子集,而 B 不是 A 的子集,则称 A 是 B 的真子集,记为 $A\subset B$.

例 1.1.3 设 $A=\{x \mid |x-1|<1 \text{ 且 } x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x \mid 0<x<2 \text{ 且 } x\in\mathbf{R}\}$,则 $A=B$.

由定义 1.1.2 可知:

（Ⅰ）$A=B$ 的充分必要条件是 A 的每个元素都是 B 的元素，而且 B 的每个元素都是 A 的元素. 因此，当 $A=B$ 时，可以把 A，B 看作同一个集合.

（Ⅱ）$A\subset B$ 的充分必要条件是 A 的每个元素都是 B 的元素，但 B 中至少有一个元素不是 A 的元素.

对于空集有以下定理：

定理 1.1.1

(1) 空集是任何集合的子集.

(2) 空集是唯一的，记作 $\varnothing$.

证明 (1) 用反证法. 设空集不是某个集合 A 的子集，则空集中存在某个不属于 A 的元素，这与空集的定义矛盾. 所以，空集是任何集合的子集.

(2) 设有两个空集 $\varnothing_1$，$\varnothing_2$，则由(1)知

$$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2,\quad \varnothing_2\subseteq\varnothing_1.$$

从而由定义 1.1.2 知 $\varnothing_1=\varnothing_2$，即空集是唯一的.

定义 1.1.3 称集合 A 的所有子集构成的集合为 A 的幂集，记为 2^A，即

$$2^A=\{S\mid S\subseteq A\}.$$

例 1.1.4 $2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

例 1.1.5 设 $A=\{a,b,c\}$，则 A 的子集有：

不含元素的子集：$\varnothing$；

只含一个元素的子集：$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；

含有两个元素的子集：$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$；

含有三个元素的子集：$A=\{a,b,c\}$.

所以，

$$2^A=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}.$$

例 1.1.6 设 $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，则 A 的子集有：

不含元素的子集：$\varnothing$；

只含一个元素的子集：$\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}$；

含有两个元素的子集：A.

所以

$$2^A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},A\}.$$

对于有限集的幂集有以下定理：

定理 1.1.2 设 A 是有限集，则 $\#2^A=2^{\#A}$.

证明 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 A 的子集有：

不含元素的子集：$\varnothing$(共 C_n^0 个)；

只含一个元素的子集：$\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}$(共 C_n^1 个)；

含有两个元素的子集：$\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\cdots,\{a_{n-1},a_n\}$ (共 C_n^2 个)；

……

含有 n 个元素的子集：$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$(共 C_n^n 个).

所以

$$\begin{aligned}\#2^A&=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n\\&=(1+1)^2=2^n\\&=2^{\#A}.\end{aligned}$$

1.1.2 集合的运算

1. 集合运算的定义

现在我们定义集合之间的并、交、差和补运算，借助这些运算可以由给定的集合构造出新的集合. 为此约定，在考虑集合有关问题时，总认为所涉及的集合都是某个集合 U 的子集，并称这个集合为全集(或论域).

定义 1.1.4 设集合 A,B，则由属于 A 或属于 B 的元素构成的集合称为 A,B 的并集(或并)，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或\ x\in B\}.$$

由 A,B 产生 $A\cup B$ 的运算称为并运算.

定义 1.1.5 设集合 A,B,则由属于 A 且属于 B 的元素构成的集合称为 A,B 的交集(或交),记为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由 A,B 产生 $A\cap B$ 的运算称为交运算.

例 1.1.7 设 $A=\{a,b,c\},B=\{c,d,e\}$,则

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e\},$$
$$A\cap B=\{c\}.$$

例 1.1.8 设 $A=\{1,2\},B=\{\varnothing,\{1,2\},1,2\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,\varnothing,\{1,2\}\},$$
$$A\cap B=\{1,2\},$$
$$\begin{aligned}2^A\cap B&=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}\cap\{\varnothing,\{1,2\},1,2\}\\&=\{\varnothing,\{1,2\}\}.\end{aligned}$$

例 1.1.9 设

$$A=\{1,2,7,8\},$$
$$B=\{i\mid i^2<30 \text{ 且 } i\in\mathbf{N}\},$$
$$C=\{i\mid i=2^k,-1\leqslant k\leqslant 3 \text{ 且 } k\in\mathbf{Z}\},$$

求 $A\cap(B\cup C)$.

