

北京师范大学现代数学丛书

数理逻辑与范畴论应用

王世强 孟晓青 著



北京师范大学出版社

国家自然科学基金 教育部博士点基金资助项目

北京师范大学现代数学丛书

SHULI LUOJI YU FANCHOU LUN YINGYONG

数理逻辑与范畴论应用

王世强 孟晓青 著

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑与范畴论应用/王世强,孟晓青著. —北京:北京师范大学出版社,1999.3
(北京师范大学现代数学丛书)
ISBN 7-303-04855-3

I. 数… II. ①王…②孟… III. ①数理逻辑-应用②范畴论-应用 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 28244 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

出版人:常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:12.125 字数:304千字

1999年3月第1版 1999年3月第1次印刷

印数:1~1000册 定价:20.00元

序 言

几年前,王世强与杨守廉合写了《独立于 ZFC 的数学问题》一书(北京师范大学出版社,1992),目的在于向广大数学工作者介绍数理逻辑中的公理集合论对其他数学学科中一些前沿问题的应用.本书从目的和性质上说,可以看作是上书的续篇,但所用的工具范围更广了.在数理逻辑方法方面,除了公理集合论外,还涉及模型论和递归论.另外,更有一半的篇幅是介绍数学中另一基础性学科范畴论的各种应用.

本书在写法上,则与上书互相独立(本书各章也基本上互相独立),两书的内容也无重复.本书仍然是面向广大数学工作者的,所以并不要求读者具备数理逻辑或范畴论的专门知识,只要有一定的数学修养,并且在必要时承认一些数理逻辑或范畴论中的结论即可.

(一)

数理逻辑是用数学性的严密方法深入研究数学中的逻辑思维及重大基本概念(如集合、模型、算法、证明等)的学科,所以其成果及方法常常能起到比常规数学思维更深入、更有力的作用(这在实质上是对常规数学思维的一种延伸),从而能帮助解决不少数学难题乃至开拓新的数学领域(后者如非标准分析、模型论代数等).

本书的前一半,选择介绍数理逻辑方法对数学问题的一部分应用.其中仍有一些是公理集合论的应用(第1,2,6章),另有一些是模型论的应用(第4,5,7,8章,但第8章只是对一个重要新成果的简介),也有一些是直接或间接用到递归论的内容(第3,7章).关

于递归论的数学应用，国内已有一些专书介绍，所以本书中涉及较少。[读者可参看胡久稳《希尔伯特第十问题》(辽宁教育出版社，1987)及林毓材《不可解问题》(云南教育出版社，1992)]。本书所谈到的这些应用，大多数只须承认数理逻辑的个别结论即可顺利阅读。此外，还附录了一些多值逻辑的初步内容(第9,10,11章)，它们是通常2值逻辑的一种推广。(只需对其中的值格简化，即可作为特例得出常用的紧致性定理等。)

(二)

1945年，S. Eilenberg 和 S. MacLane 为了更清晰的揭示代数拓扑中的概念而提出范畴与函子等重要的基本概念。后来，范畴论又有很大的新发展。范畴论作为数学的一个基础性学科，是伴随着代数几何(特别是 A. Grothendieck 的法国学派)、代数拓扑、微分几何及其物理应用、经典集合论的模型与变量集合论的模型等方面的深入研究而发展起来的。尤其是1958年 D. Kan 提出伴随函子(adjoint functor)概念和70年代初 F. W. Lawvere, M. Tierney 提出拓扑斯(topos)的概念后，范畴论的发展更进入一个新的阶段。范畴论的许多概念、结构以及它们的转换运算，作为有力的代数工具正在应用于不少数学分支及有关领域中去。

以映射的复合为最基本概念的范畴论，为从整体上研究空间形式与数量关系的联系与转化，为研究不同数学结构、概念之间的联系与转化，提供了有力的工具。

范畴论不仅是一个具有广泛应用的数学学科，它更是一种方法论。这一点已被越来越多的人认识到。由于范畴论强调整体性、变化性和转化性，所以它正在成为数学以及有关学科的语言和语法。用范畴论的语言和方法去组织学科、分析问题，可以清晰地揭示有关的内在结构，揭示这一结构与其他结构的联系与转化，从

而揭示进一步发展的方向. 这种方法论作用, 也就是范畴论与数学基础的关系.

