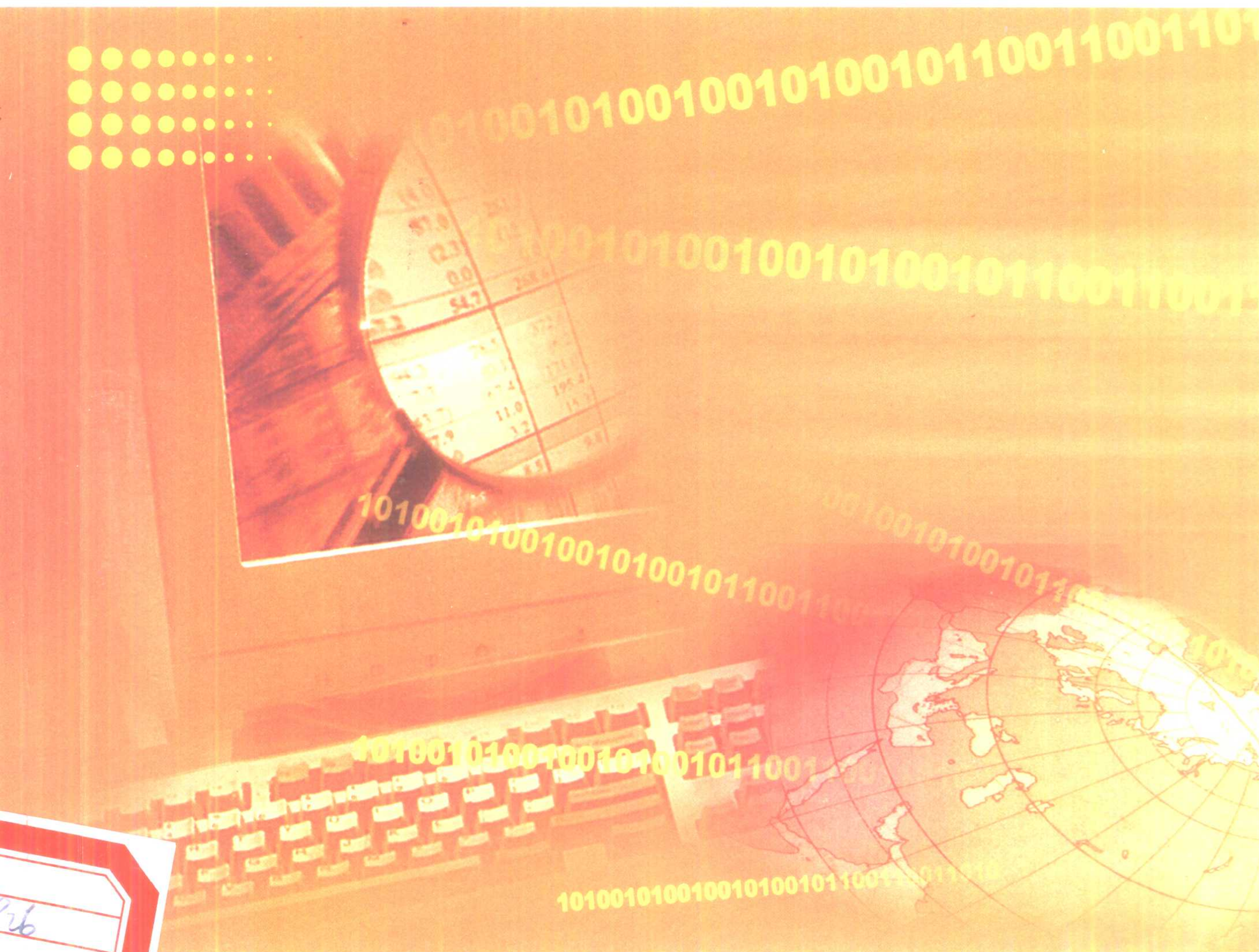
高等学校电子信息类规划教材

数字信号处理

（第二版）

丁玉美　高西全　编著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校
电子信息类 规划教材

数字信号处理

（第二版）

丁玉美　高西全　编著

西安电子科技大学出版社
2001

内 容 简 介

本书是在1994年编写的《数字信号处理》(全国统编教材)的基础上重新修订的，属数字信号处理基本理论和分析的基础书，系电子信息类部级重点规划教材。

全书共10章，第一章：时域离散信号和时域离散系统；第二章：时域离散信号和系统的频域分析，包括傅里叶变换和Z变换；第三、四章：离散傅里叶变换、快速傅里叶变换；第五章：时域离散系统的基本网络结构与状态变量分析法；第六、七章：无限脉冲响应数字滤波器的设计、有限脉冲响应数字滤波器的设计；第八章：其它类型的数字滤波器，包括全通滤波器、梳状滤波器、格型滤波器以及抽取与插值滤波等；第九章：数字信号处理的实现，包括实现中的量化误差分析、软件实现和硬件实现；第十章：上机实验，包括四个试验的实验指导。每章后有习题。

本书可作为无线电技术类专业本科生的必修课教材，或者相近专业本科、大专生的必修课或选修课教材，也可作为有关科技人员的数字信号处理理论基础参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/丁玉美等编著. —2版. —西安：西安电子科技大学出版社，2000.12

ISBN 7-5606-0922-8

Ⅰ. 数… Ⅱ. 丁… Ⅲ. 数字信号-信号处理-教材 Ⅳ. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第45313号

责任编辑 夏大平 孙雪妹

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话 (029)8227828　　邮　编 710071

http://www.xduph.com　　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经　　销 新华书店

印　　刷 空军工程学院印刷厂

版　　次 1994年6月第1版　2001年1月第2版　2001年1月第7次印刷

开　　本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 20.25

字　　数 483千字

印　　数 33 001～37 000册

定　　价 21.00元

ISBN 7-5606-0922-8/TN·0160

出版说明

