[理工类]

新编硕士研究生

数学入学考试[复习指导]

2002

徐兵 韩於羹 编著

北京航空航天大学出版社
http://www.buaapress.com.cn

2002年考研必备

新编硕士研究生

数学

入学考试复习指导

（理工类）

徐　兵　韩於羹　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书内容丰富、新颖，以讲、练和题目分析、说明的形式，把理工类数学考研所要求的基本概念和基本内容条理清晰地予以阐明，使读者通过一定量的习题即可掌握考研大纲所要求的内容。本书复习与提高并重，共分三篇17章及附录两个。第一篇为高等数学，包括：函数、极限、连续性；一元函数微分学；一元函数积分学；向量代数和空间解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学；无穷级数；常微分方程，共8章；第二篇为线性代数，包括：行列式与矩阵；向量；线性方程组；相似矩阵与二次型，共4章；第三篇为概率论与数理统计初步，包括：随机事件和概率；随机变量及其分布；随机变量的数字特征；大数定律和中心极限定理；数理统计初步，共5章。附录中附录一为2001年数学一试题参考解答及评分标准，附录二为2001年数学二试题参考解答及评分标准。

本书是专为理工类考硕士研究生而编写的重要参考书，也可作为爱好数学的读者及数学教师的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学复习与指导：理工类/徐兵等编著. —北京：北京航空航天大学出版社，2001.3

ISBN 7-81077-043-8

Ⅰ. 硕... Ⅱ. 徐... Ⅲ. 数学 研究生 入学考试—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第04014号

新编硕士研究生数学

入学考试复习指导

(理工类)

徐 兵 韩於羹 编著

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市学院路37号 邮编：100083 发行部电话：(010)82317024

http://www.buaapress.com.cn

E—mail:pressell@publica.bj.cninfo.net

北京宏文印刷厂印装 各地书店经销

开本：787×1092 1/16 印张：30.5 字数：780千字

2001年3月第1版 2001年3月第1次印刷 印数：12000册

ISBN 7-81077-043-8/O·004 定价：39.00元

前　言

近年来参加硕士研究生入学考试的考生不断增加。1996 年国家教委对《考试大纲》进行了重大修订，对试卷分类和考试内容的广度、深度作了较大调整。近几年来教育部考试中心还对《考试大纲》逐年加以局部修订。这些变化对考生提出了更高的要求，考生们需要一本适应现状又适宜自学复习的辅导书。

本书作者从事教学教育实践均已 30 多年，参加过多种层次的考试命题，多年来一直参加研究生的考试辅导工作。作者曾逐年对数学《教学大纲》、《考试大纲》进行对照研究，对历年研究生入学考试数学试题进行分析。基于对研究生入学考试的性质、命题指导思想的认识、对试题题型与内容及难度关系的研究，针对考生中出现的普遍问题及学生学习数学中的常见问题，依据《考试大纲》编写此书。作者认为有必要提请考生明确四个问题，以此作为复习中的方向。

全国硕士研究生入学考试具有两个功能：一是选拔功能；二是从考试的测量功能上看，它又是水平考试，用来测量考生是否达到一定的水平。因此命题不以《教学大纲》或某一指定的教材为依据，而是以《考试大纲》为依据。考试大纲规定的考试内容和考试要求与教学大纲不完全相同。教学大纲中规定的有些内容并不作考查，而考试大纲中的某些考试要求略高于教学要求。这是考生应明确的第一个问题。

全国硕士研究生入学考试的命题指导思想是坚持两个“有利于”，即：一是有利于国家对高层次人才的选拔；二是有利于数学教学质量的提高。因此要求数学考试试题的编制能综合高等学校的教学实际，考试水平既能反映教学的实际水平，也能指导研究生新生明确应当具备的知识和能力。同时正确利用这根“指挥棒”引导高校教学向培养学生应用数学能力的方向发展，使得学生学而有用，学而会用，对促进教学质量的提高起到积极促进作用。这是考生应该明确的第二个问题。