在本书的后一半, 介绍范畴论的应用.

首先是范畴论的直接应用: Sheaf 理论在代数几何中的应用; 从范畴化动力学 (categorical dynamics) 角度提出的综合微分几何学; 范畴论在概率统计中的应用; 范畴论在计算机科学中的应用; 范畴论与图论. 这里都体现着范畴论的方法论作用.

第二是讨论范畴论自身的方法论作用.

Topos 是变量集合的范畴, 它的真值对象一般不是二值的布尔代数, 它的内逻辑是多值的所谓 “intuitionistic logic”. Topos 理论为变化着的物理世界提供了直接的数学模型. 而常量集合的范畴 S 是变量集合范畴 topos 的一个极端情况, 它的真值对象是只有两个值的布尔代数, 它的内逻辑是二值的经典逻辑.

在这里, 作者特别介绍了 Lawvere 对范畴化数学基础的工作.

另外, 由于范畴论是以变化、转换作为基础性概念, 所以范畴论包含有很多辩证法的因素, 有很强的哲学背景, 使辩证法中某些范畴的形式化成为可能. Lawvere 在这方面也做了很多工作.

(三)

今年是我国著名数学家和数学教育家傅种孙先生诞辰一百周年. 傅先生是在我国最早提倡数学基础研究的学者, 他早在 20 世纪 20 年代就及时译述出版了 B. Russell 和 D. Hilbert 的数学基础著作, 并撰写了很多有关的论文、专著和多年讲授几何基础及各种近代数学课程. 作者直接或间接受到傅先生的教导和影响, 受益很深. 谨以此书纪念傅种孙先生.

F. W. Lawvere 教授是著名数学家和拓扑斯理论的主要创始人. 他认为数学家不仅是要为解决和论证著名的数学问题及猜想

而奋斗，更重要的一方面应该是研究和发展数学本身的概念及结构等，以便使数学能够为变化和发展着的世界提供更直接的数学模型及计算、推演的工具，也使数学更容易地被人们掌握和应用。这正是 Lawvere 意义下的数学基础，他正是为着这一数学基础的建立和完善而做着终生的努力。作者也直接或间接受到 Lawvere 教授的教益和影响，受益匪浅。也以此书献给 Lawvere 教授。

本书中不少成果是在国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助下完成的。孟晓青并得到了美国 Appalachian College Association 的部分支持。对于这些帮助，作者在此一并表示感谢！

在本书成稿过程中，韩丽娟同志对书中写法提出了不少精心考虑的建议。在出版过程中，又得到潘淑琴、韩丽娟、葛福星诸同志在编辑及排版等方面的很多帮助。对于她（他）们的辛勤工作，作者谨致衷心的敬意与诚挚的感谢！