为做好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作，根据国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》，我们组织各有关高等学校、中等专业学校、出版社，各专业教学指导委员会，在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上，根据当代电子信息科学技术的发展和面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，编制了《1996—2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报，经各学校、出版社推荐，由各专业教学指导委员会评选，并由我们与各专指委、出版社协商后审核确定的。本轮规划教材的编制，注意了将教学改革力度较大、有创新精神、有特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需、尚无正式教材的选题优先列于规划。在重点规划本科、专科和中专教材的同时，选择了一批对学科发展具有重要意义，反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划，以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足，希望使用教材的学校、教师、学生和其他广大读者积极提出批评和建议，以不断提高教材的编写、出版质量，共同为电子信息类专业教材建设服务。

电子工业部教材办公室

前　言

本教材系按原电子工业部的《1996～2000 全国电子信息类专业教材编审出版规划》，由通信与信息工程专业教学指导委员会编审、推荐出版。本教材由西安电子科技大学丁玉美担任主编。

本教材主要内容分成三部分，第一部分包括第一、二、三、四章，是数字信号处理的基础理论部分。第一章学习时域离散信号和系统的描述方法、线性常系数差分方程以及模拟信号数字处理方法；第二、三章学习三个重要的数学变换工具：序列的傅里叶变换(FT)、Z变换、离散傅里叶变换(DFT)，以及用它们对时域离散信号和系统进行频域分析的方法。第四章介绍 FFT，它只是 DFT 的一种快速算法。第二部分包括第五、六、七、八章，主要学习数字滤波器的基本理论和设计方法，包括 IIR 数字滤波器、FIR 数字滤波器、几种特殊数字滤波器，以及网络结构和状态变量分析法。关于模拟滤波器的设计方法，本不属于本书的内容，但它是设计 IIR 数字滤波器的基础，考虑到学生的基本课程中一般不介绍这部分内容，为了让学生真正地掌握数字滤波器设计方法，将这部分内容放在正文中。第三部分包括第九、十章，是数字信号处理的技术实现，包括软、硬件实现方法、实现中的量化误差，以及本书的全部上机实验。上机实验部分可以按照实验内容适当分配到各章中进行。

本书先修课是信号与系统、工程数学等，书中有些内容，如差分方程、Z 变换等，可以根据学生的已有基础情况，作适当的省略或者补充。

本书的参考学时数为 60 小时，如时数不够，建议只进行前七章，且前七章中的前三章是必学内容，FFT 仅作为 DFT 快速算法只学习基本原理和用法，其它状态变量分析法、分裂基 FFT 算法、离散哈特莱变换(DHT)、IIR 数字滤波器的直接设计法、利用切比雪夫逼近法设计 FIR 滤波器等可以不讲，或者作为选修内容。