硕士研究生入学考试的数学试题以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主，并在这个基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像力和综合所学知识解决实际问题能力的考查。

试题就知识内容来说有覆盖面较大的特点。就其试题题型与难度来说有以下特点：

填空题用于考查“三基”及数学重要性质。一般来说，不出成省去解答过程的大计算题，以中等难度的试题为主。

选择题主要是考查考生对数学概念、数学性质的理解，并能进行简单推理、判定和比较。一般不出纯粹的计算题。

综合题考查的是知识之间的有机的结合。应用题一般结合与考生专业相关的背景知识，避免出现不公平性。

以上是考生应明确的第三个问题。

命题有明确的共性，就是保持历年试题难度的稳定性。这是考生应明确的第四个问题。

基于对上述问题的认识，作者历经十年研磨成此书。

此书力图突出以下特色：

1. 书中融入了近十年全国研究生入学数学(一)、(二)考试试题(包括 2001 年入学考试数

学试题)及命题的基本演变思想。

2. 注意基本概念的要素、基本性质的特点。为了使读者在每个题目中获取更多的知识信息,选择题中有些为多选题,题目中对选择题逐一给出分析,引导读者学会分析方法。

3. 突出计算方法的基本思想。这是衡量一个人功力的重要因素。注意计算方法的条理化,并针对计算中应注意的问题给出较多的思考题,以期引导读者明确方法的条件及要点,以利于其学会用方法的基本思想解决更广泛的问题。

4. 对综合性问题进行了较多的分析解说,以期提高考生将所学知识综合运用的能力。

5. 各章给出了内容概要及典型例题分析。各讲内容都不涉及后面的内容,而后面的内容尽量包括前面内容的综合运用,以利于读者复习。

本书第一篇高等数学由北京航空航天大学徐　兵教授编写。第二篇线性代数、第三篇概率论与数理统计初步由北京航空航天大学韩於羹教授编写。

本书完整地把 2001 年研究生入学考试题解答及评分标准(仅在格式及标点符号上为了全书的基本一致有所更动)作为全书的附录放在最后,供广大读者自我测试之用,以便通过它了解 2001 年数学题的关键点。

书中纰误难免,恳请读者指正。

作　者

于北京航空航天大学

2001 年 3 月

说　明

1. 作者提请读者注意：本书适用于参加全国硕士研究生入学考试数学(一)、数学(二)的辅导。为了有利于考生能有针对性地阅读本书，请读者注意研究生入学考试试题数学(一)、数学(二)各部分内容分布的统计表。

内容 \ 分值 \ 年份	数学(一)					数学(二)				
	1997	1998	1999	2000	2001	1997	1998	1999	2000	2001
函数、极限、连续	9	6	3	5	2	22	19	16	16	18
一元函数微分学	6	9	9	6	14	25	20	23	32	27
一元函数积分学	3	6	14	6	6	19	26	30	25	25
向量代数与空间解析几何	6	6	3	3	0	/	/	/	/	/
多元函数微分学	10	3	7	7	13	/	/	/	/	/
多元函数积分学	10	16	7	16	11	/	/	/	/	/
无穷级数	11	5	8	9	8	/	/	/	/	/
常微分方程初步	5	9	9	8	6	18	19	14	11	15
线性代数	22	20	20	20	20	16	16	17	16	15
概率论与数理统计初步	18	20	20	20	20	/	/	/	/	/

2. 书中题目前标有(99103)，(00205)分别表示此题为 1999 年数学(一)中的试题，其分值为 3 分及题目为 2000 年数学(二)中的试题，其分值为 5 分。

目　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计初步

附录　2001年全国工学硕士研究生入学考试数学试题参考解答及评分标准

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续性

§1.1　函　数

一、 内容概要

（一）　函数的定义

定义 1　对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记为 $y = f(x)$ 。

常称 x 为**自变量**，y 为**函数**。称使函数有定义的值的全体为函数的**定义域**。

我们称 x 与 y 之间的确定的规则为“依赖关系”，称上述定义为函数的“**依赖关系定义**”。

说明　19 世纪 70 年代，函数又被定义为集合间对应关系：设 A，B 为两个集合。如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中有元素和它对应。那么，这种对应叫做集合 A 到集合 B 的映射，又叫做函数。常记为 $y = f(x)$ 。我们称这种定义为函数的“集合定义”。到了 20 世纪 60 年代，一些教科书中采用了“序偶”形式的函数的新定义。