因限于水平，书中难免有谬误不当之处，希望读者批评指正。

王世强 孟晓青

1998 年 8 月于北京师范大学

目 录

第 1 章	关于 Baire 定理等的真假	1
§1	几个等价的命题	2
§2	由命题 1 证命题 2	3
§3	由命题 2 证命题 3	3
§4	由命题 3 证命题 4	7
§5	由命题 4 证命题 1 及总的结论	8
§6	其他类似结果举例	8
第 2 章	具有物理意义的分球定理	10
§1	对球面的一种划分	11
§2	闭球体的克隆定理	13
第 3 章	二次数环的 Hilbert 第 10 问题	17
§1	实二次数环的情况	19
§2	虚二次数环的情况	23
第 4 章	某些环的 Goldbach 性质	31
§1	某些无限域上多项式环的 Goldbach 3 素元性质	31
§2	二次数环的具有 Goldbach 性质的扩环	36
§3	二次数环的不具有 Goldbach 性质的扩环	44
第 5 章	关于域上的无限方阵	49
§1	域上 rcf 方阵的逆方阵	50
§2	域上 rcf 方阵的对角化 (上)	55
§3	域上 rcf 方阵的对角化 (下)	63
§4	rcf 方阵的极大无限线性无关行组	72
第 6 章	共形映射的 1 阶不变量	77
§1	$CSCI_1$ 与 ZFC 的和谐性	78

§2 “非 CSCI_1 ” 与 ZFC 的和谐性	89
第 7 章 代数封闭群与模型论	94
§1 群论 $\exists_1$ 公式的结式	95
§2 存在封闭群与群的字问题	102
§3 模型论力迫法	107
§4 各种存在封闭群的存在性	114
第 8 章 关于 Mordell–Lang 猜想	124
§1 Hrushovski 定理简介	125
第 9 章 格值逻辑概述	131
§1 格值逻辑	131
§2 知识状态逻辑	133
§3 格值逻辑应用举例	139
第 10 章 格值谓词演算中的标准形	148
§1 前束标准形	150
§2 Skolem 标准形	153
§3 Löwenheim 定理	157
第 11 章 格值模型的紧致性定理	160
第 12 章 变量集合与 graphs	172
第 13 章 变量集合的范畴 topos, 范畴化逻辑及其应用	196
§1 常量集合的范畴 $\mathcal{S}$ 与变量集合的范畴 topos	196
§2 Topos 与范畴化逻辑	201
§3 独立性的证明	208
§4 代数理论, 几何理论, 与分类 topos	214
第 14 章 凸集范畴, enriched 范畴与度量空间范畴	222
§1 凸集范畴 $\mathcal{C}$ 与 K -模范畴 $K\text{-mod}$	222
§2 Enriched 范畴与广义度量空间范畴	233
第 15 章 随机映射与统计决策论	244
§1 随机映射的范畴 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, 以及相关的性质	244

§2	$\mathcal{P}(\mathfrak{M})(X, Y)$ 上的凸集度量 dist , dist 诱导的拓扑的性质	249
§3	概率论中的某些代数结构	255
§4	统计决策论	259
§5	随机动力程序 (序列决策论, 控制的随机过程)	266
第 16 章	凸集度量 dist 的一些有趣的性质	272
第 17 章	Monad 和计算语言	280
§1	Monad	281
§2	简单一般语言	289
§3	简单程序语言	293
第 18 章	综合微分几何	297
第 19 章	Sheaf 理论与代数几何	309
§1	Sheaf 理论	309
§2	Sheaf 上同调	320
§3	Sheaf 代数几何	324
第 20 章	数学基础与范畴论	333
§1	Mengen 和 Kardinalen (variable sets and abstract sets)	336
§2	空间的范畴	341
§3	空间和量	345
§4	Intensive 和 extensive quantities	352
第 21 章	Topos 理论以及范畴论的哲学意义	361
§1	Topos 理论和范畴论的唯物论意义	362
§2	变化与联系	366
§3	辩证法的形式化	369

第 1 章

关于 Baire 定理等的真假

在泛函分析教科书中，一般都有一条基础性的 Baire 定理，它是说：“每个完备度量空间都是第二纲的”。（例如可参看 [1], p37). 但在 1994 年的《Mathematical Reviews》中介绍说：N. Tsukada 在 1993 年构造了一些完备度量空间，它们不是第二纲的。（见该刊第 94f:54063 号评介）。以上似乎是两个互相矛盾的结果，但其实不然。原因在于，这两个结果是分别在不同的集合论公理基础上得出的。