本书是在 1994 年编写的《数字信号处理》(全国统编教材)的基础上重新修订的。全书条理清楚，深入浅出，便于教学和自学。修订后的教材比原教材更加突出了基本概念和基本理论；加强了实践环节，例题和习题增多，尤其增加了数字信号处理的软、硬件实现方法，更加突出了理论和实践相结合的环节；由于计算机的迅速发展，去掉了实际应用中已不重要的有限寄存器长度效应部分，仅将重要的量化误差概念放在第九章中介绍。为了方便读者学习，与本书配套将同时出版《数字信号处理学习指导》一书。

本教材由高西全编写第三、四、八、九、十章，其它由丁玉美编写，樊来耀为本书提出了许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

作　者

2000 年 10 月

目　　录

绪　论

1. 数字信号处理的基本概念

几乎在所有的工程技术领域中都会涉及到信号处理问题，其信号表现形式有电、磁、机械以及热、光、声等。信号处理的目的一般是对信号进行分析、变换、综合、估值与识别等。这里信号的类别有两种：一种是连续信号(即模拟信号)，它的幅度和时间都取连续变量；另一种是数字信号，它的幅度和时间都取离散值。一般来说，数字信号处理的对象是数字信号，模拟信号处理的对象是模拟信号。但是，如果系统中增加数模转换器和模数转换器，那么，数字信号处理系统也可以处理模拟信号，模拟信号处理系统也可以处理数字信号。这里关键的问题是两种信号处理系统对信号处理的方式不同，数字信号处理是采用数值计算的方法，完成对信号的处理，而模拟信号处理则是通过一些模拟器件，例如晶体管、电阻、电容、电感等，完成对信号的处理。例如，图 0.0.1(a)所示的是一个简单的模拟高通滤波器，它是由电阻 R 和电容 C 组成的，而图 0.0.1(b)则是一个简单的数字高通滤波器，它是由一个加法器、一个乘法器和一个延时器组成的。因此，简单地说，数字信号处理就是用数值计算的方法对信号进行处理，这里“处理”的实质是“运算”。

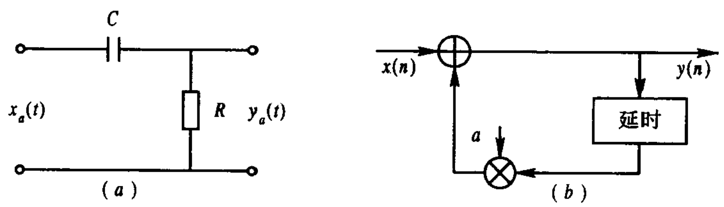


图 0.0.1　高通滤波器简型

(a) 简单的模拟高通滤波器；(b) 简单的数字高通滤波器

2. 数字信号处理的实现方法

数字信号处理的主要对象是数字信号，且是采用运算的方法达到处理目的的，因此，其实现方法不同于模拟信号的实现方法，基本上可以分成两种实现方法，即软件实现方法和硬件实现方法。软件实现方法指的是按照原理和算法，自己编写程序或者采用现成的程序在通用计算机上实现；硬件实现指的是按照具体的要求和算法，设计硬件结构图，用乘法器、加法器、延时器、控制器、存储器以及输入输出接口部件实现的一种方法。显然前者灵活，只要改变程序中的有关参数，例如只要改变图 0.0.1(b)中的 a 参数，数字滤波器可能就是低通、带通或高通滤波器，但是运算速度慢，一般达不到实时处理，因此，这种方法适合于科研和教学。后者运算速度快，可以达到实时处理要求，但是不灵活。

用单片机实现的方法可以称为软硬结合，现在单片机发展很快，功能也很强，配以数字信号处理软件，既灵活，速度又比软件方法快，这种方法适用于数字控制等。采用专用的数字信号处理芯片(DSP 芯片)是目前发展最快、应用最广的一种方法。因为 DSP 芯片较之单片机有更为突出的优点，它结合了数字信号处理的特点，内部配有乘法器和累加器，结构上采用了流水线工作方式以及并行结构、多总线，且配有适合数字信号处理的指令，是一类可实现高速运算的微处理器。目前 DSP 芯片已进入市场，且正在高速发展，速度高，体积小，性能优良，价格也在不断下降。可以说，用 DSP 芯片实现数字信号处理，正在变成或已经变成工程技术领域中的主要方法。