函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则（或称依赖关系）。

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才认为它们是同一个函数。

常见的问题有：

1. 求函数的定义域

通常对于由解析表达式表达的简单函数所要求的是：

分式中的分母不能为零；

偶次方根号下的表达式不能取负值；

对数的真数必须大于零；

取反正弦、反余弦的表达式的绝对值不能大于 1；

取正切的角不能为 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为整数)等等；

对于实际问题则需保证其有符合题意的条件。

求复合函数的定义域时，通常可以由外层到里层考察相应函数在满足前面层次条件下的定义域，直到最里层，即可求出复合函数的定义域。

2. 函数符号的运用问题

此类问题可分为三类：

(1) 已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的表达式，求函数 $f[g(x)]$的表达式。

这类问题相当于已知函数 $y = f(u)$，$u = g(x)$ ，求复合函数 $f[g(x)]$。

(2) 已知 $f[g(x)]$的表达式，求 $f(x)$的表达式。

这类问题的求解有两种途径：

① 令 $u = g(x)$ ，从中反解出 $x = \varphi(u)$ ，求出 $f(u)$的表达式，再将 u 换为 x，即得 $f(x)$的表达式。

② 将 $f[g(x)]$的表达式凑成 $g(x)$的函数关系式，然后将所有 $g(x)$的位置换为 x，则得 $f(x)$。

(3) 已知 $f(x)$和 $f(g(x))$的表达式，求 $g(x)$。

这类问题是由复合函数的表达式来求“中间变量”。

(二) 函数的性质

1. 单调性

定义 2　设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，如果对于该区间内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在该区间内**单调增加(减少)**。

单调增加与单调减少统称为**单调**。函数的单调性不能脱离区间而言。如果没有指明区间而说“$f(x)$为单调函数”，总要理解为 $f(x)$在其定义区间上为单调函数。

判定函数 $y=f(x)$ 单调性的常见方法：

(1) 依定义判定　在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_1)$与 $f(x_2)$。如果总有 $f(x_2)-f(x_1)>0$，则 $f(x)$在该区间内单调增加；如果总有 $f(x_2)-f(x_1)<0$，则 $f(x)$在该区间内单调减少。

(2) 依导数的符号判定　如果在某区间内总有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在该区间内单调增加；如果在某区间内总有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在该区间内单调减少。

通常都用第二种方法判定(留待第二章介绍)。

2. 奇偶性

定义 3　设 $y=f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则有 $-x\in D$)，如果对于 D 内任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为 D 内的**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为 D 内的**奇函数**。

奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称。

两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；两个奇(偶)函数之积必为偶函数；奇函数与偶函数之积必为奇函数。

判定函数奇偶性的方法是利用定义或上述性质。

3. 周期性

定义 4　若存在 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**。使得上述关系式成立的最小正数 T，称为 $f(x)$的**最小周期**，简称为函数 $f(x)$的**周期**。

并不是每个周期函数都有周期。

4. 有界性

定义 5　设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义。若存在 $M>0$，对于该区间内任意的 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在该区间内为有界函数。

如果没有指明区间，而是说“$f(x)$为有界函数”，总要理解为 $f(x)$在其定义区间内为有界函数。

判定函数有界性通常采用：

(1) 闭区间上的连续函数必定为有界函数。如果 $f(x)$为$(a,+\infty)$内的连续函数，只需考察 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 是否存在。若上述两个极限都存在，则 $f(x)$在$(a,+\infty)$内为有界函数。