解 因为 $B=\{0,1,2,3,4,5\},C=\left\{\frac{1}{2},1,2,4,8\right\}$,所以

$$\begin{aligned}&A\cap(B\cup C)\\&=\{1,2,7,8\}\cap\left\{\frac{1}{2},0,1,2,3,4,5,8\right\}\\&=\{1,2,8\}.\end{aligned}$$

定义 1.1.6 设集合 A,B,则由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合称为 A,B 的差集(或差),记为 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\overline{\in}B\}.$$

由 A,B 产生 $A\setminus B$ 的运算称为差运算.

特别称 $U\setminus A$(U 是全集)为 A 的补集(或补),记为 $\sim A$.由

A 产生 $\sim A$ 的运算称为补运算.

例 1.1.10 设全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 的子集

$$A=\{2,5,6\},\quad B=\{2,3,4\},$$

则

$$A\setminus B=\{5,6\},$$
$$B\setminus A=\{3,4\},$$
$$\sim A=\{0,1,3,4\},$$
$$\sim B=\{0,1,5,6\}.$$

例 1.1.11 设例 1.1.9 的全集 $U=\left\{\frac{1}{2},1,2,\cdots,9\right\}$,则

$$\begin{aligned}&C\setminus((\sim A)\cap B)\\&=\left\{\frac{1}{2},1,2,4,8\right\}\Big\backslash\left(\left\{\frac{1}{2},3,4,5,6,9\right\}\cap\{0,1,2,3,4,5\}\right)\\&=\left\{\frac{1}{2},1,2,4,8\right\}\Big\backslash\{3,4,5\}\\&=\left\{\frac{1}{2},1,2,8\right\}.\end{aligned}$$

由定义 1.1.6 可知,$x\in A$ 的充分必要条件是 $x\overline{\in}\sim A$,或者 $x\overline{\in}A$ 的充分必要条件是 $x\in\sim A$. 此外,还有以下定理:

定理 1.1.3 设 A,B 是集合,则

(1) $A\setminus B=A\cap(\sim B)$.

(2) $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

证明 (1) 由于对任意 $x\in U$(全集),有

$$\begin{aligned}x\in A\setminus B&\leftrightarrow^{①}x\in A\text{ 且 }x\overline{\in}B\\&\leftrightarrow x\in A\text{ 且 }x\in\sim B\\&\leftrightarrow x\in A\cap(\sim B),\end{aligned}$$

所以,由集合相等的定义得

① $\alpha\leftrightarrow\beta$ 表示 α 是 β 的充分必要条件.

$$A \setminus B = A \cap (\sim B).$$

(2) 由于对任意 $x \in U$,有

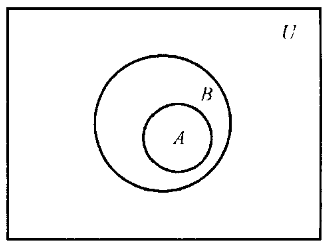
$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B \\ &\leftrightarrow x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} A \cap B \\ &\leftrightarrow x \in A \setminus (A \cap B), \end{aligned}$$

所以

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

由定理可知,集合的差运算可由集合交及补运算诱导而得.因此,并、交、补是集合的基本运算.

有时,集合的文氏图有助于直观理解集合之间的关系与运算.所谓集合的文氏图,就是用一个矩形中点的集合表示全集 U,用包含在这个矩形中的圆周或其他封闭曲线内部的点集表示 U 的子集.于是集合之间的包含关系及各种运算就可以形象地表示出来.图 1-1-1 表示了 $A \subset B$,图 1-1-2 的阴影部分表示了每个图形下面所指的集合.



$A \subset B$

图 1-1-1

2. 运算律

设 A,B,C 都是全集 U 的子集,则并、交及补运算满足下列基本规律:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.