综上所述，如果从数字信号处理的实际应用情况和发展考虑，数字信号处理的实现方法分成两类，一类是软件实现，一类是硬件实现。而硬件实现指的是选用合适的 DSP 芯片，配有适合芯片语言及任务要求的软件，实现某种信号处理功能的一种方法。这种系统无疑是一种最佳的数字信号处理系统。

3. 数字信号处理的特点

由于数字信号处理的直接对象是数字信号，处理的方式是数值运算的方式，使它相对模拟信号处理具有许多优点，归纳起来有以下优点：

1) 灵活性

数字信号处理系统(简称数字系统)的性能取决于系统参数，这些参数存储在存贮器中，很容易改变，因此系统的性能容易改变，甚至通过参数的改变，系统变成了另外完全不同的系统。灵活性还表现在数字系统可以分时复用，用一套数字系统分时处理几路信号。

2) 高精度和高稳定性

数字系统的特性不易随使用条件变化而变化，尤其使用了超大规模集成的 DSP 芯片，设备简化，更提高了系统的稳定性和可靠性。运算位数又由 8 位提高到 16、32、64 位，在计算精度方面，模拟系统是不能和数字系统相比拟的，为此，许多测量仪器为满足高精度的要求只能采用数字系统。

3) 便于大规模集成

数字部件具有高度的规范性，对电路参数要求不严，容易大规模集成和大规模生产，这也是 DSP 芯片发展迅速的原因之一。由于采用了大规模集成电路，数字系统体积小、重量轻、可靠性强。

4) 对数字信号可以存储、运算，系统可以获得高性能指标

这一优点更加使数字信号处理不再仅仅限于对模拟系统的逼近上，它可以完成许多模拟系统完不成的任务。例如，电视系统中的画中画、多画面、各种视频特技，包括画面压缩、画面放大、画面坐标旋转、演员特技制作、特殊的配音制作、数字滤波器严格的线性相位特性，甚至非因果系统可通过延时实现，等等。

正是由于以上的优点，数字信号处理的理论和技术一出现就受到人们的极大关注，发展非常迅速。国际上一般把 1965 年作为数字信号处理这一门新学科的开端，仅仅 30 多年，这门学科就基本上形成了自己一套完整的理论体系，其中也包括各种快速的和优良的算法。而且随着各种电子技术及计算机技术的飞速发展，数字信号处理的理论和技术还在不

断丰富和完善，新的理论和技术层出不穷。可以说，数字信号处理是应用最快、成效最显著的新学科之一，目前已广泛地应用在语音、雷达、声纳、地震、图像、通信、控制、生物医学、遥感遥测、地质勘探、航空航天、故障检测、自动化仪表等领域。尤其可以说，数字信号处理的理论和技术是目前高新理论和技术的强有力的基础。

数字信号处理涉及到的内容非常丰富和广泛，本书作为专业基础课，主要学习其基本理论和基本分析方法。这门课是一门理论和实践、原理和应用结合紧密的课程，因而此书章后有习题，书后有实验，以便于教学与自学。

第一章　时域离散信号和时域离散系统

1.1　引言

信号通常是一个自变量或几个自变量的函数。如果仅有一个自变量，则称为一维信号；如果有两个以上的自变量，则称为多维信号。本书仅研究一维数字信号处理的理论与技术。关于信号的自变量，有多种形式，可以是时间、距离、温度、电压等，本书一般把信号看作时间的函数。针对信号的自变量和函数值取值形式，下面介绍三种信号。

如果信号的自变量和函数值都取连续值，则称这种信号为模拟信号或者称为时域连续信号，例如语言信号、电视信号等。如果自变量取离散值，而函数值取连续值，则称这种信号为时域离散信号，这种信号通常来源于对模拟信号的采样。如果信号的自变量和函数值均取离散值，则称为数字信号。数字信号也可以说成是信号幅度离散化了的时域离散信号。我们知道，计算机或者专用数字信号处理芯片的位数是有限的，用它们分析与处理信号，信号的函数值必须用有限位的二进制编码表示，这样信号本身的取值不再是连续的，而是离散值。这种用有限位二进制编码表示的时域离散信号就是数字信号，因此，数字信号是幅度量化了的时域离散信号。