(2) 适当放大或缩小有关表达式导出其界。

(3) 利用基本初等函数图形。

（三）初等函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 D_y。若对 D_y 中的每一个值 y，通过关系 $y=f(x)$，有值 x 与之对应，这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$，常称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**。习惯上常将 x 作为自变量，将 y 作为因变量，因此，需将 $x=\varphi(y)$ 中的 y 换为 x，将其中的 x 换为 y，从而得到 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。

求反函数的一般步骤为：

(1) 在 $y=f(x)$ 中将 y 作为已知量，解出 x，即得 $x=\varphi(y)$。

(2) 在 $x=\varphi(y)$ 中交换 x,y 的位置，即将 x 换为 y，将 y 换为 x，则可得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$。

反函数图形的特点　函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 这两条曲线在 Oxy 坐标面上关于直线 $y=x$ 对称。

2. 基本初等函数

幂函数　$y=x^\mu$　（μ 为实数）；

指数函数　$y=a^x$　（$a>0,a\neq 1$）；

对数函数　$y=\log_a x$　（$a>0,a\neq 1$）；

三角函数　$y=\sin x$，　$y=\cos x$，　$y=\tan x$，　$y=\cot x$，　$y=\sec x$，　$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，　$y=\arccos x$，　$y=\arctan x$，　$y=\text{arccot}\, x$。

定义 7 上述五类函数统称为**基本初等函数**。

3. 复合函数

定义 8 若对于 x 在某一范围中的每一个确定的值，依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应 $u=g(x)$，而对于 u 的此确定值，y 按某确定的规则有值与之对应 $y=f(u)$，则称 y 为 x 的**复合函数**，常记为 $y=f(g(x))$。称 x 为自变量，u 为中间变量，y 为函数。

并不是任何两个函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 都能复合成 y 为 x 的函数。例如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 不能复合成复合函数。因为不论 x 取什么值，相应的 u 总有不小于 2 的值存在，但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leqslant 1$，因此可知 $\arcsin(x^2+2)$ 是无意义的。

4. 初等函数

定义 9 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**。

二、典型例题分析

思考题 1 函数"依赖关系定义"的关键特征是什么？

分析 函数"依赖关系定义"指出："对于 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按照某个规则总有值与之相对应，则称 y 为 x 的函数。常记为 $y=f(x)$。"分析上述定义可以知道，它有两个关键特征：

x 的取值允许范围，即函数的定义域；

对应规则，即函数的依赖关系。

因此说，函数概念的两个基本要素为：定义域、对应规则（或称依赖关系）。

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数。

至于说“对应规则”的特点及 y 的取值特点，在函数的定义中并没有限制，因此可能出现：

(1) 当自变量 x 的值变动时，变量 y 的取值不一定随 x 的变动而变化，y 可能总取一个值。如 $y=c$（常数）也表示一个函数。

(2) 函数对应规则的形式没有加以限制。

① 如果函数对应规则的形式是解析表达式，且它可以表示为 $y=f(x)$，则称此函数为显式表示。

② 如果函数对应规则是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的，则称 y 是 x 的隐函数。

③ 如果函数对应规则是由几个解析表达式来表示的，则称之为分段函数。如

$$y=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2+1 & 0\leqslant x<1 \\ x^2 & x\geqslant 1 \end{cases}$$

注意，这里的 $y=f(x)$ 不是三个函数，而是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数，它是由三个解析表达式表示的函数。

④ 如果 x 与 y 是通过第三个变量联系起来的，如 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则称这种函数关系为参数方程表示的函数。

⑤ 如果对应规则是由表格或图形表示出来的，则称这种表示为函数的表格表示法或图形表示法。

例 1　选择题　下列函数对中为同一个函数的有(　)。

A. $y_1=x, y_2=\dfrac{x^2}{x}$；　　B. $y_1=x, y_2=\sqrt{x^2}$；

C. $y_1=\sqrt{x^2}, y_2=|x|$；　　D. $y_1=x, y_2=(\sqrt{x})^2$。

分析　对于 A，易见 y_1 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 y_2 的定义域为 $x\neq 0$，即 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。可知 y_1 与 y_2 的定义域不相同，因此 y_1 与 y_2 不是同一个函数，故应排除 A。