根据数理逻辑中关于公理集合论的研究，我们知道：在 E. Zermelo 与 A. A. Fraenkel 的集合论公理体系 ZF 基础上 (ZF 可以直观地看作人们通常所理解的朴素集合论，但不包含选择公理)，可以加用选择公理 AC，也可以加用与之相反的“非 AC”。（确切地说就是：如果 ZF 不矛盾，则“ZF+AC”和“ZF+(非 AC)”也都不矛盾。）与此类似地，可以在 ZF 基础上加用一种比 AC 较弱的“相依选择公理”DC，也可以加用与之相反的“非 DC”。（确切地说就是：如果 ZF 不矛盾，则“ZF+DC”和“ZF+非 DC”也都不矛盾。）关于这些，我们不在此证明，读者只须暂时承认即可。（其证明可参看 Th. Jech 的专著 [2]）。

为了解释上述关于 Baire 定理的表面矛盾, 我们在本章 § 1 至 § 5 中证明: 在 ZF 基础上, Baire 第二纲定理是与 DC 等价的. 这原是 R. Goldblatt 在 1985 年的 [3] 中得到的结论, 以下的论证主要就是从 [3] 中抽取素材而改写的.

另外, 我们并在 § 6 中附述一些性质类似的结果, 涉及 Hahn-Banach 扩张定理以及 Lebesgue 测度方面一些情况.

根据不同的无矛盾性结果, 如果有必要的话, 我们完全可以在各该基础上发展内容不同的分析数学. 这正像欧氏几何与各种非欧几何间的关系一样. 所以, 我们不能笼统地谈论一条命题的真假, 只能谈论它在各种不同的无矛盾理论体系中的对错.

§ 1 几个等价的命题

我们先写出几个命题, 然后利用通常的朴素集合论 (即相当于 ZF) 证明它们的等价性.

命题 1 (Baire 定理) 每个完备度量空间都是第二纲的.

命题 2 若 (X, ρ) 是一个完备度量空间, $G_n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 是 X 中一系列稠密的开集, 则 $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ 在 X 中稠密.

命题 3 若 $(P, \leq)$ 是一个偏序集, $D_n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 是 P 中一系列稠密的子集. (此时, $D \subseteq P$ 为稠密的含义是: 对每个 $p \in P$ 都存在 $d \in D$ 能使 $d \leq p$). 则对每个 $p \in P$, 都存在一个序列 $f: \omega \rightarrow P$ (ω 为自然数集) 能适合

$$\begin{cases} \text{(i) } f(0) = p; \\ \text{(ii) 对每一 } n \in \omega \text{ 都有 } f(n+1) \leq f(n); \\ \text{(iii) 对每一 } D_n, (f \text{ 的值域}) \cap D_n \text{ 不空.} \end{cases}$$

命题 4 (DC) 若 A 是一个非空集合, R 是 A 上一个具有下

列性质的二元关系:

对每一 $x \in A$ 都存在 $y \in A$ 适合 xRy .

则对每个 $a \in A$ 都存在一个序列 $f: \omega \rightarrow A$ 能适合:

$$\begin{cases} \text{(i) } f(0) = a; \\ \text{(ii) 对每一 } n \in \omega \text{ 都有 } f(n)Rf(n+1). \end{cases}$$

§ 2 由命题 1 证命题 2

这是泛函分析书中常见的. 我们依据 [1] 简述如下:

$$\text{令 } A = X - \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (X - G_n). \quad (1)$$

对每个 $n \in \omega$, 由 G_n 是 X 中的稠密开集及 [1]p25 命题 1.4-4 知 $(X - G_n)$ 是在 X 中疏朗的闭集. 从而由 (1) 及第一纲集定义 (见 [1]p26) 知 A 是第一纲集. 再由 [1] 中 Baire 定理的推论 (见 [1]p38 第 2~3 行) 即知 $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$ 在 X 中稠密.

§ 3 由命题 2 证命题 3

设 $(P, \leq)$ 是一个任意给定的 (非空) 偏序集.