信号有模拟信号、时域离散信号和数字信号之分，按照系统的输入输出是哪一类信号，系统也有模拟系统、时域离散系统和数字系统之分。当然也还存在模拟网络和数字网络构成的混合系统。

本章作为全书的基础，主要学习时域离散信号的表示方法和典型信号、线性时不变系统的因果性和稳定性，以及系统的输入输出描述法，线性常系数差分方程的解法。最后介绍模拟信号数字处理方法。

1.2　时域离散信号

对模拟信号 $x_a(t)$进行等间隔采样，采样间隔为 T，得到

$$x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.2.1}$$

这里 n 取整数。对于不同的 n 值，$x_a(nT)$是一个有序的数字序列：$\cdots x_a(-T)$、$x_a(0)$、$x_a(T)\cdots$，该数字序列就是时域离散信号。实际信号处理中，这些数字序列值按顺序放在存贮器中，此时 nT 代表的是前后顺序。为简化，采样间隔可以不写，形成 $x(n)$信号，$x(n)$可以称为序列。对于具体信号，$x(n)$也代表第 n 个序列值。需要说明的是，这里 n 取整数，非整数时无定义，另外，在数值上它等于信号的采样值，即

$$x(n) = x_a(nT), \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.2.2}$$

信号随 n 的变化规律可以用公式表示，也可以用图形表示。如果 $x(n)$是通过观测得到的一

组离散数据，则其可以用集合符号表示，例如：

$$x(n) = \{\cdots 1.3,\ 2.5,\ 3.3,\ 1.9,\ 0,\ 4.1\ \cdots\}$$

1.2.1　常用的典型序列

1. 单位采样序列 $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

单位采样序列也可以称为单位脉冲序列，特点是仅在 $n=0$ 时取值为 1，其它均为零。它类似于模拟信号和系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$，但不同的是 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时，取值无穷大，$t\neq 0$ 时取值为零，对时间 t 的积分为 1。单位采样序列和单位冲激信号如图 1.2.1 所示。

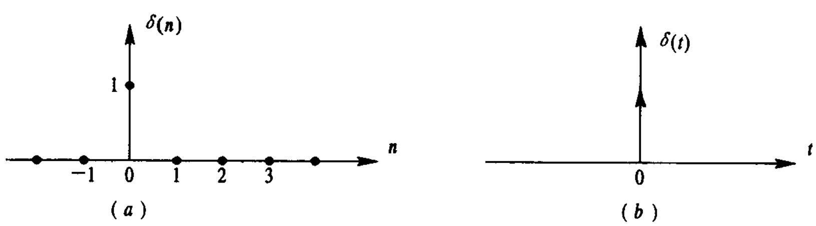


图 1.2.1　单位采样序列和单位冲激信号

(a) 单位采样序列；(b) 单位冲激信号

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

单位阶跃序列如图 1.2.2 所示。它类似于模拟信号中的单位阶跃函数 $u(t)$。$\delta(n)$与 $u(n)$之间的关系如下式所示：

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.2.5}$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \tag{1.2.6}$$