对于 B，y_1 与 y_2 的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$；而 $y_1=x$，$y_2=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} -x & x<0 \\ x & x\geqslant 0 \end{cases}$，$y_2$ 为分段函数。易见 y_1 与 y_2 的表达式不相同。因此 y_1 与 y_2 也不是同一个函数，故应排除 B。

对于 C，y_1 与 y_2 的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$；由 B 的分析可知，C 中 y_1 与 y_2 的表达式也相同。因此 y_1 与 y_2 表示同一个函数，故应选 C。

对于 D，$y_1=x$，$y_2=(\sqrt{x})^2=x$，两者表达式相同，但是 y_1 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 y_2 的定义域为 $x\geqslant 0$，因此 y_1 与 y_2 也不是同一个函数，故应排除 D。

综合之，本例应单选 C。

例 2　设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f(f(x))$。

分析　由题意可知，$f(\ )=\dfrac{(\ )}{1-(\ )}$，因此当 $x\neq 1$，$x\neq\dfrac{1}{2}$ 时

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

有必要指出，对于分段函数的相应问题应该注意函数表达式与定义范围两者之间的相互

关系。

思考题 2　试分析下列运算是否正确。

$$\text{"设 } f(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}, \text{求 } f(-x)。$$

解　由 $f(x)$ 的表达式可知，欲求 $f(-x)$ 可将 $-x$ 代替 $f(x)$ 表达式中 x 的位置，即

$$f(-x) = \begin{cases} (-x) & x \geqslant 0 \\ (-x)^2 & x < 0 \end{cases}\text{"}$$

分析　读者先注意所给 $f(-x)$ 的表达式及其自变量相应的取值范围，不难发现运算中 $f(x)$ 的表达式及其自变量取值范围不一致。这是上述运算的症结所在。在所给函数表达式中 $f(x)=x$ 仅在 $x \geqslant 0$ 时才成立，因此 $f(-x)=-x$ 也只能在 $-x \geqslant 0$ 时才能成立。故知正确的运算应为：

$$f(-x) = \begin{cases} (-x) & -x \geqslant 0 \\ (-x)^2 & -x < 0 \end{cases}$$

即

$$f(-x) = \begin{cases} -x & x \leqslant 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

例 3　若 $f(x+1) = x^2 + 3x + 3$，求 $f(x)$。

分析　例 3 与例 2 是相反的问题。由 $f(g(x))$ 的关系式求出 $f(x)$ 的表达式，常见的方法有两种：

在本例中，令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，代入所给 $f(x+1)$ 关系式，则有

$$f(t) = (t-1)^2 + 3(t-1) + 3 = t^2 + t + 1$$

因此　　$f(x) = x^2 + x + 1$

如果采用第二种方法，则有

$$f(x+1) = (x^2 + 2x + 1) + (x+1) + 1 = (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

因此　　$f(x) = x^2 + x + 1$

例 4　选择题　设 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x) = f(x)\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 必定为(　)。

A. 奇函数；　　B. 偶函数；

C. 奇偶性与 a 有关；　　D. 非奇非偶函数。

分析　欲判定 $F(x)$ 的奇偶性，只需依定义判定。

$$F(-x) = f(-x)\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1} = -f(x)\cdot\frac{a^{-x}(1+a^x)}{a^{-x}(1-a^x)} = f(x)\frac{a^x+1}{a^x-1} = F(x)$$

因此 $F(x)$ 为偶函数。故本例应选 B。

说明　如果问题中没有指明区间，只是指出 $f(x)$ 为奇函数（或偶函数，或有界函数等），通常要理解为是在 $f(x)$ 的定义区间上成立。

例 5　选择题　在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 为

A. 奇函数；　　B. 偶函数；

C. 无界函数；　　D. 有界函数。

分析　所给选项为两类，需分别研究。

$f(-x)=\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$，既不等于 $-f(x)$，也不等于 $f(x)$，因此 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数，故应排除 A 与 B。