(3.1) 以 C 记一切适合下列性质的序列 $f: \omega \rightarrow P$ 所成的集合:

$$f(0) \geq f(1) \geq f(2) \geq \dots$$

在 C 中定义一个度量 d 如下:

$$\begin{cases} d(f, g) = \frac{1}{1 + (\text{使 } f(n) \neq g(n) \text{ 的最小 } n)}, & (\text{当 } f \neq g \text{ 时}); \\ d(f, g) = 0, & (\text{当 } f = g \text{ 时}). \end{cases}$$

易知 (C, d) 构成一个度量空间. (例如当 f, g, h 互异时, 可如下证明三角不等式: 令

$$\begin{aligned} k &= (\text{使 } f(n) \neq g(n) \text{ 的最小 } n), \\ l &= (\text{使 } g(n) \neq h(n) \text{ 的最小 } n), \\ m &= (\text{使 } f(n) \neq h(n) \text{ 的最小 } n), \\ p &= \min(k, l), \end{aligned}$$

则易见 $p \leq m$. 从而有

$$\begin{aligned} d(f, g) + d(g, h) &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{l+1} = \frac{1}{p+1} + \text{正数} \\ &> \frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{m+1} = d(f, h). \end{aligned}$$

其他情况的验证更为显然.

下面证明度量空间 (C, d) 是完备的.

设 $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$ 为 (C, d) 中任一 Cauchy 序列.

对每一自然数 r , 存在自然数 N_r 能使当 $u, v \geq N_r$ 后有

$$d(f_u, f_v) < \frac{1}{r+1},$$

以 N_r^* 记此种 N_r 中之最小者. 又由 d 的定义可知

$$(\text{使 } f_u(n) \neq f_v(n) \text{ 的最小 } n) > r.$$

所以 f_u, f_v 在 $\{0, 1, \dots, r\}$ 上的值相同. 特知:

$f_{N_r^*}, f_{N_r^*+1}, f_{N_r^*+2}, \dots$ 在 $\{0, 1, \dots, r\}$ 上的值都相同.

由以上又易见有 $N_0^* \leq N_1^* \leq N_2^* \leq \dots$.

现在定义一个序列 $g: \omega \rightarrow P$ 如下:

$$g(i) = f_{N_i^*}(i), \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

则由诸 $f_i \in C$ 可知 $g \in C$, 这是因为

$$g(i) = f_{N_i^*}(i) = f_{N_{i+1}^*}(i) \geq f_{N_{i+1}^*}(i+1) = g(i+1).$$

(其中第二个“=”是根据上述, “ $\geq$ ”是由于 $f_{N_{i+1}^*} \in C$).

以下证明: $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots\}$ 按度量 d 收敛于 g .

任给 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 r 使 $\frac{1}{r+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. 当 $m \geq N_r^*$ 后, 有

$$d(f_m, f_{N_r^*}) < \frac{1}{r+1} \quad (\text{由 } N_r^* \text{ 取法}).$$

又由 g 的定义易见 g 与 $f_{N_r^*}$ 在 $\{0, 1, \dots, r\}$ 上的值相同, 所以由 d 的定义可知

$$d(g, f_{N_r^*}) < \frac{1}{r+1}.$$

由以上及 d 的度量性质即知: 当 $m \geq N_r^*$ 后, 恒有

$$d(f_m, g) < \varepsilon.$$

(3.2) 设 D_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 是 P 中的一系列稠密子集.

对每个自然数 n , 令

$$S_n = \{f \in C \mid (f \text{ 的值集}) \cap D_n \text{ 不空}\}.$$

(3.2.1) 现在证明: S_n 是 (C, d) 中的开集.

任取 $f \in S_n$, 由 S_n 定义可知存在一个最小的自然数 m 能使 $f(m) \in D_n$. 以 $B(f, \frac{1}{m+1})$ 记 C 中以 f 为中心以 $\frac{1}{m+1}$ 为半径的开球. 以下说明 $B(f, \frac{1}{m+1}) \subseteq S_n$.