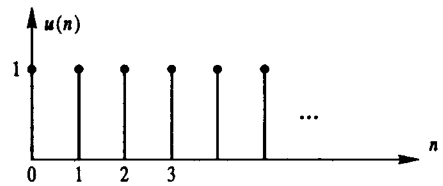


图 1.2.2　单位阶跃序列

令 $n-k=m$，代入上式得到

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) \tag{1.2.7}$$

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases} \tag{1.2.8}$$

上式中 N 称为矩形序列的长度。当 $N=4$ 时，$R_4(n)$ 的波形如图 1.2.3 所示。矩形序列可用单位阶跃序列表示，如下式：

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \tag{1.2.9}$$

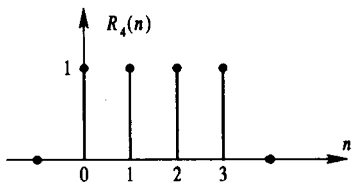


图 1.2.3　矩形序列

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n),\ a \text{ 为实数}$$

如果$|a|<1$，$x(n)$的幅度随n的增大而减小，称$x(n)$为收敛序列；如$|a|>1$，则称为发散序列。其波形如图 1.2.4 所示。

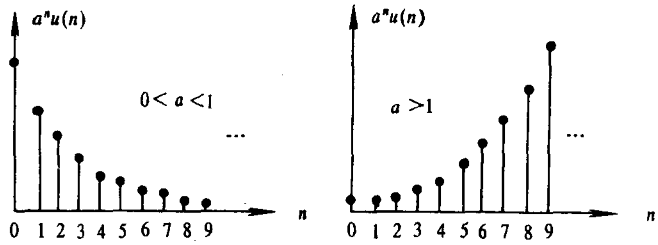


图 1.2.4　实指数序列

5. 正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

式中ω称为正弦序列的数字域频率，单位是弧度，它表示序列变化的速率，或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数。

如果正弦序列是由模拟信号$x_a(t)$采样得到的，那么

$$x_a(t) = \sin(\Omega t)$$

$$x_a(t)|_{t=nT} = \sin(\Omega nT)$$

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

因为在数值上，序列值与采样信号值相等，因此得到数字频率ω与模拟角频率Ω之间的关系为

$$\omega = \Omega T \tag{1.2.10}$$

(1.2.10)式具有普遍意义，它表示凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率Ω与序列的数字域频率ω成线性关系。由于采样频率f_s与采样周期T互为倒数，也可以表示成下式：

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \tag{1.2.11}$$

(1.2.11)式表示数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。本书中均用ω表示数字域频率，Ω和f表示模拟角频率和模拟频率。

6. 复指数序列

$$x(n) = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n}$$

式中ω_0为数字域频率，设$\sigma=0$，用极坐标和实部虚部表示如下式：

$$x(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$$

$$x(n) = \cos(\omega_0 n) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 n)$$

由于n取整数，下面等式成立：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2\pi M)n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n},\ M = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots$$

这表明复指数序列具有以2π为周期的周期性，在以后的研究中，频率域只考虑一个周期就够了。

7. 周期序列

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N，使下面等式成立：

$$x(n) = x(n+N), \qquad -\infty < n < \infty \tag{1.2.12}$$

则称序列 $x(n)$ 为周期性序列，周期为 N，注意 N 要取整数。例如：

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

上式中，数字频率是 $\pi/4$，由于 n 取整数，可以写成下式：

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(n+8)\right)$$

上式表明 $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 是周期为 8 的周期序列，也称正弦序列，如图 1.2.5 所示。下面讨论一般正弦序列的周期性。

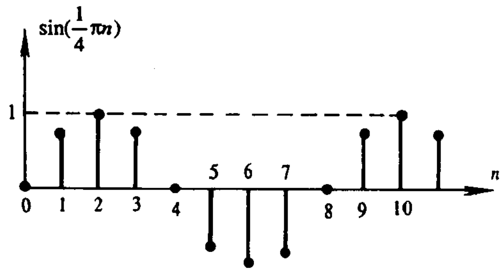


图 1.2.5　正弦序列

设

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

那么

$$x(n+N) = A\sin(\omega_0(n+N)+\varphi) = A\sin(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi)$$

如果

$$x(n+N) = x(n)$$

则要求 $N=(2\pi/\omega_0)k$，式中 k 与 N 均取整数，且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数，满足这些条件，正弦序列才是以 N 为周期的周期序列。

具体正弦序列有以下三种情况：

（1）当 $2\pi/\omega_0$ 为整数时，$k=1$，正弦序列是以 $2\pi/\omega_0$ 为周期的周期序列。例如 $\sin(\pi/8)n$，$\omega_0=\pi/8$，$2\pi/\omega_0=16$，该正弦序列周期为 16。

（2）$2\pi/\omega_0$ 不是整数，是一个有理数时，设 $2\pi/\omega_0=P/Q$，式中 P、Q 是互为素数的整数，取 $k=Q$，那么 $N=P$，则正弦序列是以 P 为周期的周期序列。例如 $\sin(4/5)\pi n$，$\omega_0=(4/5)\pi$，$2\pi/\omega_0=5/2$，$k=2$，该正弦序列是以 5 为周期的周期序列。