由于 $0\leqslant f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}=\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}=1+\dfrac{2x}{1+x^2}\leqslant 2$，可知 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数，故应排除 C，选 D。

综合之，本例应单选 D。

上述判定函数有界性是利用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$。

说明　对于 $f(x)$ 的有界性也可以利用闭区间上连续函数的有界性判定，由于 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，因此对任意的 $M>0$，$f(x)$ 为 $[-M,M]$ 上的连续函数，可知 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上为有界函数。又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}=1$$

可知 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的有界函数。

例 6　设 $y=\sqrt{\ln(x-1)}$，求 y 的定义域。

分析　求复合函数的定义域，通常可以先将复合函数由外及里分解为简单函数。然后由外层到里层，考察相应的简单函数在满足前一层次有定义条件下的定义范围，直至最里层。

本例由外到里可分解为 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=x-1$。先考察最外层函数，应有 $u\geqslant 0$，因此需 $u=\ln v\geqslant 0$，从而知 $v\geqslant 1$。进而知 $v=x-1\geqslant 1$，可得 $x\geqslant 2$ 为所求函数的定义域。

例 7　设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & |x|<1\\ x^2+1 & |x|\geqslant 1\end{cases}$，求 $f(f(x))$。

分析　所给问题为分段函数的复合函数问题。

当 $0<|x|<1$ 时，$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$，故

$$f(f(x))=\sqrt{1-f^2(x)}=$$
$$\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$$

当 $x=0$ 时，$|f(0)|=\sqrt{1-0^2}=1$，故

$$f(f(0))=(f(0))^2+1=2$$

当 $|x|\geqslant 1$ 时，$|f(x)|=x^2+1>1$，故

$$f(f(x))=f^2(x)+1=$$
$$(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

综合之

$$f(f(x))=\begin{cases}|x| & 0<|x|<1\\ 2 & x=0\\ x^4+2x^2+2 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

说明 由本例可以看出，对于分段函数的复合函数，应该注意自变量与中间变量的取值范围，这是保障运算正确的关键。

例 8 若 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并求出它的定义域。

分析 所给问题为已知复合函数的表达式反过来求“中间变量”的问题。求解的关键是将 $f[\varphi(x)]$的表达式转化为 $\varphi(x)$的表达式形式。

注意到 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$，且 $f(\varphi(x))=1-x$，可得

$e^{\varphi^2(x)}=1-x$，两端取对数解得

$$\varphi^2(x)=\ln(1-x),\quad \varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$$

由于 $\varphi(x)\geqslant 0$，可得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

进而可得其定义域为 $x\leqslant 0$。

例 9 求 $y=\dfrac{1}{2}(10^x-10^{-x})$ 的反函数。

分析 由所给表达式解出 x：由于

$$2y=10^x-10^{-x}=10^{-x}(10^{2x}-1)$$

从而有 $2y\,10^x=10^{2x}-1$，化为

$$10^{2x}-2y\,10^x-1=0$$

可得

$$10^x=\frac{2y\pm\sqrt{(-2y)^2-4\cdot(-1)}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $10^x>0$，可知应舍掉 $y-\sqrt{y^2+1}$，得

$$10^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

$$x=\lg(y+\sqrt{y^2+1})$$

从而可得所求反函数 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$。

例 10 设

$$y=\begin{cases}x & x<1\\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x & 4<x\end{cases}$$

求其反函数。

分析 所给问题为求分段函数的反函数问题。求反函数的方法与前述方法相同。

当 $x<1$ 时，可得 $x=y$，对应 $y<1$。

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，可得 $x=\sqrt{y}$，相应有 $1\leqslant y\leqslant 16$。

当 $x>4$ 时，可由 $y=2^x$ 解得 $x=\mathrm{lb}\,y$，相应有 $y>2^4=16$。

综合之可得

$$x=\begin{cases}y & y<1\\ \sqrt{y} & 1\leqslant y\leqslant 16\\ \mathrm{lb}\,y & y>16\end{cases}$$