任取 $g \in B(f, \frac{1}{m+1})$, 则 $d(f, g) < \frac{1}{m+1}$, 从而易知 $g(m) = f(m) \in D_n$, 所以 $g \in S_n$.

(3.2.2) 再证 S_n 是 (C, d) 中的稠密子集.

任给 $f \in C$ 及 C 中以 f 为中心的任一开球 $B(f, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$).

取适合 $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$ 的最小自然数 m . 由 $f \in C$ 有

$$f(0) \geq f(1) \geq \cdots \geq f(m).$$

再由 D_n 在偏序集 $(P, \geq)$ 中的稠密性知存在 $p \in D_n$ 能使 $f(m) \geq p$.

现在定义 $h: \omega \rightarrow P$ 如下:

$$\begin{cases} h(i) = f(i), & (\text{当 } i = 0, 1, \cdots, m); \\ h(i) = p, & (\text{当 } i = m+1, m+2, \cdots). \end{cases}$$

则 $h \in C$ 且 $p \in (h \text{ 的值域}) \cap D_n$, 所以 $h \in S_n$. 又易见

$$d(f, h) < \frac{1}{m+1} < \varepsilon,$$

所以 $h \in B(f, \varepsilon)$. 从而 $S_n \cap B(f, \varepsilon)$ 不空.

(3.3) 由 (3.1) 及 (3.2) 及命题 2 可知

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \text{ 在 } (c, d) \text{ 中稠密.} \quad (2)$$

对任意给定的 $p \in P$, 定义一个 $k: \omega \rightarrow P$ 如下:

$$k(i) = p, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

则 $k \in C$. 取 C 中的开球 $B(k, 1)$, 由 (2) 知

$$\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \right) B(k, 1) \text{ 不空.}$$

任取此交集中一元 f , 则:

(i) 由 $f \in B(k, 1)$ 知 $d(f, k) < 1$, 从而 $f(0) = k(0) = p$;

(ii) 由 $f \in C$ 知: 对每一 $n \in \omega$ 都有 $f(n+1) \leq f(n)$;

(iii) 由 $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ 知: 对每个 $n \in \omega$, $f \in S_n$, 再由 S_n 定义即知 $(f \text{ 的值域}) \cap D_n$ 不空.

§ 4 由命题 3 证命题 4

设 A 为一非空集合, R 为 A 上一个适合命题 4 题设的 2 元关系.

令 P 为由一切如下的有限序列 $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ 所构成的集合, 其中诸 $a_i \in A$ 且适合:

$$a_0 R a_1, a_1 R a_2, \dots, a_{n-1} R a_n.$$

($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

对 P 中的元素定义一个偏序 $\leq$ 如下:

($p \leq q$) 当且只当 (q 是 p 的一个前节).

(也即: 当且只当 $p = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ 且 $q = \langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle$ 且 $m \leq n$.)

再定义 P 的诸子集 D_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 如下:

$$D_n = \{p \in P \mid n \in (p \text{ 的定义域})\}.$$

对每个 n , 由关于 R 的题设易见: P 的任何元素 q 都能扩张为 D_n 中一个元素 p (即: q 成为 p 的一个前节), 从而 $q \geq p$. 所以, D_n 是 P 的稠密子集.

任意给定一个元素 $a \in A$ 之后, 令 $p = \langle a \rangle \in P$. 由命题 3 知存在 $f: \omega \rightarrow P$ 能适合

$$\begin{cases} f(0) = p = \langle a \rangle; \\ \text{对每一 } n \in \omega \text{ 都有: } f(n) \text{ 是 } f(n+1) \text{ 的前节;} \\ \text{对每一 } D_n, (f \text{ 的值域}) \cap D_n \text{ 不空.} \end{cases}$$