（3）$2\pi/\omega_0$ 是无理数，任何整数 k 都不能使 N 为正整数，因此，此时的正弦序列不是周期序列。例如，$\omega_0=1/4$，$\sin(\omega_0 n)$ 即不是周期序列。对于复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性也有同样的分析结果。

以上介绍了几种常用的典型序列，对于任意序列，常用单位采样序列的移位加权和表示，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1.2.13}$$

式中

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}$$

这种任意序列的表示方法，在信号分析中是一个很有用的公式。例如：$x(n)$的波形如图1.2.6所示，可以用(1.2.13)式表示成：

$$x(n) = -2\delta(n+2) + 0.5\delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1) + 1.5\delta(n-2) \\ - \delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6)$$

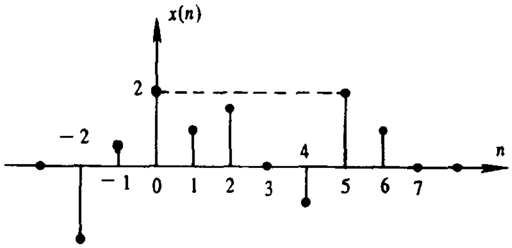


图 1.2.6 用单位采样序列移位加权和表示序列

1.2.2 序列的运算

在数字信号处理中，序列有下面几种运算，它们是乘法、加法、移位、翻转及尺度变换。

1. *乘法和加法*

序列之间的乘法和加法，是指它的同序号的序列值逐项对应相乘和相加，如图1.2.7所示。

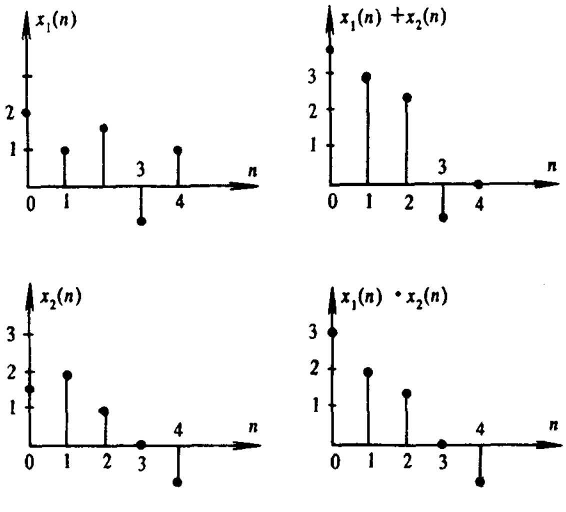


图 1.2.7 序列的加法和乘法

2. *移位、翻转及尺度变换*

设序列$x(n)$用图1.2.8(a)表示，其移位序列$x(n-n_0)$(当$n_0=2$时)用图1.2.8(b)表示；当$n_0>0$时称为$x(n)$的延时序列；当$n_0<0$时，称为$x(n)$的超前序列。$x(-n)$则是$x(n)$的翻转序列，用图1.2.8(c)表示。$x(mn)$是$x(n)$序列每隔m点取一点形成的，相当于时间轴n压缩了m倍。当$m=2$时，其波形如图1.2.8(d)所示。

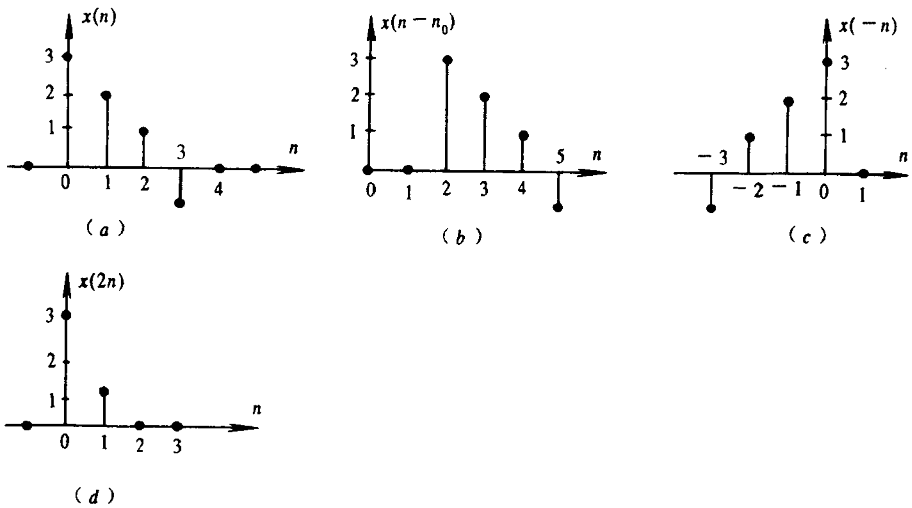


图 1.2.8 序列的移位、翻转和尺度变换

1.3 时域离散系统

设时域离散系统的输入为 $x(n)$，经过规定的运算，系统输出序列用 $y(n)$表示。设运算关系用 $T[\cdot]$表示，输出与输入之间关系用下式表示：

$$y(n) = T[x(n)] \tag{1.3.1}$$

其框图如图 1.3.1 所示。

在时域离散系统中，最重要最常用的是线性时不变系统，这是因为很多物理过程都可用这类系统表征，且便于分析。

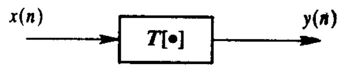


图 1.3.1 时域离散系统

1.3.1 线性系统

满足叠加原理的系统称为线性系统。设$x_1(n)$和$x_2(n)$分别作为系统的输入序列，其输出分别用 $y_1(n)$和 $y_2(n)$表示，即

$$y_1(n) = T[x_1(n)],\ y_2(n) = T[x_2(n)]$$

那么线性系统一定满足下面两个公式：

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \tag{1.3.2}$$

$$T[ax_1(n)] = ay_1(n) \tag{1.3.3}$$

满足(1.3.2)式称为线性系统的可加性；满足(1.3.3)式称为线性系统的比列性或齐次性，式中 a 是常数。将以上两个公式结合起来，可表示成：

$$y(n) = T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \tag{1.3.4}$$

上式中，a 和 b 均是常数。

例 1.3.1 证明 $y(n)=ax(n)+b$（a 和 b 是常数），所代表的系统是非线性系统。

证明 $y_1(n)=T[x_1(n)]=ax_1(n)+b$

$y_2(n)=T[x_2(n)]=ax_2(n)+b$

$y(n)=T[x_1(n)+x_2(n)]=ax_1(n)+ax_2(n)+b$

$y(n)\neq y_1(n)+y_2(n)$

因此，该系统不是线性系统。用同样方法可以证明 $y(n)=x(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$ 所代表的系统是线性系统。

1.3.2 时不变系统

如果系统对输入信号的运算关系 $T[\cdot]$ 在整个运算过程中不随时间变化，或者说系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关，则这种系统称为时不变系统，用公式表示如下：

$$\left.\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] \\ y(n-n_0) &= T[x(n-n_0)] \end{aligned}\right\} \tag{1.3.5}$$

式中 n_0 为任意整数。检查一个系统是否是时不变系统，就是检查是否满足(1.3.5)式。

例 1.3.2 检查 $y(n)=ax(n)+b$ 代表的系统是否是时不变系统，上式中 a 和 b 是常数。

解

$$y(n)=ax(n)+b$$

$$y(n-n_0)=ax(n-n_0)+b$$

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]$$

因此该系统是时不变系统。

例 1.3.3 检查 $y(n)=nx(n)$ 所代表的系统是否是时不变系统。

解

$$y(n)=nx(n)$$

$$y(n-n_0)=(n-n_0)x(n-n_0)$$

$$T[x(n-n_0)]=nx(n-n_0)$$

$$y(n-n_0)\neq T[x(n-n_0)]$$

因此该系统不是时不变系统。同样方法可以证明 $y(n)=x(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$ 所代表的系统不是时不变系统。

1.3.3 线性时不变系统输入与输出之间的关系

设系统的输入 $x(n)=\delta(n)$，系统输出 $y(n)$ 的初始状态为零，定义这种条件下系统输出称为系统的单位取样响应，用 $h(n)$ 表示。换句话说，单位取样响应即是系统对于 $\delta(n)$ 的零状态响应。用公式表示为

$$h(n) = T[\delta(n)] \tag{1.3.6}$$

$h(n)$ 和模拟系统中的 $h(t)$ 单位冲激响应相类似，都代表系统的时域特征。

设系统的输入用 $x(n)$ 表示，按照(1.2.13)式表示成单位采样序列移位加权和为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

那么系统输出为